УДК 512.544

М. М. Семко, М. М. Пискун (Нац. ун-т держ. подат. служби України, Ірпінь)

ПРО ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ НАБЛИЖЕНО НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП

A subgroup H of a group G is called almost polycyclically close to a normal group (in G) if H includes a subgroup L normal in H^G such that a factor-group H^G/L is almost polycyclic. The group G is said to be anti PC-group if every its non-polycyclic-by-finite subgroup is almost polycyclically close to a normal group. In the present paper, the structure of minimax anti PC-group is studied.

Подгруппа H группы G называется почти полициклически приближенной к нормальной (в G), если H содержит нормальную в H^G подгруппу L, для которой фактор-группа H^G/L будет почти полициклической. Группа G называется анти PC-группой, если каждая ее подгруппа, не являющаяся почти полициклической, будет почти полициклически приближенной к нормальной. В работе изучается строение минимаксных анти PC-групп.

Нехай G — група. Її підгрупа H називається *наближено нормальною* в G, якщо H має скінченний індекс у своєму нормальному замиканні $K = H^G$. У цьому випадку H включає нормальну в K підгрупу L, для якої фактор-група K/L є скінченною. Такого роду підгрупи були введені до розгляду Б. Нейманом [1]. У вказаній роботі він описав групи, будь-яка підгрупа яких є наближено нормальною. Такі групи мають скінченний комутант, зокрема, вони є FC-групами. Вивчення впливу властивостей наближено нормальних підгруп на структуру групи було продовжено в роботах інших авторів. Так, у роботі [2] розглянуто групи, в яких система всіх наближено нормальних підгруп є щільною. У роботі [3] розглядалися групи, в яких система всіх підгруп, які не є наближено нормальними, задовольняє умову мінімальності. А в роботі [4] розглянуто групи, в яких та ж система підгруп задовольняє умову максимальності. У статті [5] розглянуто групи, в яких кожна підгрупа або наближено нормальна або субнормальна. Відзначимо також роботу [6], в якій вивчалися деякі властивості решітки усіх наближено нормальних підгруп.

У роботі [7] введено узагальнення наближено нормальних підгруп, яке ми наведемо нижче. Спочатку нагадаємо деякі необхідні для подальшого викладу означення (див. [8], розділ 3).

Нехай $\boldsymbol{X}$ — клас груп. Будемо говорити, що група G *має $\boldsymbol{X}$-класи спряжених елементів або що G є $\boldsymbol{X}C$-групою*, якщо фактор-група $G/G_G(g^G)$ належить до класу $\boldsymbol{X}$ для кожного елемента g групи G. Тут через g^G позначено клас усіх елементів, які спряжені з елементом g, тобто підмножина $\left\{g^x = x^{-1}gx,\ x \in G\right\}$.

Якщо $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}$ — клас усіх одиничних груп, то клас усіх $\boldsymbol{I}C$-груп збігається з класом $\boldsymbol{A}$ всіх абелевих груп. Тому при належному виборі класу $\boldsymbol{X}$ клас $\boldsymbol{X}C$-груп можна розглядати як природне узагальнення класу абелевих груп.

Наприклад, якщо $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}$ — клас усіх скінченних груп, то клас усіх $\boldsymbol{F}C$-груп — це точно клас усіх *FC-груп* або *груп зі скінченними класами спряжених елементів*. Цей клас є досить вдалим розширенням як класу всіх абелевих груп, так і класу всіх скінченних груп, який наслідує багато властивостей цих двох класів. Тому теорія $\boldsymbol{F}C$-груп є однією з найбільш розвинених серед теорій нескінченних груп.

Природними розширеннями класу скінченних груп є клас $\boldsymbol{C}$ усіх черніковських груп та клас $\boldsymbol{P}$ усіх майже поліциклічних груп. Тому якщо $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$, то клас усіх $\boldsymbol{C}C$-груп — це точно клас усіх *груп з черніковськими класами спряжених елементів*, який був уведений до розгляду Я. Д. Половицьким [9]. Якщо ж $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}$, то приходимо до класу $\boldsymbol{P}C$-груп або до класу *всіх груп з майже поліциклічними класами спряженості*. Вивчення цього класу тільки розпочинається [10, 11]. У даній роботі розглянемо підклас класу PC-груп, який виникає з наступного розширення поняття наближено нормальних підгруп.

Підгрупа H групи G називається *майже поліциклічно наближеною до нормальної* (*в* G), якщо H містить нормальну в H^G підгрупу L, для якої фактор-група H^G/L буде майже поліциклічною. Ці підгрупи будуть природним узагальненням наближено нормальних підгруп. У роботі [10] розглянуто інше розширення поняття наближено нормальної підгрупи. Таким розширенням були підгрупи H групи G, для яких впорядкована за включенням система підгруп $\{L \mid H \le L \le G\}$ задовольняє умову максимальності. Зауважимо, що це поняття не є еквівалентним поняттю, яке наведене вище. В цьому можна переконатись, розглянувши наступний приклад.

Нехай p — просте число, $\langle a \rangle$ — циклічна група порядку p, $\langle g \rangle$ — нескінченна циклічна група,

$$G = \langle g \rangle \, wr \, \langle g \rangle = A \leftthreetimes \langle g \rangle$$

— вінцевий добуток цих двох циклічних груп, A — базова підгрупа цього вінцевого добутку. За конструкцією A буде нескінченною елементарною абелевою p-підгрупою, і, отже, група G не є (майже) поліциклічною. Ми можемо розглядати A як циклічний модуль над груповим кільцем $J = F_p\langle g \rangle$ нескінченної циклічної групи над простим полем F_p. Це обумовлює ізоморфізм $A \cong$ $\cong J/\mathbf{Ann}_J(a)$. У свою чергу $\mathbf{Ann}_J(a)$ буде ідеалом у кільці J. Оскільки кожний ненульовий ідеал кільця J має скінченний індекс в J, то нескінченність A доводить рівність $\mathbf{Ann}_J(a) = \langle 0 \rangle$. Зокрема, звідси випливає, що і $C_A(g) = \langle 1 \rangle$. Нехай тепер H — нормальне замикання підгрупи $\langle g \rangle$ в групі G. Припустимо, що H є поліциклічною. З наслідку 1.5 роботи [7] отримаємо включення $g \in \boldsymbol{PC}(G)$, яке в свою чергу доводить той факт, що і фактор-група $A/C_A(g)$ повинна бути поліциклічною. Оскільки A є періодичною, то це означає, що $A/C_A(g)$ повинна бути скінченною. Але ж у цьому випадку $C_A(g) \ne \langle 1 \rangle$. Однак, як ми вже бачили вище, це не є можливим. Отримана суперечність показує, що підгрупа H не може бути поліциклічною. Інакше кажучи, підгрупа $\langle g \rangle$ не є майже поліциклічно наближеною до нормальної. Нехай тепер

$$K_1 \le K_2 \le \ldots \le K_n \le \ldots$$

— довільна зростаюча послідовність підгруп, що містять $\langle g \rangle$. З включення $\langle g \rangle \le K_n$ отримаємо напівпрямий розклад $K_n = B_n \leftthreetimes \langle g \rangle$. Це приводить до іншої зростаючої послідовності підгруп

$$B_1 \le B_2 \le \ldots \le B_n \le \ldots,$$

кожна з яких міститься в A та є $\langle g \rangle$-інваріантною. Оскільки групове кільце $F_p\langle g \rangle$ є нетеровим, то і циклічний $F_p\langle g \rangle$-модуль A буде нетеровим. Це означає, що A не містить строго зростаючих послідовностей $\langle g \rangle$-інваріантних підгруп. Таким чином, знайдеться такий номер m, що $B_m = B_{m+k}$ для кожного натурального k. Тоді $K_m = K_{m+k}$ для кожного натурального k. Таким чином, впорядкована за включенням система підгруп $\{L \mid \langle g \rangle \le L \le G\}$ задовольняє умову максимальності.

