УДК 517.5

А. Л. Шидліч (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОРЯДКОВІ РІВНОСТІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ОЦІНОК НАЙКРАЩИХ n-ЧЛЕННИХ НАБЛИЖЕНЬ ТА ПОПЕРЕЧНИКІВ

For $n \to \infty$, we investigate the behavior of functionals having the form $\sup\limits_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l} \dfrac{1}{\psi^r(k)}\right)^{-1/r}$, where ψ is some positive function. The obtained results are used to establish exact orders equaliities as $n \to \infty$ for quantities of the best n-term approximations of q-ellipsoids in metrics of spaces S^p_φ. We also consider applications of the results obtained in finding exact orders of Kolmogorov's widths of octahedrons in the Hilbert space.

Исследуется поведение при $n \to \infty$ функционалов вида $\sup\limits_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l} \dfrac{1}{\psi^r(k)}\right)^{-1/r}$, где ψ — некоторая положительная функция. Полученные результаты применяются к нахождению точных порядковых при $n \to \infty$ равенств для величин наилучших n-членных приближений q-еллипсоидов в метриках пространств S^p_φ. Рассматриваются также применения полученных результатов к нахождению точных порядков поперечников по Колмогорову октаэдров в гильбертовом пространстве.

1. Вступ. Нехай H — дійсний гільбертів простір з ортонормованим базисом $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$; $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна послідовність дійсних чисел. Октаедром O_α називається опукла оболонка векторів $\pm\alpha_1 e_1, \pm\alpha_2 e_2, \ldots, \pm\alpha_k e_k, \ldots$.

Нехай, далі,

$$d_n(\mathfrak{M}; Y) = \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F_n} \|x - u\|_Y$$

— поперечник за Колмогоровим центрально-симетричної множини $\mathfrak{M}$ у лінійному нормованому просторі Y з нормою $\|\cdot\|_Y$. В останньому співвідношенні $\mathcal{F}_n$ — множина всіх підпросторів F_n розмірності $n \in \mathbb{N}$ простору Y.

У 1973 р. Л. Б. Софман [1] (див. також [2, 3], гл. VI) показав, що якщо послідовність α така, що $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, то

$$d_n(O_\alpha, H) = \sup_{l>n} \sqrt{\frac{l-n}{\sum_{i=1}^{l} \bar{\alpha}_i^{-2}}}, \tag{1.1}$$

де $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — спадна перестановка послідовності $|\alpha_k|$.

Нехай тепер $\psi = \{\psi(k)\}_{k=1}^{\infty}$ — довільна незростаюча послідовність додатних чисел, $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Розглянемо функціонал $G_n(\psi, r)$ вигляду

$$G_n(\psi, r) := \sup_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)}\right)^{-1/r}, \quad r \in (0, 1]. \tag{1.2}$$

Тоді розв'язок даної задачі про поперечник за Колмогоровим октаедра в гільбертовому просторі можна виразити в термінах величин $G_n(\psi; r)$ таким чином:

$$d_n(O_\alpha, H) = \sqrt{G_n(\psi, 1)}, \tag{1.3}$$

де $\psi(k) = \bar{\alpha}_k^2$.

У термінах величин $G_n(\psi, r)$ також виражаються розв'язки низки інших екстремальних задач. Зокрема, Фан Генсун і Кієн Ліксін [4] в термінах функціоналів вигляду (1.2) сформулювали точні значення гельфандівських, інформаційних та деяких інших поперечників певних функціональних класів. О. І. Степанець у роботах [5, 6] та [7] (гл. XI) у термінах таких функціоналів встановив точні значення найкращих n-членних наближень q-еліпсоїдів у просторах S_φ^p, $0 < q \le p$. Тому актуальною, на думку автора, є задача про знаходження точних порядкових при $n \to \infty$ рівностей для величин $G_n(\psi, r)$.

При розгляді даної задачі будемо використовувати розвинений О. І. Степанцем та його учнями апарат дослідження, який базується на наступній класифікації опуклих функцій.

