УДК 517.98

П. В. Омельченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

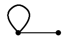
ПРО ЗВЕДЕННЯ БЛОЧНИХ МАТРИЦЬ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

We study the problem of reduction of self-adjoint block matrices $B = (B_{ij})$ graph-defined by the group of unitary block-diagonal matrices. Under the condition that the matrices B^2 and B^4 are orthoscalar, the graphs of block matrices are described for which this problem is of $*$-finite, $*$-tame, or $*$-wilde representative type.

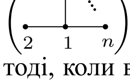
Изучается задача о приведении самосопряженных блочных матриц $B = (B_{ij})$ с заданным графом, группой унитарных блочно-диагональных матриц. При условии, что матрицы B^2 и B^4 ортоскалярны, описаны графы блочных матриц, для которых эта задача $*$-конечного, $*$-ручного или $*$-дикого представленческого типа.

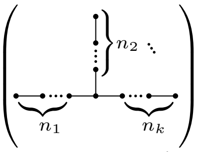
Вступ. Ряд класифікаційних задач теорії $*$-зображень у гільбертовому просторі $H = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$ зводиться до задачі зведення лінійного обмеженого самоспряженого оператора $B = B^*$ у блочному вигляді $(B = (B_{ij})_{i,j=1}^n)$. Серед таких задач, зокрема, опис зображень напівлінійних співвідношень [1], графів [2], сімей лінійних операторів з фіксованими спектрами [3] та ін.

У даній роботі вивчається задача зведення самоспряжених блочних матриць до „канонічного" вигляду за допомогою групи унітарних блочно-діагональних матриць. Без додаткових умов на B ця задача є надзвичайно складною ($*$-дикою).

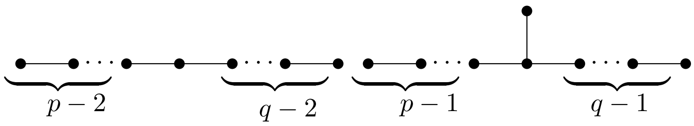
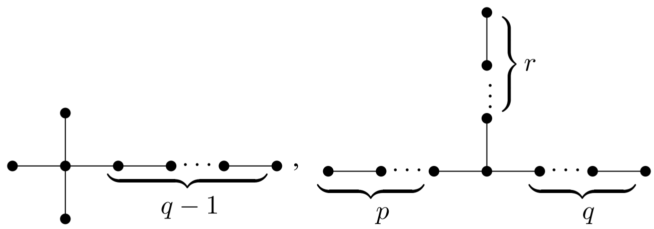
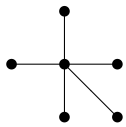
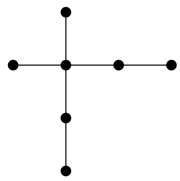
З кожною самоспряженою блочною матрицею B можна пов'язати простий неорієнтовний граф Γ: кількість вершин графа дорівнює кількості підпросторів у розкладі H, а ребро між i- та j-ю вершинами існує тоді і тільки тоді, коли B_{ij} — блок, відмінний від нуля. По кожному зображенню графа Γ [2, 4] можна побудувати блочну матрицю відповідної структури, і навпаки, по кожній блочній матриці можна побудувати $*$-зображення відповідного їй графа. Якщо розглядати оператори, пов'язані з графами , , то задача зведення відповідних блочних матриць, як і задача опису всіх незвідних $*$-зображень цих графів, є $*$-дикою [5]. Зауважимо, що задача зведення класу блочних матриць, пов'язаних з графом Γ, що містить один із $*$-диких графів, теж є $*$-дикою.

Однією із додаткових умов на блочну матрицю B, пов'язану з графом Γ, що виділяє клас блочних матриць, які не є $*$-дикими, є умова ортоскалярності $\big(P_{H_i} B^2 P_{H_i} = \chi_i P_{H_i}$, де P_{H_i} — ортопроектор на H_i, $\chi_i \in \mathbb{R}^+$ для всіх $i = \overline{1,n}\big)$. Задача зведення ортоскалярних блочних матриць не є $*$-дикою у випадку, коли їй відповідає граф Динкіна (A_n, D_n, E_6, E_7, E_8) або розширений граф Динкіна ($\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$) (див. [7, 2, 6, 4]).