Цей приклад показує, що введене поняття підгрупи, майже поліциклічно наближеної до нормальної, є більш ефективним. Першим природним завданням тут є опис груп, всі підгрупи яких майже поліциклічно наближені до нормальної. Якщо G — PC-група, то з теореми 2.2 роботи [10] отримуємо, що для будь-якого елемента $g \in G$ підгрупа $H_g = \langle g \rangle^G$ є майже поліциклічною. Звідси випливає, що і для будь-якої майже поліциклічної підгрупи F групи G її нормальне замикання F^G є майже поліциклічною підгрупою. Іншими словами, будь-яка майже поліциклічна підгрупа F групи G майже поліциклічно наближена до нормальної. Більш того, ця властивість є характеристичною для PC-груп. Тому природно виникає питання про будову групи G, в якій всі підгрупи, окрім майже поліциклічних, майже поліциклічно наближені до нормальних. Такі групи називатимемо *анти PC-групами*. Вивчення таких груп розпочато в роботі [7]. Основний результат цієї роботи показує, що при деяких природних обмеженнях анти PC-групи вичерпуються групами з майже поліциклічними комутантами і мінімаксними. Група G називається *узагальнено радикальною*, якщо вона має зростаючий ряд підгруп, фактори якого або локально нільпотентні, або локально скінченні. Випадок мінімаксних груп вимагав окремого розгляду. Вивченню мінімаксних анти PC-груп і присвячено дану роботу.

Нагадаємо, що група G називається ***F**-досконалою*, якщо вона не містить у собі власних підгруп скінченного індексу. **F**-досконалі групи у деякому розумінні є антиподами резидуально скінченних груп. У кожній групі G підгрупа, породжена всіма її **F**-досконалими підгрупами, буде **F**-досконалою; її називають **F**-досконалою частиною групи G.

Лема 1. *Нехай G — група, H — її **F**-досконала підгрупа. Якщо H є майже поліциклічно наближеною до нормальної, то вона нормальна.*

Доведення. Нехай K — підгрупа H^G, яка має в ній скінченний індекс. Тоді індекс $\left| H^g : K \cap H^g \right|$ є скінченним для будь-якого $g \in G$. Оскільки разом з H підгрупа H^g є **F**-досконалою, то $H^g = K \cap H^g$, тобто $H^g \le K$ для кожного $g \in G$. Це означає, що $H^G = K$. Інакше кажучи, H^G є **F**-досконалою підгрупою. З того факту, що H є майже поліциклічно наближеною до нормальної, випливає, що вона містить у собі таку нормальну в H^G підгрупу P, що секція H^G/P є майже поліциклічною. Слід нагадати, що неодинична майже поліциклічна група завжди має власну підгрупу скінченного індексу. Таким чином, з того, що H^G є **F**-досконалою, випливає рівність $H^G = P$, а отже і $H = H^G$.

Лему 1 доведено.

Відзначимо також результат, що дає опис груп, всі підгрупи яких майже поліциклічно наближені до нормальних. Його можна отримати з теореми 5.5 роботи [10].

Пропозиція 1. *Кожна підгрупа групи G буде майже поліциклічно наближе-*

ною до нормальної тоді і тільки тоді, коли її комутант — майже поліциклічна підгрупа.

Доведення. *Необхідність* випливає з теореми 5.5 роботи [10].

Для доведення *достатності* припустимо, що G — група з майже поліциклічним комутантом K і H — довільна підгрупа G. Зазначимо, що $G/C_G(K)$ буде майже поліциклічною [7] (лема 1.4). Підгрупа $C_H(K) = C_G(K) \bigcap H$ буде нормальною в H, а з елементарних співвідношень $H/C_H(K) = H/(C_G(K) \bigcap \bigcap H \cong HC_G(K)/C_G(K)$ випливає, що $H/C_H(K)$ також є майже поліциклічною. Добуток HK є нормальною підгрупою, а $HK/C_H(K)$ — майже поліциклічною. Звідси і випливає, що кожна підгрупа G буде майже поліциклічно наближеною до нормальної.

Лема 2. *Нехай G — анти PC-група. Якщо H — її нормальна підгрупа, що не є майже поліциклічною, то фактор-група G/H має майже поліциклічний комутант.*

Доведення. З умов леми випливає, що кожна підгрупа G, що містить H, не є майже поліциклічною, і тому вона буде майже поліциклічно наближеною до нормальної. Інакше кажучи, кожна підгрупа G/H є майже поліциклічно наближеною до нормальної. З пропозиції 1 випливає, що фактор-група G/H має майже поліциклічний комутант.

Лему 2 доведено.

Наслідок. *Нехай G — анти PC-група. Якщо G містить абелеву підгрупу A, яка не є скінченнопородженою, то група G буде майже розв'язною.*

Доведення. Нехай $B = A^G$. Оскільки A не є скінченнопородженою, вона містить нормальну в B підгрупу H, для якої B/H є майже поліциклічною. Зокрема, B є майже розв'язною. З леми 2 випливає, що фактор-група G/B має майже поліциклічний комутант, так що вона також буде майже розв'язною.