Будемо вважати послідовності $\psi(\cdot)$ слідом на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \in [1, \infty)$, які задовольняють умову $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$. Множину всіх таких функцій будемо позначати через $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = \Big\{\psi(t)\colon \psi(t) > 0,\ \ \psi(t_1) - 2\psi((t_1 + t_2)/2) + \psi(t_2) \ge 0$$
$$\forall t_1, t_2 \in [1, \infty),\ \ \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\Big\}.$$

Множина $\mathfrak{M}$ досить неоднорідна за швидкістю прямування її елементів до нуля при $t \to \infty$: функції $\psi(t)$ можуть спадати як дуже повільно, так і дуже швидко. Тому виникає необхідність розбиття множини $\mathfrak{M}$ на підмножини, що об'єднують функції $\psi \in \mathfrak{M}$, які в певному сенсі мають однаковий характер прямування до нуля.

Наслідуючи О. І. Степанця [8, с. 159] (див. також [9]), в ролі характеристики, за допомогою якої зручно проводити таке розбиття, використаємо пару функцій $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ і $\mu(t) = \mu(\psi; t)$, які визначаються таким чином. Нехай $\psi \in \mathfrak{M}$, тоді через $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ позначають функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \ge 1. \tag{1.4}$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ функція $\eta(t)$ для всіх $t \ge 1$ з (1.4) визначається однозначно:

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right).$$

Функція $\mu(t)$ задається рівністю

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

В залежності від поведінки функції μ прийнято (див., наприклад, [8, с. 159; 9]) розрізняти такі підмножини множини $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M}_0 = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < \mu(\psi; t) \le K \ \ \forall t \ge 1\big\},$$
$$\mathfrak{M}_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K \le \mu(\psi; t) < \infty \ \ \forall t \ge 1\big\},$$

$$\mathfrak{M}_C = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon 0 < K_1 \le \mu(\psi;t) \le K_2 \ \ \forall t \ge 1\big\},$$

де, як і далі, K, $K_1, \ldots$ — деякі додатні сталі, що не залежать від параметра t.

Через $\mathfrak{M}_0^+$ позначають підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi;t)$ при $t \to \infty$ монотонно прямує до нуля:

$$\mathfrak{M}_0^+ = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon \mu(\psi;t) \downarrow 0\big\},$$

а через $\mathfrak{M}_\infty^+$ — підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\mu(\psi;t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_\infty^+ = \big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon \mu(\psi;t) \uparrow \infty\big\}.$$

У випадку, коли функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_0$, порядки величин $G_n(\psi,r)$ при всіх $r \in (0,1]$ отримано в роботі [10] (див. також [11] (підрозділ 10)). У даній роботі вивчається випадок, коли функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$. При цьому розглядаються такі підмножини цієї множини:

$$\mathfrak{M}'_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+\colon \alpha(\psi;t) \downarrow 0, \ \ \psi(t)/|\psi'(t)| \uparrow \infty\big\}, \qquad (1.5)$$

де

$$\alpha(t) := \alpha(\psi;t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}, \quad \psi'(t) := \psi'(t+),$$

$$\mathfrak{M}^c_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+\colon \alpha(\psi;t) \downarrow 0, \ \ 0 < K_1 < \psi(t)/|\psi'(t)| < K_2 < \infty\big\} \qquad (1.6)$$

і

$$\mathfrak{M}''_\infty = \big\{\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+\colon \psi(t)/|\psi'(t)| \downarrow 0\big\}. \qquad (1.7)$$

Зазначимо, що природними представниками множин $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^c_\infty$ і $\mathfrak{M}''_\infty$ є функції $\exp(-\beta t^s)$, $\beta > 0$, у випадках, коли $s \in (0,1)$, $s = 1$ та $s > 1$ відповідно.

2. Основними результатами роботи є такі твердження.