У даній роботі вводяться і вивчаються h-ортоскалярні блочні матриці, тобто такі блочні матриці B, що для деякого $h \in \mathbb{N}$ та додатних дійсних чисел $\chi_i^{[h]}$ виконується рівність $P_{H_i} B^h P_{H_i} = \chi_i^{[h]} P_{H_i}$ для всіх $i = \overline{1,n}$ (при $h = 2$ ця умова збігається з умовою ортоскалярності). Якщо блочній матриці B відповідає граф $K_{1,n}$ , то умова $2s$-ортоскалярності ($s \in \mathbb{N}$) для B виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова 2-ортоскалярності для B (теорема 1).

У роботі також вводяться і вивчаються $[2,4]$-ортоскалярні блочні матриці, тобто такі, що одночасно задовольняють умови 2- та 4-ортоскалярності. Має місце теорема (теорема 2): блочні матриці з зірчастим графом $T_{n_1,\ldots,n_k}$ 

, які задовольняють умову $[2,4]$-ортоскалярності, поділяються на три класи: $*$-скінченні (F), $*$-ручні (T), $*$-дикі (W) (див. другий пункт статті і [5]) в залежності від відповідного їм графа $T_{p,q,r}$ (для $p,q,r \geq 2$) таким чином:

(F)	
(T)	
(W)	містить  або 

1. Постановка задачі. Нехай H — сепарабельний гільбертів простір. Зафіксуємо деяке $n \in \mathbb{N}$. Припустимо, що H розкладається в ортогональну суму своїх n підпросторів:

$$H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n. \tag{1}$$

Вектором розмірності простору H відносно розкладу (1) будемо називати вектор

$$d = (d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n), \qquad d_0 = \dim(H), \qquad d_i = \dim(H_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Будь-який лінійний обмежений самоспряжений оператор $B \in L(H)$ відносно розкладу (1) можна подати у вигляді *блочної матриці*

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ B_{n1} & B_{n2} & \ldots & B_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $B_{ij} \colon H_j \to H_i$, $B_{ij}^* = B_{ji}$ для всіх $i,j = \overline{1,n}$.

Дві блочні матриці B та $\tilde{B}$ будемо називати *блочно еквівалентними,* якщо існує унітарна блочно-діагональна матриця

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & U_n \end{pmatrix}$$

така, що $UB = \tilde{B}U$, тобто виконується рівність $U_iB_{ij} = \tilde{B}_{ij}U_j$ для всіх $i, j = \overline{1, n}$.

Блочну матрицю B будемо називати *блочно незвідною*, якщо для будь-якої блочно-діагональної матриці

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

із того, що $CB = BC$, випливає, що C є скалярним оператором.

У даній роботі нас буде цікавити опис всіх блочно незвідних блочних матриць фіксованої структури з точністю до блочної еквівалентності.

1.1. Зв'язок із теорією зображень графів. Із кожною самоспряженою блочною матрицею можна пов'язати простий неорієнтовний граф $G = (G_e, G_v)$ таким чином. Кількість вершин $|G_e|$ графа дорівнює n — кількості підпросторів у розкладі простору H. Вершини i та j пов'язані ребром тоді і тільки тоді, коли $B_{ij} \neq 0$.

Із означення графа блочної матриці можна бачити, що за блочною матрицею можна побудувати зображення відповідного їй графа і, навпаки, за кожним зображенням графа можна відновити блочну матрицю. Кожній вершині i графа блочної матриці поставимо у відповідність простір H_i, а кожному ребру (i, j) — пару взаємоспряжених операторів $\{B_{ij}, B_{ji}\}$. Кожному морфізму U поставимо у відповідність множину $\{U_1, \dots, U_n\}$. І навпаки, якщо маємо зображення графа, тобто множину гільбертових просторів $\{H_1, \dots, H_n\}$, множину лінійних взаємоспряжених відображень між ними $\{B_{ij}, B_{ji}\}$ та множину морфізмів $\{U_i\}$ — унітарних операторів, то побудуємо простір H, як ортогональну суму просторів $\{H_i\}$, і блочні матриці $B = ||B_{ij}||$ та $U = \mathrm{diag}\{U_1, \dots, U_n\}$, $i, j = \overline{1, n}$.