Пропозиція 2. *Нехай G — анти PC-група, комутант якої не є майже поліциклічним. Якщо H, K — підгрупи G, що не є майже поліциклічними, то їх перетин $H \bigcap K$ не буде майже поліциклічною підгрупою.*

Доведення. Оскільки H (відповідно K) не є майже поліциклічною, то H^G (відповідно K^G) містить таку нормальну підгрупу L (відповідно M), що H^G/L (відповідно K^G/M) є майже поліциклічною. Оскільки L є нормальною в H^G, то перетин $L \bigcap K^G$ буде нормальною підгрупою в $H^G \bigcap K^G$. За тими ж самими аргументами перетин $M \bigcap H^G$ буде нормальною підгрупою в $H^G \bigcap K^G$. Таким чином, перетин $L \bigcap M = (L \bigcap K^G) \bigcap (M \bigcap H^G)$ буде нормальною підгрупою в $H^G \bigcap K^G$. Той факт, що H^G/L (відповідно K^G/M) є майже поліциклічною групою, обумовлює майже поліциклічність секції $(H^G \bigcap K^G/(L \bigcap K^G)$ (відповідно $(H^G \bigcap K^G)/(M \bigcap H^G)$). Рівність $L \bigcap M = (L \bigcap K^G) \bigcap (M \bigcap H^G)$ разом з теоремою Ремака забезпечує вкладення $(H^G \bigcap K^G)/(L \bigcap M)$ у прямий добуток $(H^G \bigcap K^G)/(L \bigcap K^G) \times \times (H^G \bigcap K^G)/(M \bigcap H^G)$. Оскількі обидва множники є майже поліциклічними, то такою буде і $(H^G \bigcap K^G)/(L \bigcap M)$.

Припустимо тепер, що перетин $H \bigcap K$ буде майже поліциклічною підгрупою. Тоді майже поліциклічною буде і перетин $L \bigcap M$. З доведеного вище випливає, що майже поліциклічною буде і підгрупа $(H^G \bigcap K^G)$. З наших умов випливає, що підгрупа H^G (відповідно K^G) не є майже поліциклічною. З леми 2 випливає, що фактор-група G/H^G (відповідно G/K^G) має майже поліциклічний комутант. Застосувавши знову теорему Ремака, отримаємо вкладення $G/(H^G \bigcap K^G)$ у $G/H^G \times G/K^G$. У свою чергу це доводить, що фактор-група $G/(H^G \bigcap K^G)$ має майже поліциклічний комутант. Оскільки з нашого припущення випливає, що і підгрупа $(H^G \bigcap K^G)$ є майже поліциклічною, то і вся підгрупа G повинна мати майже поліциклічний комутант. Отримана суперечність доводить, що перетин $H \bigcap K$ не може бути майже поліциклічним.

Пропозицію 2 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай G — анти PC-група. Якщо H, K — підгрупи G, що не є майже поліциклічними, а їх перетин $H \bigcap K$ є майже поліциклічною підгрупою, то комутант усієї групи буде майже поліциклічною підгрупою.*

***Наслідок* 2.** *Нехай G — анти PC-група. Якщо H — майже поліциклічна підгрупа G, то секція $N_G(H)/H$ не містить підгруп, що є прямими добутками двох нескінченнопороджених підгруп.*

Нехай A — абелева група скінченного секційного рангу, M — максимальна вільна підмножина A. Покладемо $B = \langle M \rangle$. Зазначимо, що B — вільна абелева підгрупа скінченного 0-рангу. Такий вибір підгрупи B забезпечує той факт, що фактор-група A/B буде періодичною. Позначимо через $\mathbf{Sp}(A)$ множину тих простих чисел p, для яких силовська p-підгрупа A/B є нескінченною. Множина $\mathbf{Sp}(A)$ є інваріантом групи A. Дійсно, якщо C — інша вільна абелева підгрупа A, то вона, як і B, буде скінченнопородженою. Тому фактори $B/(B \bigcap C)$ та $B/(B \bigcap C)$ будуть скінченними, а отже, фактор-групи A/B та A/C мають однакові набори нескінченних силовських підгруп.

Пропозиція 3. *Нехай G — анти PC-група, комутант якої не є майже поліциклічною підгрупою. Якщо A — абелева підгрупа G, то A або буде скінченнопородженою, або містить таку скінченнопороджену підгрупу B, що A/B є квазіциклічною p-групою. Більш того, якщо C — інша абелева підгрупа G, що не є скінченнопородженою, то* $\mathbf{Sp}(A) = \mathbf{Sp}(C)$.

Доведення. Нехай M — максимальна вільна підмножина підгрупи A і $U = \langle M \rangle$. Тоді U — вільна абелева підгрупа. Припустимо, що вона не є скінченнопородженою. Тоді вона буде прямим добутком двох нескінченнопороджених підгруп, а це суперечить пропозиції 2. Отримана суперечність показує, що U є скінченнопородженою. За вибором U фактор-група A/U буде вже періодичною. Припустимо, що множина $\Pi(A/U)$ є нескінченною. У цьому випадку A/U знову можна зобразити у вигляді прямого добутку двох нескінченних підгруп, що суперечить наслідку 2 пропозиції 2. Ця суперечність показує, що множина $\Pi(A/U)$ буде скінченною. Якщо припустити тепер, що силовська p-підгрупа A/U є скінченною для кожного $p \in \Pi(A/U)$, то і A/U є скінченною, а отже, A є скінченнопородженою. Якщо припустити, що $\Pi(A/U)$ містить два таких простих числа p, q, що силовські p- та q-підгрупи A/U є нескінченними, то знову отримаємо суперечність з наслідком 2 пропозиції 2. Нехай тепер p — єдине просте число, для якого силовська p-підгрупа P/U групи A/U є нескінченною. Якщо її нижній шар $\Omega_1(P/U)$ буде нескінченним, то $\Omega_1(P/U)$

можна зобразити у вигляді прямого добутку двох нескінченних підгруп, що суперечить наслідку 2 пропозиції 2. Ця суперечність доводить скінченність $\Omega_1(P/U)$, а це у свою чергу доводить той факт, що P/U є черніковською групою. Знову застосувавши попередні аргументи, отримаємо, що P/U буде прямим добутком квазіциклічної підгрупи D/U та скінченної підгрупи. Тому і A/B буде прямим добутком квазіциклічної підгрупи D/B та скінченної підгрупи B/U.

Нехай тепер C — інша нескінченнопороджена абелева підгрупа. Тоді, як ми бачили вище, вона включає таку скінченнопороджену підгрупу V, що C/V — квазіциклічна q-група. З пропозиції 2 випливає, що перетин $A \bigcap C$ не є скінченнопородженою підгрупою. Але тоді $A \bigcap C$ має скінченний індекс як в підгрупі A, так і в підгрупі C. Звідси випливає, що $\mathbf{Sp}(A) = \mathbf{Sp}(A \bigcap C) = \mathbf{Sp}(C)$.

Нехай G — майже розв'язна група скінченного секційного рангу,

$$\langle 1 \rangle = D_0 \le D_1 \le \ldots \le D_n \le D_{n+1} = G$$

— ряд її нормальних підгруп, в якому фактори D_{j+1}/D_j є абелевими, а останній фактор D_{n+1}/D_n буде скінченним. Покладемо

$$\mathbf{Sp}(A) = \bigcup_{0 \le j \le n-1} \mathbf{Sp}(D_{j+1}/D_j).$$

Неважно впевнитись у тому, що $\mathbf{Sp}(G)$ є інваріантом групи G.

***Наслідок* 1.** *Нехай G — майже розв'язна анти PC-група, комутант якої не є майже поліциклічною підгрупою. Тоді група G є мінімаксною та $\mathbf{Sp}(G) = p$ для деякого простого числа p.*

Це твердження випливає з пропозиції 3 та основного результату роботи [19].