Теорема 2.1. *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$, а величина $G_n(\psi;r)$ означається рівністю* (1.2), *то для будь-якого $r \in (0,1]$ справджується порядкова при $n \to \infty$ рівність*

$$G_n(\psi;r) \asymp \frac{\psi(n+1)}{(\eta(\psi;n) - n)^{1/r-1}}. \qquad (2.1)$$

Тут і далі під виразом „$a(n) \asymp b(n)$ при $n \to \infty$" розуміється, що існують сталі K_1 та K_2, $0 < K_1 < K_2$, такі, що при всіх n, більших за деяке число n_0, виконується нерівність

$$K_1 a(n) \le b(n) \le K_2 a(n).$$

Теорема 2.2. *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}^c_\infty$ або $\mathfrak{M}''_\infty$, а величина $G_n(\psi;r)$ означається рівністю* (1.2), *то для будь-якого $r \in (0,1]$ справджується порядкова при $n \to \infty$ рівність*

$$G_n(\psi;r) \asymp \psi(n+1). \qquad (2.2)$$

З теорем 2.1 та 2.2 з урахуванням співвідношення (1.3) отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 2.1.** *Нехай послідовність* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що при довільному* $k \in \mathbb{N}$ $\bar{\alpha}_k^2 = \psi(k)$, *де* ψ — *деяка функція з множини* $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^c_\infty$ *або* $\mathfrak{M}''_\infty$. *Тоді має місце порядкова при* $n \to \infty$ *рівність*

$$d_n(O_\alpha, H) \asymp \bar{\alpha}_{n+1},$$

де $\bar{\alpha} = \{\bar{\alpha}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *спадна перестановка послідовності* $|\alpha_k|$.

При $r \in (1, \infty)$ функціонали $G_n(\psi, r)$ задаються рівністю

$$G_n(\psi, r) := \left((l^* - n)^s \left(\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)} \right)^{-s/r} + \sum_{k=l^*+1}^{\infty} \psi^{\,s}(k) \right)^{1/s}, \tag{2.3}$$

де $r \in (1, \infty)$, $1/r + 1/s = 1$, а число $l^* = l^*(n)$ визначається співвідношенням

$$\psi^{-r}(l^*) \leq \frac{1}{l^* - n} \sum_{k=1}^{l^*} \psi^{-r}(k) < \psi^{-r}(l^* + 1). \tag{2.4}$$

При цьому припускаємо, що

$$\|\psi\|_{l_s} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \psi^s(k) \right)^{1/s} < +\infty. \tag{2.5}$$

Слід зазначити, що якщо в термінах величин вигляду (1.2) в роботах [5, 6] сформульовано точні значення найкращих n-членних наближень q-еліпсоїдів у просторах S^p_φ при $r = \dfrac{q}{p} \in (0, 1]$, то в термінах величин вигляду (2.3) в [7] (гл. XI) сформульовано точні значення цих величин у випадку, коли $r = \dfrac{q}{p} \in (1, \infty)$.

Зазначимо також, що якщо $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$, то (див., наприклад, [10, с. 535]) для довільного $r > 0$ знайдеться число $K > 0$ таке, що для будь-якого $t \geq 1$

$$\psi(t) \leq K t^{-r}.$$

Тому для будь-якої функції $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ ряд у правій частині співвідношення (2.5) збігається, і, отже, величини $G_n(\psi, r)$ мають сенс.

Сформулюємо аналоги теорем 2.1 та 2.2 для величин вигляду (2.3). Як і в цих теоремах, будемо вибирати функції ψ з підмножин $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^c_\infty$ та $\mathfrak{M}''_\infty$ множини $\mathfrak{M}^+_\infty$.

Теорема 2.3. *Якщо функція* ψ *належить множині* $\mathfrak{M}'_\infty$, *а величина* $G_n(\psi; r)$ *означається рівністю* (2.3), *то для будь-якого* $r \in (1, \infty)$ *справджується порядкова при* $n \to \infty$ *рівність*

$$G_n(\psi; r) \asymp \psi(n+1)(\eta(\psi; n) - n)^{1-1/r}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.4. *Якщо функція* ψ *належить множині* $\mathfrak{M}^c_\infty$ *або* $\mathfrak{M}''_\infty$, *а величина* $G_n(\psi; r)$ *означається рівністю* (2.3), *то для будь-якого* $r \in (1, \infty)$ *справджується порядкова при* $n \to \infty$ *рівність*