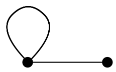
2. Класифікація задач зведення блочних матриць. Стандартною $*$-*дикою* задачею є опис усіх незвідних зображень вільної алгебри з двома самоспряженими твірними з точністю до унітарної еквівалентності. Якщо задача зведення блочної матриці містить як підзадачу класичну $*$-дику задачу, то вона сама є $*$-дикою (W), тобто навести повний її розв'язок надзвичайно важко (детальніше див. [5]).

Серед задач зведення блочних матриць, які не є $*$-дикими, виділимо задачі $*$-скінченного та $*$-ручного типів.

Будемо говорити, що блочна матриця $*$-*скінченного типу* (F), якщо вона блочно еквівалентна скінченній кількості блочно незвідних блочних матриць.

Будемо говорити, що блочна матриця $*$-*ручного типу* (T), якщо W^*-алгебра, породжена всіма блочними матрицями такого вигляду, містить лише фактори типу I.

Наведемо повну класифікацію задач зведення блочних матриць в залежності від відповідного графа [5] (зауважимо, що подібні теореми добре відомі в теорії $*$-зображень графів).

Клас	Граф блочної матриці
(F)	
(T)	
(W)	містить  або

2.1. Умова ортоскалярності для блочних матриць. Із попередніх міркувань видно, що клас блочних матриць, які не є $*$-дикими, є дуже вузьким. Один із можливих шляхів розширення цього класу полягає у додатковій умові на блочну матрицю. Однією із можливих умов є еквівалент умови ортоскалярності для зображення графів [2].

Будемо говорити, що блочна матриця задовольняє умову *ортоскалярності з характером* $\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$, якщо блочна матриця B^2 має вигляд

$$B^2 = \begin{pmatrix} \chi_1 I_1 & * & \ldots & * \\ * & \chi_2 I_2 & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ * & * & \ldots & \chi_n I_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

що еквівалентно $P_{H_i} B^2 P_{H_i} = \chi_i P_{H_i}$, де $\chi_i \in \mathbb{R}^+$, I_i — тотожний оператор у просторі H_i, P_{H_i} — ортопроектор на простір H_i для всіх $i = \overline{1,n}$.

***Зауваження* 1.** Для графів з петлями умова ортоскалярності для блочних матриць відрізняється від умови ортоскалярності для зображень графів. А саме, у вершині графа з петлею  умови мають такий вигляд: $V = V^*$, $V^2 = vI_v$, $v \in \mathbb{R}$, для блочної матриці і $V = \{V_1, V_2\}$, $V_1^* = V_2^*$, $V_1V_2 + V_2V_1 = vI_v$, $v \in \mathbb{R}$, для задачі зображення графів.

Серед блочних матриць, які задовольняють умову ортоскалярності, також будемо виділяти $*$-скінченні, $*$-ручні та $*$-дикі блочні матриці. Належність блочної матриці тому чи іншому класу, взагалі кажучи, залежить від її характеру.

Будемо говорити, що блочна матриця, яка задовольняє умову ортоскалярності, є

$*$-дикою, якщо існує хоча б один характер, для якого вона $*$-дика;

$*$-ручною, якщо існує хоча б один характер, для якого вона $*$-ручна, а для всіх інших характерів або $*$-ручна, або $*$-скінченна;

$*$-скінченною, якщо для кожного характеру вона $*$-скінченна.