Теорема 1. *Нехай G — локально скінченна група. Якщо G — анти PC-група, то:*

1) *G — група зі скінченним комутантом*

або

2) *G — майже квазіциклічна група.*

Доведення. Припустимо, що група G має нескінченний комутант. З огляду на локальну скінченність групи це означає, що він не є майже поліциклічним. Тоді з теореми 2.3 роботи [7] отримаємо, що G — майже розв'язна мінімаксна група. Будучи локально скінченною, G — черніковська група. Позначимо через D її подільну ($\boldsymbol{F}$-досконалу) частину. З пропозиції 3 отримаємо, що D — квазіциклічна p-підгрупа, а отже, G — група типу 2.

Теорему доведено.

Подальше вивчення анти PC-груп розпадається на дві частини: група містить у собі нескінченні періодичні підгрупи та всі періодичні підгрупи є скінченними.

Через $P(G)$ будемо позначати максимальну нормальну періодичну підгрупу групи G.

Лема 3. *Нехай G — неперіодична локально майже розв'язна анти PC-група, комутант якої не є майже поліциклічною підгрупою. Припустимо також, що G містить абелеві підгрупи, що не є скінченнопородженими. Тоді G містить нормальну абелеву підгрупу D, що має наступні властивості:*

1) *D є або квазіциклічною, або нескінченнопородженою групою без скруту скінченного 0-рангу r, і кожна її підгрупа, 0-ранг якої менший за r, буде скінченнопородженою;*

2) *фактор-група* G/D *є мінімаксною і має майже поліциклічний комутант.*

Доведення. З наслідку леми 2 випливає, що група G є майже розв'язною. За наслідком 1 пропозиції 3 G є мінімаксною групою. Припустимо, що G містить нескінченні періодичні підгрупи. Тоді за пропозицією 3 G містить єдину квазіциклічну p-підгрупу D.

Розглянемо тепер випадок, коли всі періодичні підгрупи G є скінченними. Нехай $K = \mathbf{P}(G)$. Спочатку припустимо, що $K = \langle 1 \rangle$. Нехай $\mathbf{M}$ — множина всіх абелевих підгруп G, що не є скінченнопородженими. Виберемо у системі $\mathbf{M}$ підгрупу A найменшого можливого 0-рангу. Нехай $\boldsymbol{r}_0(A) = r$. Підгрупа A є майже поліциклічно наближеною до нормальної, так що A^G містить таку нормальну підгрупу B, що A^G/B буде майже поліциклічною. Зокрема, A/B є скінченнопородженою, а тому B не має скінченної множини породжуючих елементів. Більш того, $\boldsymbol{r}_0(B) = r$. Для довільного елемента $g \in G$ підгрупа B^g також не є скінченнопородженою, тому з наслідку 1 пропозиції 2 випливає, що перетин $B \bigcap B^g$ не буде скінченнопородженою підгрупою. Тоді $\boldsymbol{r}_0(B \bigcap \bigcap B^g) = r = \boldsymbol{r}_0(B^g)$. Це показує, що фактор-група $B^g/(B \bigcap B^g)$ буде періодичною, зокрема $B^g B/B$ також буде періодичною. Оскільки $B^G = \left\langle B^g \,\middle|\, g \in G \right\rangle$, то B^G/B буде періодичною, а отже, скінченною. Нормальне замикання B^G породжується абелевими підгрупами B^g, кожна з яких нормальна в A^G. Скінченність індексу B^G/B показує, що B^G є добутком скінченної множини підгруп B^g. За класичною теоремою Фіттінга B^G буде нільпотентною. За нашим припущенням $\mathbf{P}(G) = \langle 1 \rangle$, так що B^G — нільпотентна підгрупа без скруту. Оскільки вона містить абелеву підгрупу скінченного індексу, то вона абелева. Скінченність B^G/B доводить рівність $r = \boldsymbol{r}_0(B^G)$. Покладемо $D = B^G$. Тепер з леми 2 випливає, що G/D має майже поліциклічний комутант.

Припустимо, що підгрупа K неодинична. З доведеного вище випливає, що G/K містить нормальну абелеву підгрупу U/K, що задовольняє умови 1, 2. Нехай $C = C_G(K)$, $V = C \bigcap U$. Тоді $K \bigcap V \leq \zeta(V)$ і $V/(K \bigcap V) \cong VK/K \leq U/K$ є абелевою. Таким чином, підгрупа V є нільпотентною мінімаксною групою зі скінченною періодичною частиною. Неважко довести, що в цьому випадку існує таке натуральне число t, що $D = V^t$ — абелева підгрупа без скруту, для якої V/D є скінченною. Оскільки і U/V є скінченною, то U/D також буде скінченною. Тепер неважко переконатись у тому, що D задовольняє умови 1, 2.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай* G — *неперіодична локально майже розв'язна група, що містить нескінченну періодичну підгрупу. Також припустимо, що центр* G *не містить квазіциклічних підгруп. Якщо* G — *анти* PC*-група і комутант* G *не є майже поліциклічним, то* G *містить таку нормальну квазіциклічну підгрупу* D, *що* G/D — *майже поліциклічна група.*

Доведення. З леми 3 випливає, що G містить таку нормальну квазіциклічну підгрупу D, що $[G/D, G/D]$ є майже поліциклічним. Оскільки центр G

не містить D, то знайдеться елемент $g \in G$, для якого $[g, D] \neq \langle 1 \rangle$. Якщо припустимо, що $[g, D] \neq D$, то підгрупа $[g, D]$ є скінченною. Це обумовлює скінченність комутанта підгрупи $\langle D, g \rangle$, зокрема ця підгрупа буде FC-групою. У цьому випадку її центр містить кожну подільну підгрупу. Отримана суперечність доводить рівність $[g, D] = D$. Покладемо $C/D = C_{G/D}(gD)$, і нехай $x \in C$. Тоді $g^x = gy$ для деякого елемента $y \in D$. З рівності $D = [g, D]$ отримуємо $y = [g, u]$ для деякого $u \in D$. Тепер

$$g^x = gy = g[g, u] = g^u,$$

а звідси випливає співвідношення $xu^{-1} \in C_G(g)$, яке доводить рівність $C = DC_G(g)$. З вибору g випливає $D \cap C_G(g) \neq D$, а це доводить скінченність $D \cap C_G(g)$. Нехай $E = C_G(g)$ і не є майже поліциклічною. З наслідку 1 пропозиції 2 випливає, що $[G, G]$ буде майже поліциклічною підгрупою. Ця суперечність доводить, що E буде майже поліциклічною. Оскільки $[G/D, G/D]$ є майже поліциклічною підгрупою, то з леми 1.4 роботи [7] випливає, що фактор-група $(G/D)C_{G/D}\left(\langle gD \rangle^{G/D}\right)$ буде майже поліциклічною. Очевидне включення $C/D \leq C_{G/D}\left(\langle gD \rangle^{G/D}\right)$ разом з доведеним вище фактом про те, що C/D є майже поліциклічною, доводить, що і G/D буде майже поліциклічною.