На підставі відомих теорем [2, 8] та зв'язку блочних матриць із зображеннями відповідних їм графів можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 1. *Якщо блочній матриці відповідає граф Динкіна* $(A_n,\ D_n,\ E_6,\ E_7,\ E_8)$, *то вона є $*$-скінченного типу, до того ж всі простори H_i скінченновимірні.*

Якщо блочній матриці відповідає розширений граф Динкіна $(\tilde{D}_n,\ \tilde{E}_6,\ \tilde{E}_7,\ \tilde{E}_8)$, *то вона є $*$-ручного типу, до того ж всі простори H_i скінченовимірні.*

Якщо блочній матриці відповідає граф, який містить розширений граф Динкіна, то розклад (1) *обов'язково буде містити нескінченновимірні простори.*

3. Умови h-ортоскалярності та $[h_1, \ldots, h_l]$-ортоскалярності для блочних матриць.

Означення 1. *Блочна матриця задовольняє умову h-ортоскалярності з h-характером $\chi^{[h]} = (\chi_1^{[h]}, \chi_2^{[h]}, \ldots, \chi_n^{[h]})$, якщо блочна матриця B^h для деякого $h \in \mathbb{N}$ має вигляд*

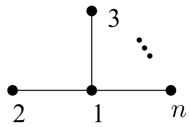
$$B^h = \begin{pmatrix} \chi_1^{[h]} I_1 & * & \ldots & * \\ * & \chi_2^{[h]} I_2 & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ * & * & \ldots & \chi_n^{[h]} I_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

що еквівалентно $P_{H_i} B^h P_{H_i} = \chi_i^{[h]} P_{H_i}$, де $\chi_i^{[h]} \in \mathbb{R}^+$, I_i — тотожний оператор у просторі H_i, P_{H_i} — ортопроектор на простір H_i для всіх $i = \overline{1, n}$.

Зауважимо, що умова ортоскалярності для блочної матриці, яку введено вище, є умовою 2-ортоскалярності, як надалі ми і будемо її позначати.

З теорії графів відомо [9], що ij-елемент h-го ступеня матриці суміжності графа відповідає кількості шляхів довжини h із i-ї в j-ту вершину графа. Якщо граф блочної матриці з умовою h-ортоскалярності є простим (не містить циклів), то $\chi_k^{2s+1} = 0$, $k = \overline{1, n}$, $s \geq 0$. У цій роботі ми обмежимось випадком, коли граф блочної матриці є зірчастим.

Найпростішим зірчастим графом є граф $K_{1,n}$:



.

Теорема 1. *Якщо блочній матриці, яка задовольняє умову 2-ортоскалярності, відповідає граф $K_{1,n}$, то вона є $*$-дикою тоді і тільки тоді, коли ця блочна матриця є $*$-дикою з умовою h-ортоскалярності для будь-якого парного $h = 2s$, $s > 1$.*

Доведення. Оскільки блочній матриці B відповідає граф $K_{1,n}$, то вона має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \ddots & \ldots \\ B_{n1} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Блочна матриця B^2 має вигляд

$$\begin{pmatrix} B_{12}B_{21} + \cdots + B_{1n}B_{n1} & * & \cdots & * \\ * & B_{21}B_{12} & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ * & * & \ldots & B_{n1}B_{1n} \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення $X = B_{12}B_{21} + \ldots + B_{1n}B_{n1}$. Тоді B^{2s} для будь-якого $s > 1$ має вигляд

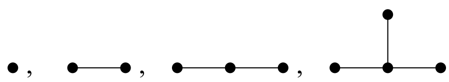
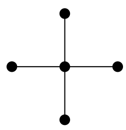
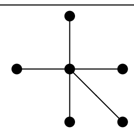
$$\begin{pmatrix} X^s & * & \cdots & * \\ * & B_{21}X^{s-1}B_{12} & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ * & * & \ldots & B_{n1}X^{s-1}B_{1n} \end{pmatrix},$$

звідки і випливає справедливість теореми.

Для h-характерів блочної матриці B виконуються співвідношення $\chi_1^{[h]} = (\chi_1^{[2]})^s$, $\chi_i^{[h]} = \chi_i^{[2]}(\chi_1^{[2]})^{s-1}$, $i = \overline{2,n}$.