Лему 4 доведено.

Лема 5. *Нехай G — неперіодична майже розв'язна мінімаксна анти PC-група, комутант якої не є майже поліциклічним. Якщо центр Z групи G не є скінченнопородженим, то періодичні підгрупи фактор-групи G/Z будуть скінченними.*

Доведення. З пропозиції 3 випливає, що Z містить таку скінченнопороджену підгрупу B, що Z/B є квазіциклічною p-групою для деякого простого числа p. Припустимо, що G/Z містить нескінченну періодичну підгрупу. Оскільки G є мінімаксною, то це означає, що G/Z містить квазіциклічну q-підгрупу K/Z. З наслідку 1 пропозиції 3 випливає, що $q = p$. Але у цьому випадку K/B буде прямим добутком двох квазіциклічних підгруп, що суперечить наслідку 2 пропозиції 2. Отримана суперечність і доводить лему.

Лема 6. *Нехай G — неперіодична майже розв'язна мінімаксна анти PC-група, комутант якої не є майже поліциклічною підгрупою. Припустимо також, що центр G не є скінченнопородженим. Тоді $\zeta(G)$ містить абелеву підгрупу D, що має наступні властивості:*

1) *D є або квазіциклічною, або нескінченнопородженою групою без скруту скінченного 0-рангу r, і кожна її підгрупа, 0-ранг якої менший за r, буде скінченнопородженою;*

2) *фактор-група G/D має майже поліциклічний комутант;*

3) *періодичні підгрупи G/D є скінченними;*

4) *$\zeta(G) = D \times C$, де C — скінченнопороджена підгрупа.*

Доведення. Припустимо спочатку, що $Z = \zeta(G)$ містить нескінченні підгрупи. Тоді Z містить квазіциклічну p-підгрупу D для деякого простого числа p. Маємо $Z = D \times C$ для деякої підгрупи C (див., наприклад, [13], теорема 21.2). З пропозиції 3 випливає, що C є скінченнопородженою. З леми 5 отримуємо, що періодичні підгрупи G/D будуть скінченними. З леми 2 видно, що G/D має майже поліциклічний комутант.

Припустимо тепер, що періодичні підгрупи Z будуть скінченними. Зокрема, $\mathbf{P}(Z)$ є скінченною і тому $Z = \mathbf{P}(Z) \times L$ для деякої підгрупи L, що не має скруту. Нехай $\mathbf{M}$ — множина всіх підгруп L, що не є скінченнопородженими. Виберемо у системі $\mathbf{M}$ підгрупу A найменшого можливого 0-рангу. Нехай $\boldsymbol{r}_0(A) = r$. Тоді будь-яка підгрупа A, що має менший ранг, є скінченнопородженою. З пропозиції 3 випливає, що A містить таку скінченнопороджену підгрупу B, що A/B є квазіциклічною p-групою для деякого простого числа p. Маємо $L/B = A/B \times U/B$ для деякої підгрупи U/B (див., наприклад, [13], теорема 21.2). Покладемо $Y/B = \mathbf{P}(U/B)$. Тоді U/Y є скінченнопородженою абелевою групою без скруту, зокрема вона буде вільною абелевою. Звідси випливає, що $U = Y \times V$ для деякої підгрупи V (див., наприклад, [13], теорема 14.6). З рівності $L = AU$ отримуємо $L = (AY)V$. Далі

$$(AY) \bigcap V = (AY) \bigcap U \bigcap V = \big(Y(A \bigcap U)\big) \bigcap V =$$

$$= (YB) \bigcap V = Y \bigcap V = \langle 1 \rangle .$$

Таким чином, $L = (AY) \times V$. Оскільки Y/B є скінченною та $AY/B = A/B \times \times Y/B$, то $\boldsymbol{r}_0(AY) = r$ і будь-яка підгрупа AY, що має менший ранг, є скінченнопородженою. Покладемо $D = AY$. З рівності $Z = \mathbf{P}(Z) \times L$ отримуємо $Z = \big(\mathbf{P}(Z) \times V\big) \times D$, де $C = \mathbf{P}(Z) \times V$ — скінченнопороджена підгрупа. Тоді з леми 5 отримуємо, що періодичні підгрупи G/D будуть скінченними. З леми 2 випливає, що G/D має майже поліциклічний комутант.

Лему 6 доведено.

Лема 7. *Нехай G — мінімаксна група, що має майже поліциклічний комутант. Припустимо, що кожна періодична підгрупа G є скінченною. Тоді G є добутком двох нормальних підгруп A та L, де L/D — майже поліциклічна, а A — абелева підгрупа без скруту.*

Доведення. Нехай $K = [G, G]$. В абелевій фактор-групі G/K вибираємо таку скінченнопороджену підгрупу F/K, що G/F буде періодичною. Очевидно, F — нормальна майже поліциклічна підгрупа G. З леми 1.4 роботи [7] випливає, що $G/C_G(F)$ — майже поліциклічна група. Нехай $C = C_G(F)$, $H = = C \bigcap F$, тоді H — скінченнопороджена підгрупа $\zeta(C)$. Оскільки C/H є абелевою, то C буде нільпотентною, а тому множина T всіх її елементів скінченного порядку буде підгрупою. З наших умов випливає, що T буде скінченною. З результатів роботи [14] випливає, що C містить нормальну підгрупу без скруту B скінченного індексу k. Покладемо $A = C^k$, тоді з включення $A \leq B$ видно, що A — характеристична в C підгрупа без скруту, що має скінченний індекс. Зокрема, A буде нормальною в G. Оскільки A нільпотентна і є розширенням абелевої підгрупи за допомогою періодичної, то A буде абелевою. Той факт, що G/C є майже поліциклічною, а C/A — скінченною, показує, що G/A буде майже поліциклічною. З іншого боку, G має майже поліциклічний комутант. Зокрема, G є PC-групою. Тому вона містить таку нормальну майже поліциклічну підгрупу L, що $G = AL$.

Лему 7 доведено.

З лем 6, 7 та наслідку 2 пропозиції 3 отримуємо таке твердження.

Наслідок. *Нехай G — неперіодична майже розв'язна мінімаксна анти PC-*

група, комутант якої не є майже поліциклічною підгрупою. Припустимо також, що центр G не є скінченнопородженим. Тоді $\zeta(G)$ містить абелеву підгрупу D, що має наступні властивості:

1) *D є або квазіциклічною, або нескінченнопородженою групою без скруту скінченного* 0-*рангу r, і кожна її підгрупа*, 0-*ранг якої менший за r, буде скінченнопородженою*;

2) *фактор-група G/D має майже поліциклічний комутант*;

3) *періодичні підгрупи G/D є скінченними*;

4) $\zeta(G) = D \times C$, *де C — скінченнопороджена підгрупа*;

5) *G/D є добутком двох нормальних підгруп A/D та L/D, де L/D — майже поліциклічна*, а *A/D — абелева мінімаксна група без скруту, у якої* $\mathbf{Sp}\,(A/D) = \{p\}$, *де* $\{p\} = \mathbf{Sp}\,(D)$.

Лема 8. *Нехай G — неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить таку квазіциклічну підгрупу D, що фактор-група G/D не має скінченної системи породжуючих елементів. Якщо G — анти PC-група і комутант G не є майже поліциклічним, то G/D має майже поліциклічний комутант і для будь-якої абелевої підгрупи A секція $A/(A \cap D)$ є скінченнопородженою.*

Доведення. Припустимо, що для деякої абелевої підгрупи A секція $A/(A \cap D)$ не є скінченнопородженою. Оскільки центр містить D, то AD — абелева підгрупа. Щоб не вводити нових позначень, будемо вважати, що $D \leq A$. З властивостей подільних підгруп абелевих груп (див., наприклад, [13], теорема 21.2) випливає розклад $A = D \times E$ для деякої підгрупи E. З нашого припущення отримуємо, що E не може бути скінченнопородженою. Але тоді з наслідку 1 пропозиції 2 випливає, що комутант групи G є майже поліциклічним. Отримана суперечність і доводить, що секція $A/(A \cap D)$ є скінченнопородженою.

Лему 8 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай G — неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить таку квазіциклічну підгрупу D, що фактор-група G/D не має скінченної системи породжуючих елементів. Якщо G — анти PC-група і комутант G не є майже поліциклічним, то G не містить таких нормальних абелевих підгруп A, що G/A є майже поліциклічною.*

Доведення. Оскільки D не є майже поліциклічною, то з наслідку леми 2 випливає, що G — майже розв'язна мінімаксна група. Припустимо, що G має абелеву нормальну підгрупу A, для якої G/A є майже поліциклічною. Оскільки D не містить власних підгруп скінченного індексу, то, враховуючи той факт, що G/A є резидуально скінченною, отримуємо включення $D \leq A$. Якщо припустити, що A/D є скінченнопородженою, то і фактор-група G/D буде скінченнопородженою. Отже, A/D не може мати скінченної системи породжуючих елементів. Однак це суперечить лемі 8.

Наслідок доведено.

***Наслідок* 2.** *Нехай G — неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить таку квазіциклічну підгрупу D, що фактор-група G/D не має скінченної системи породжуючих елементів. Якщо G — анти PC-група і комутант G не є майже поліциклічним, то для будь-якої PC-підгрупи A секція $A/(A \cap D)$ буде скінченнопородженою.*

Доведення. Припустимо, що для деякої PC-підгрупи A секція $A/(A \cap D)$ не є скінченнопородженою. Оскільки центр містить D, то AD — PC-підгрупа.

Щоб не вводити нових позначень, можна вважати, що $D \leq A$. Оскільки D не є майже поліциклічною, то з леми 2 отримуємо, що G/D має майже поліциклічний комутант. Оскільки A — PC-група, то кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближеною до нормальної. З теореми 2.3 роботи [7] випливає, що $K = [A, A]$ є майже поліциклічною групою. З властивостей подільних підгруп абелевих груп (див., наприклад, [13], теорема 21.2) випливає розклад $A/K = DK/K \times E/K$ для деякої підгрупи E. З нашого припущення отримуємо, що E не може бути скінченнопородженою. Але тоді з наслідку 1 пропозиції 2 випливає, що комутант групи G буде майже поліциклічною підгрупою. Отримана суперечність доводить твердження.

***Наслідок* 3.** *Нехай G — неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить таку квазіциклічну підгрупу D, що фактор-група G/D не має скінченної системи породжуючих елементів. Якщо G — анти PC-група і комутант G не є майже поліциклічним, то фактор-група $G/\boldsymbol{PC}(G)$ не є майже поліциклічною.*

Доведення. Як і раніше, переконуємось, що G — майже розв'язна мінімаксна група. Припустимо, що $G/\boldsymbol{PC}(G)$ є майже поліциклічною. Оскільки D не містить власних підгруп скінченного індексу, то, враховуючи той факт, що $G/\boldsymbol{PC}(G)$ є резидуально скінченною, отримуємо включення $D \leq \boldsymbol{PC}(G)$. Якщо припустити, що $\boldsymbol{PC}(G)/D$ є скінченнопородженою, то і фактор-група G/D буде скінченнопородженою. Отже, $\boldsymbol{PC}(G)/D$ не може мати скінченної системи породжуючих елементів. Однак це суперечить наслідку 2.

Наслідок 3 доведено.

***Наслідок* 4.** *Нехай G — неперіодична локально майже розв'язна група, центр якої містить таку квазіциклічну підгрупу D, що фактор-група G/D не має скінченної системи породжуючих елементів. Якщо G — анти PC-група і комутант G не є майже поліциклічним, то кожна підгрупа G, що не має скінченної системи породжуючих елементів, містить D.*

Доведення. Оскільки D не є майже поліциклічною, то з леми 2 отримуємо, що G/D має майже поліциклічний комутант. Нехай H — підгрупа, що не має скінченної системи породжуючих елементів. Припустимо, що H не містить D. Це означає скінченність перетину $H \cap D$. З наслідку 1 пропозиції 2 випливає, що комутант групи G є майже поліциклічним. Отримана суперечність доводить, що перетин $H \cap D$ повинен бути нескінченним. Але тоді $H \cap D = D$, тобто $D \leq H$.

Наслідок 4 доведено.

Тепер вже можна об'єднати отримані вище результати та завершити у загальних рисах розгляд випадку, коли група містить нескінченні періодичні підгрупи.

Теорема 2. *Нехай G — неперіодична узагальнено радикальна група, яка містить нескінченну періодичну підгрупу. Група G буде анти PC-групою тоді і тільки тоді, коли*:

1) *G — група, всі підгрупи якої поліциклічно наближені до нормальних; зокрема, вона має майже поліциклічний комутант*;

2) *G містить таку нормальну в G квазіциклічну підгрупу D, що G/D є майже поліциклічною*;

3) *G задовольняє наступні умови*:

3A) *центр групи G містить таку квазіциклічну підгрупу D, що G/D не містить нескінченних періодичних підгруп*;

3B) $[G/D, G/D] = K/D$ — *майже поліциклічна підгрупа*;

3C) G/D *є добутком двох нормальних підгруп* A/D *та* L/D, *де* L/D — *майже поліциклічна, а* A/D — *абелева група без скруту, у якої* $\mathbf{Sp}(A/D) = \{p\}$, *де* $\{p\} = \Pi(D)$;

3D) *якщо* A — PC-*підгрупа групи* G, *то* $A/(A \cap D)$ *буде скінченнопородженою; зокрема, кожна підгрупа* G, *що не має скінченної системи породжуючих елементів, містить* D.