Теорему доведено.

Із останньої теореми випливає наступна класифікація блочних матриць з умовою h-ортоскалярності та графом $K_{1,n}$:

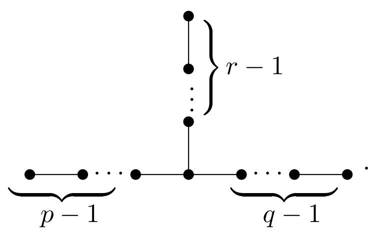
Клас	Граф блочної матриці
(F)	
(T)	
(W)	містить 

***Зауваження* 2.** Про доведення $*$-дикості задачі $*$-зображення графа $K_{1,5}$ див. [7].

Разом з умовою h-ортоскалярності для блочних матриць можна розглянути умову $[h_1, \ldots, h_l]$-ортоскалярності, $l > 1$.

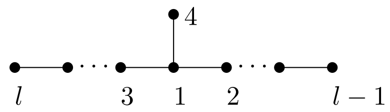
Означення 2. *Будемо говорити, що блочна матриця задовольняє умову* $[h_1, \ldots, h_l]$*-ортоскалярності, якщо вона одночасно задовольняє умови* h_1-, $\ldots$, h_l-*ортоскалярності.*

Розглянемо умову $[2, 4]$-ортоскалярності. Будемо використовувати позначення $T_{p,\,q,\,r}$, $p, q, r \geq 2$, для графа



Лема 1. *Якщо блочній матриці, яка задовольняє умову* $[2, 4]$*-ортоскалярності, відповідає граф* $T_{p,\,q,\,2}$, $p, q \geq 2$, *то вона є* $*$*-скінченною.*

Доведення. Занумеруємо вершини даного графа таким чином:



, $l \in \mathbb{N}$.

Відповідна блочна матриця B має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & B_{14} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & 0 & 0 & 0 & B_{25} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{36} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & B_{l(l-2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З умови 2-ортоскалярності отримуємо такі співвідношення для блоків матриці B :

$$B_{12}B_{21} + B_{13}B_{31} + B_{14}B_{41} = \chi_1^{[2]} I_1, \tag{5}$$

$$B_{21}B_{12} + B_{25}B_{52} = \chi_2^{[2]} I_2, \tag{6}$$

$$B_{31}B_{13} + B_{36}B_{63} = \chi_3^{[2]} I_3, \tag{7}$$

$$B_{41}B_{14} = \chi_4^{[2]} I_4, \tag{8}$$

$$B_{52}B_{25} + B_{57}B_{75} = \chi_5^{[2]} I_5, \tag{9}$$

$$B_{63}B_{36} + B_{68}B_{86} = \chi_6^{[2]} I_6, \tag{10}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_{(l-1)(l-3)}B_{(l-3)(l-1)} = \chi_{(l-1)}^{[2]} I_{(l-1)}, \tag{11}$$

$$B_{l(l-2)}B_{(l-2)l} = \chi_l^{[2]} I_l, \tag{12}$$

а з умови 4-ортоскалярності —

$$(\chi_1^{[2]})^2 + B_{12}B_{25}B_{52}B_{21} + B_{13}B_{36}B_{63}B_{31} = \chi_1^{[4]} I_1, \tag{13}$$

$$(\chi_2^{[2]})^2 + B_{21}(B_{13}B_{31} + B_{14}B_{41})B_{12} + B_{25}B_{57}B_{75}B_{52} = \chi_2^{[4]} I_2, \tag{14}$$

$$(\chi_3^{[2]})^2 + B_{31}(B_{12}B_{21} + B_{14}B_{41})B_{13} + B_{36}B_{68}B_{86}B_{63} = \chi_3^{[4]} I_3, \tag{15}$$

$$\chi_4^{[2]}\chi_1^{[2]} = \chi_4^{[4]} I_4, \tag{16}$$

$$(\chi_5^{[2]})^2 + B_{52}B_{12}B_{21}B_{15} + B_{57}B_{79}B_{97}B_{75} = \chi_5^{[4]} I_5, \tag{17}$$

$$(\chi_6^{[2]})^2 + B_{63}B_{31}B_{13}B_{36} + B_{68}B_{810}B_{108}B_{86} = \chi_6^{[4]} I_6, \tag{18}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\chi_{(l-1)}^{[2]}\chi_{(l-3)}^{[2]} = \chi_{(l-1)}^{[4]} I_{(l-1)}, \tag{19}$$

$$\chi_l^{[2]}\chi_{l-2}^{[2]} = \chi_l^{[4]} I_l. \tag{20}$$

Підставляючи у рівняння (14) рівняння (5), (6), (9), одержуємо умови на спектр оператора $B_{21}B_{12}$:

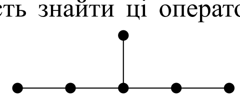
$$(B_{21}B_{12})^2 - \left(\frac{2\chi_2^{[2]} - \chi_5^{[2]} + \chi_1^{[2]}}{2}\right) B_{21}B_{12} + \left(\frac{\chi_2^{[4]} + 2(\chi_2^{[2]})^2 - \chi_5^{[2]}}{2}\right) I_2 = 0,$$

а підставляючи у рівняння (15) рівняння (5), (7), (10), отримуємо умови на спектр оператора $B_{31}B_{13}$:

$$(B_{31}B_{13})^2 - \left(\frac{2\chi_3^{[2]} - \chi_6^{[2]} + \chi_1^{[2]}}{2}\right) B_{31}B_{13} + \left(\frac{\chi_3^{[4]} + 2(\chi_3^{[2]})^2 - \chi_6^{[2]}}{2}\right) I_3 = 0.$$

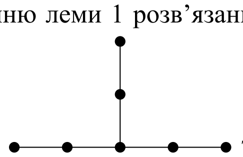
З останніх рівнянь видно, що спектри операторів $B_{21}B_{12}$ та $B_{31}B_{13}$ складаються не більш ніж із двох точок. Для спектрів спряжених операторів маємо $\sigma(B_{12}B_{21}) \subseteq \{\sigma(B_{21}B_{12}), 0\}$, $\sigma(B_{13}B_{31}) \subseteq \{\sigma(B_{31}B_{13}), 0\}$.

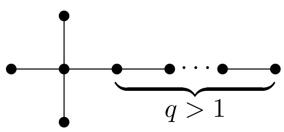
Із рівняння (8) випливає, що $\sigma(B_{41}B_{14}) = \{\chi_4^{[2]}\}, \quad \sigma(B_{14}B_{41}) \subseteq \{\chi_4^{[2]}, 0\}$.

Рівність (5) разом з умовами на спектри операторів $B_{12}B_{21}$, $B_{13}B_{31}$, $B_{14}B_{41}$ дає можливість знайти ці оператори, розв'язавши задачу опису блочної матриці з графом E_6:  та умовою 2-ортоскалярності. А згідно з твердженням (1) ця задача є $*$-скінченного типу.

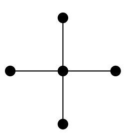
***Наслідок* 1.** *Блочні матриці з графами $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$ та умовою $[2,4]$-ортоскалярності $*$-скінченні.*

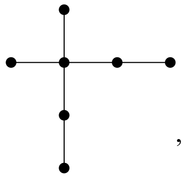
Лема 2. *Якщо блочній матриці, яка задовольняє умову $[2,4]$-ортоскалярності, відповідає граф $T_{p,q,r}$, $p,q,r > 2$, то вона є $*$-ручною.*

Доведення. Аналогічно доведенню леми 1 розв'язання даної задачі зводиться до розв'язання задачі з графом $\tilde{E}_6$:  та умовою 2-ортоскалярності. Згідно з твердженням 1 ця задача є $*$-ручного типу.