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що комутант групи G не є майже поліциклічною підгрупою. З теореми 2.3 роботи [7] випливає, що G — майже розв'язна мінімаксна група. Якщо центр G не містить квазіциклічних підгруп, то на підставі леми 4 G — група типу 2. Припустимо тепер, що центр групи G містить квазіциклічну підгрупу D. Оскільки D не є майже поліциклічною, то з леми 2 отримуємо, що G/D має майже поліциклічний комутант K/D. Твердження 3C) випливає з леми 7, а твердження 3D) — з наслідків 2, 4 леми 8.

Достатність. Нехай G — група типу 2, 3 і H — підгрупа G, яка не є майже поліциклічною. Розглянемо спочатку випадок, коли G — група типу 2. Оскільки G/D є скінченнопородженою, то перетин $H \cap D$ не може бути скінченним. Тоді $H \cap D = D$, тобто $D \leq H$. Але фактор-група G/D є майже поліциклічною, зокрема підгрупа H майже поліциклічно наближена до нормальної в D. Нарешті, нехай G — група типу 3. Припустимо, що H не містить D. Тоді перетин $H \cap D$ буде скінченним. Із співвідношень $H/(H \cap D) \cong (HD)/D$ і того факту, що G/D має майже поліциклічний комутант, випливає, що і H має майже поліциклічний комутант. Зокрема, H — PC-підгрупа. Скінченність $H \cap D$ обумовлює той факт, що $H/(H \cap D)$ не має скінченної системи породжуючих елементів, а це суперечить умові 3D). Отримана суперечність доводить включення $D \leq H$. Тепер знову слід відмітити, що в G/D кожна підгрупа є майже поліциклічно наближеною до нормальної, і, отже, H буде майже поліциклічно наближеною до нормальної в G.

Теорему 2 доведено.

Зазначимо, що один із прикладів груп останнього типу даної теореми було побудовано в роботі [20].

Наступний заключний етап — це розгляд випадку, коли всі періодичні підгрупи будуть скінченними. Очевидно, вивчення цих груп є можливим з точністю до скінченних нормальних підгруп, тобто ми повинні лише описати будову фактор-групи $G/\boldsymbol{P}(G)$. Інакше кажучи, дали будемо вважати, що $\boldsymbol{P}(G) = \langle 1 \rangle$.

Нехай G — група, A — її абелева нормальна підгрупа. Будемо говорити, що A є *раціонально* G-*незвідною*, якщо для кожної її неодиничної G-інваріантної підгрупи B фактор-група A/B є періодичною.

Теорема 3. *Нехай* G — *неперіодична майже розв'язна мінімаксна група, у якої* $\boldsymbol{P}(G) = \langle 1 \rangle$. *Якщо* G *є анти* PC-*групою, то*:

1) G — *група, всі підгрупи якої поліциклічно наближені до нормальних; зокрема, вона має майже поліциклічний комутант*;

2) G *задовольняє наступні умови*:

2A) *містить таку нормальну абелеву нескінченнопороджену підгрупу* G *без скруту, що* G/D *є майже поліциклічною*;

2B) *якщо* U — *підгрупа* G, *що не має скінченної множини породжуючих, то* $U \cap D$ *також не має скінченної множини породжуючих*;

3) G *задовольняє наступні умови*:

3A) *містить таку нормальну абелеву нескінченнопороджену підгрупу* D *без скруту, що* G/D *є добутком двох нормальних підгруп* A/D *та* Q/D, *де* Q/D *— майже поліциклічна, а* A/D *— абелева мінімаксна група без скруту*;

3B) *якщо* U *— підгрупа* G, *що не має скінченної множини породжуючих, то* $U \bigcap D$ *також не має скінченної множини породжуючих.*

Доведення. Припустимо, що комутант групи G не є майже поліциклічною підгрупою. Тоді група G містить нормальну нільпотентну підгрупу L, для якої G/L є майже абелевою та скінченнопородженою [15]. З умов теореми випливає, що L не має скруту. З наслідку 1 леми 2.6 роботи [18] випливає, що її центр $\zeta(L)$ не має скінченної системи породжуючих елементів. У підгрупі $\zeta(L)$ вибираємо сервантну G-інваріантну нескінченнопороджену підгрупу C найменшого можливого 0-рангу.

Якщо фактор-група G/C є скінченнопородженою, то отримуємо групу типу 2. Отже, залишається розглянути випадок, коли G/C не має скінченної системи породжуючих елементів. Оскільки C не є майже поліциклічною, то з леми 2 випливає, що G/C має майже поліциклічний комутант K/C. В абелевій фактор-групі G/K вибираємо таку скінченнопороджену підгрупу F/K, що G/F буде вже періодичною. Очевидно, F/C — нормальна майже поліциклічна підгрупа G/C. З леми 1.4 роботи [7] випливає, що $(G/C)/C_{G/C}(F/C)$ — майже поліциклічна група. Нехай $Z/C = (G/C)/C_{G/C}(F/C)$, $H/C = Z/C \bigcap \bigcap F/C$, тоді H/C — скінченнопороджена підгрупа $\zeta(Z/C)$. З того факту, що G/C не має скінченної системи породжуючих елементів, отримуємо, що те ж саме має місце і для Z/C. Оскільки Z/H є абелевою, то Z/C буде нільпотентною, а тому множина T/C всіх її елементів скінченного порядку буде підгрупою. Зазначимо, що фактор-група $T/C_T(C)$ буде скінченною (див., наприклад, [16], теорема 9.33). Нехай $D = C_T(C)$. Враховуючи рівність $\boldsymbol{P}(G) = \langle 1 \rangle$ та узагальнення теореми Шура (див., наприклад, [17], наслідок теореми 4.12), отримуємо, що D — абелева підгрупа. Знову Z/D містить нормальну підгрупу B/D скінченного індексу k, вільну від скруту [14]. Покладемо $A/D = (Z/D)^k$, тоді з включення $A/D \leq B/D$ можна побачити, що A/D — характеристична в Z/D підгрупа без скруту, що має скінченний індекс. Зокрема, A/D є нормальною в G/D. Оскільки група A/D нільпотентна і є розширенням абелевої підгрупи за допомогою періодичної, то A/D теж буде абелевою. Той факт, що G/Z є майже поліциклічною, а Z/A — скінченною, показує, що G/A буде майже поліциклічною. З іншого боку, ми вже бачили, що G/D має майже поліциклічний комутант. Зокрема, G/D є PC-групою. Тому вона містить у собі таку нормальну майже поліциклічну підгрупу Q/D, що $G/D = (A/D)(Q/D)$.

Нехай U — підгрупа G, що не має скінченної множини породжуючих. Із пропозиції 2 випливає, що перетин $U \bigcap D$ не має скінченної множини породжуючих елементів.

Теорему 3 доведено.