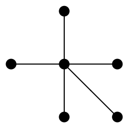
Лема 3. *Якщо блочній матриці, яка задовольняє умову $[2,4]$-ортоскалярності, відповідає граф* 

, то вона є $*$-ручною.

Доведення. Аналогічно доведенню леми 1 розв'язання даної задачі зводиться до розв'язання задачі з графом $\tilde{D}_4$:  та умовою 2-ортоскалярності. Згідно з твердженням 1 ця задача є $*$-ручного типу.

Лема 4. *Якщо граф блочної матриці, яка задовольняє умову* $[2,4]$*-ортоскалярності, містить підграф*  *, то вона є* $*$*-дикою.*

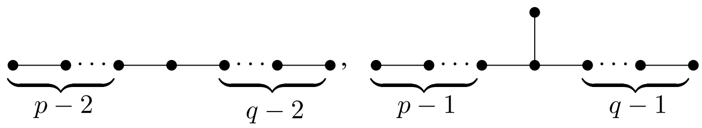
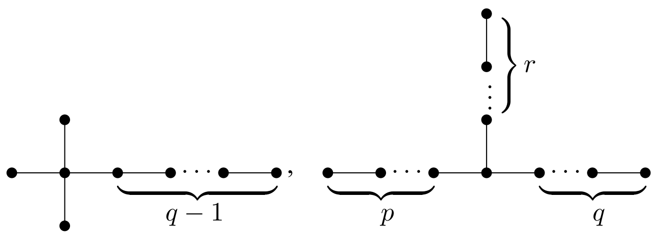
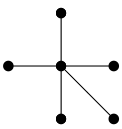
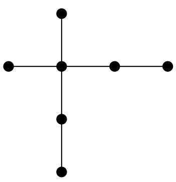
Доведення. Аналогічно доведенню леми 1 розв'язання даної задачі зводиться до розв'язання задачі з тим самим графом та умовою 2-ортоскалярності. Як відомо, ця задача є $*$-дикою.

Лема 5. *Якщо граф блочної матриці, яка задовольняє умову* $[2,4]$*-ортоскалярності, містить підграф*  *, то вона є* $*$*-дикою.*

Доведення випливає з твердження 1.

На підставі попередніх лем можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 2. *Блочні матриці з зірчастим графом, які задовольняють умову* $[2,4]$*-ортоскалярності, поділяються на три класи в залежності від відповідного їм графа* ($для\ p,q,r \geq 2$) *таким чином*:

Клас	Граф блочної матриці
(F)	
(T)	
(W)	містить  або 

Автор висловлює подяку науковому керівнику В. Л. Островському та Ю. С. Самойленку за постановку задачі, плідні обговорення і слушні зауваження.

1. *Samoilenko Yu. S., Turowska L. B., Shulman V. S.* Semilinear relations and their $*$-representation // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1996. – **2**, № 1. – P. 55 – 111.
2. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Функцион. анализ и его прил. – 2005. – **39**, вып. 2. – С. 13 – 30.

3. *Островський В. Л., Самойленко Ю. С.* Про спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самоспряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1556 – 1570.
4. *Ройтер А. В., Кругляк С. А., Назарова Л. А.* Ортоскалярные представления колчанов в категории гильбертовых пространств. II // arXiv: 0901.2296v1[math.RT]15Jan2009.
5. *Ostrovskyi V. L., Samoilenko Yu. S.* Introduction to the theory of representation of finited presented $*$-algebras. I. Representations by bounded operators // Rev. Math. Math. Phys. – 1999. – 261 p.
6. *Albeverio S., Ostrovskyi V. L., Samoilenko Yu. S.* On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras // J. Algebra. – 2007. – **308**, № 2. – P. 567 – 582.
7. *Кругляк С. А., Рабанович С. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, вып. 3. – С. 20 – 35.
8. *Ostrovskyi V. L.* Special characters on star graphs and representations of $*$-algebras // arxiv: math. RA/0509240. – 2005.
9. *Берж К.* Теория графов и ее применение. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 320 с.

Одержано 16.12.08,
після доопрацювання — 10.07.09