Лема 9. *Нехай* G *— неперіодична майже розв'язна мінімаксна анти* PC*-група, комутант якої не є майже поліциклічною підгрупою. Припустимо також, що центр* G *містить нескінченнопороджену підгрупу* D *без скруту скінченного* 0*-рангу* r, *кожна підгрупа якої, що має* 0*-ранг менший за* r, *буде скінченнопородженою. Тоді*:

1) *якщо* A — *PC-підгрупа* G, *то* $A/(A \cap D)$ *буде скінченнопородженою*;

2) *якщо* U — *підгрупа* G, *що не має скінченної системи породжуючих елементів*, *то* $U \cap D$ *має скінченний індекс в* D.

Доведення. Із пропозиції 3 видно, що D містить таку скінченнопороджену підгрупу B, що D/B — квазіциклічна p-група. Оскільки A — PC-група, то кожна її підгрупа є майже поліциклічно наближеною до нормальної. З теореми 2.3 роботи [7] випливає, що $K = [A, A]$ є майже поліциклічною підгрупою. Зокрема, підгрупа KB буде скінченнопородженою і, отже, DK/BK буде квазіциклічною p-групою. Тоді $AD/BK = DK/BK \times C/BK$ для деякої підгрупи C (див., наприклад, [13], теорема 21.2). З наслідку 2 пропозиції 2 видно, що C/BK, а отже і підгрупа C, є скінченнопородженою. Ізоморфізм $AD/DK \cong \cong (AD/BK)/(DK/BK)$ показує, що AD/DK буде скінченнопородженою. Тоді фактор-група $A/(A \cap D) \cong AD/D$, як розширення скінченнопородженої підгрупи $DK/D \cong K/(K \cap D)$ за допомогою скінченнопородженої групи AD/DK, також буде скінченнопородженою.

За наслідком 1 пропозиції 2 перетин $U \cap D$ повинен бути нескінченнопородженою підгрупою. З наших умов відносно D випливає, що $r_0(D) = = r_0(U \cap D)$. Це означає, що фактор-група $D/(U \cap D)$ є періодичною. З іншого боку, $(U \cap D)B/B$ — нескінченнопороджена підгрупа квазіциклічної p-групи D/B. Це обумовлює рівність $(U \cap D)B/B = D/B$ або $(U \cap D)B = D$. Отже, $D/(U \cap D)$ є періодичною і скінченнопородженою, а тому скінченною.

Для деяких окремих випадків доведену вище теорему можна деталізувати. Зокрема, має місце така теорема.

Теорема 4. *Нехай* G — *неперіодична майже розв'язна мінімаксна група*, *у якої* $\boldsymbol{P}(G) = \langle 1 \rangle$. *Припустимо також*, *що* $\zeta(G)$ *не має скінченної системи породжуючих елементів*. *Група* G *буде анти* PC*-групою тоді і тільки тоді*, *коли*:

1) G — *група*, *всі підгрупи якої поліциклічно наближені до нормальних*; *зокрема*, *вона має майже поліциклічний комутант*;

2) G *задовольняє наступні умови*:

2A) $\zeta(G)$ *містить нескінченнопороджену підгрупу* D *без скруту скінченного* 0*-рангу* r, *і кожна її підгрупа*, 0*-ранг якої менший за* r, *буде скінченнопородженою*;

2B) *фактор-група* G/D *має майже поліциклічний комутант*;

2C) *періодичні підгрупи* G/D *є скінченними*;

2D) $\zeta(G) = D \times C$, *де* C — *скінченнопороджена підгрупа*;

2E) G/D *є добутком двох нормальних підгруп* A/D *та* L/D, *де* L/D — *майже поліциклічна*, *а* A/D — *абелева мінімаксна група без скруту*, *у якої* $\mathbf{Sp}(A/D) = \{p\}$, *де* $\{p\} = \mathbf{Sp}(D)$;

2F) *якщо* A — *PC-група* G, *то* $A/(A \cap D)$ *буде скінченнопородженою*;

2G) *якщо* U — *підгрупа* G, *що не має скінченної системи породжуючих елементів*, *то* $U \cap D$ *має скінченний індекс в* D.

Доведення. *Необхідність* випливає з наслідку леми 7 та леми 9.

Достатність доводиться за допомогою легкої модифікації аргументів, які використовувались при доведенні достатності теореми 2.

Зазначимо, що один із прикладів груп останнього типу даної теореми було побудовано в роботі [21].

1. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. – 1955. – **63**, № 1. – S. 76 – 96.
2. *Курдаченко Л. А., Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Групи з щільною системою нескінченних підгруп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 3. – С. 7 – 9.
3. *Franciosi S., de Giovanni F.* Groups satisfying the minimal condition on certain non-normal subgroups // "Groups – Korea 94". – Berlin: Walter de Guyter, 1995. – P. 107 – 118.
4. *Galoppo A.* Groups satisfying the maximal condition on non-nearly normal subgroups // Ric. mat. – 2000. – **49**, № 2. – P. 213 – 220.
5. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* Groups with restrictions on non-subnormal subgroups // Ibid. – 1997. – **46**, № 2. – P. 307 – 320.
6. *Musella C.* Isomorphisms between lattices of nearly normal subgroups // Note mat. – 2000/2001. – **20**, № 1. – P. 43 – 52.
7. *Пискун М. М.* О строении групп с некоторыми системами подгрупп, близких к нормальным // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 7. – С. 24 – 34.
8. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. – Basel: Birkhäuser, 2007. – 245 p.
9. *Половицкий Я. Д.* Локально экстремальные и слойно экстремальные группы // Мат. сб. – 1962. – **58**, № 2. – С. 685 – 694.
10. *Franciosi S., de Giovanni F., Tomkinson M. J.* Groups with polycyclic-by-finite conjugacy classes // Boll. Unione mat. ital. – 1990. – **4B**, № 7. – P. 35 – 55.
11. *Kurdachenko L. A., Otal J., Soules P.* Groups with polycyclic-by-finite conjugate classes of subgroups // Communs Algebra. – 2004. – **32**, № 12. – P. 4769 – 4784.
12. *Kugel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.
13. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2 т. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 336 с.
14. *Зайцев Д. И.* К теории минимаксных групп // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 652 – 660.
15. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 3. – С. 567 – 588.
16. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Berlin: Springer, 1973. – 229 p.
17. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups: Pt 1. – Berlin: Springer, 1972. – 210 p.
18. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А., Тушев А. В.* Модули над нильпотентными группами конечного ранга // Алгебра и логика. – 1971. – **24**, № 6. – С. 631 – 666.
19. *Baer R.* Polyminimaxgruppen. // Math. Ann.– 1968. – **175**, № 1. – S. 1 – 43.
20. *Cutolo G.* On groups satisfying the maximal condition on non-normal subgroups // Riv. mat. pura ed appl. – 1991. – **9**. – P. 49 – 59.
21. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A.* On groups with many almost normal subgroups // Ann. mat. pura ed appl. – 1991. – **169**, № 1. – P. 35 – 65.

Одержано 05.12.07,
після доопрацювання — 01.07.09