$$G_n(\psi; r) \asymp \psi(n+1). \tag{2.7}$$

3. Застосування отриманих результатів до оцінок найкращих n-членних наближень q-еліпсоїдів у просторах S^p_φ. Як вже зазначалось, у термінах величин $G_n(\psi, r)$ виражаються розв'язки низки відомих екстремальних задач. Тому отримані порядкові рівності для цих величин можна використати і при знаходженні порядків таких розв'язків. Як приклад таких застосувань знайдемо точні порядкові рівності для величин найкращих n-членних наближень q-еліпсоїдів у просторах S^p_φ.

Нехай $\mathfrak{X}$ — деякий лінійний комплексний простір, $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — фіксована зліченна лінійно незалежна система в ньому і будь-якій парі $x, y \in \mathfrak{X}$, в якій хоча б один із елементів належить до φ, поставлено у відповідність число (x, y) так, що виконуються умови:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, де $\overline{z}$ — число, комплексно-спряжене з z;
2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — довільні числа;
3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Тобто визначено скалярний добуток елементів простору $\mathfrak{X}$ на елементи системи φ.

Кожному елементу $x \in \mathfrak{X}$ ставиться у відповідність система чисел $\widehat{x}_\varphi(k)$ таких, що

$$\widehat{x}_\varphi(k) = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad k \in \mathbb{N},$$

і при даному фіксованому $p \in (0, \infty)$ розглядають множини

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathfrak{X}) := \left\{ x \in \mathfrak{X} \colon \sum_{k=1}^\infty \left| \widehat{x}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}. \tag{3.1}$$

При цьому елементи $x, y \in S^p_\varphi$ вважаються тотожними, якщо для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\widehat{x}_\varphi(k) = \widehat{y}_\varphi(k)$.

Нульовим елементом простору S^p_φ називається елемент θ, для якого $\widehat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всіх $k \in \mathbb{N}$. Величина

$$\| x\|_{p,\varphi} := \left(\sum_{k=1}^\infty \left| \widehat{x}_\varphi(k) \right|^p \right)^{1/p}, \quad x \in S^p_\varphi, \tag{3.2}$$

називається φ-нормою елемента x.

Відомо (див., наприклад, [7], гл. XI), що множина S^p_φ утворює лінійний простір. При $p \geq 1$ функціонал $\|\cdot\|$, означений рівністю (3.2), задовольняє всі аксіоми норми, а при $p \in (0, 1)$ — квазінорми. Тому при $p \geq 1$ S^p_φ — лінійний нормований простір, а при $p \in (0, 1)$ — простір з квазінормою.

Простори S^p_φ були введені в 2000 р. О. І. Степанцем [12] (див. також [5, 6], [7], гл. XI). Ці простори при $p = 2$ за умови їх повноти є гільбертовими. При інших $p \in (0, \infty)$ вони наслідують низку важливих властивостей гільбертових просторів, зокрема рівність Парсеваля у вигляді рівності (3.2) та мінімальну властивість частинних сум Фур'є.

Слід також зазначити, що в окремих випадках такі простори зустрічались і раніше (див., наприклад, [13] (гл. I), [14]).

Об'єктами наближень у просторах S^p_φ є класи ψ-інтегралів всіх елементів, які належать одиничним кулям U^p_φ цих просторів. Поняття ψ-інтеграла в S^p_φ вводиться таким чином [7].

Нехай $\psi = \{\psi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — довiльна система комплексних чисел i f — деякий елемент простору S^p_φ, формальний ряд Фур'є за системою φ якого має вигляд

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k.$$

Якщо у просторi $\mathcal{X}$ iснує елемент F, для якого

$$S[F]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \widehat{f}_\varphi(k)\varphi_k,$$

тобто якщо $\widehat{F}_\varphi(k) = \psi_k \widehat{f}_\varphi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, то елемент F називають ψ-iнтегралом елемента f i записують $F = \mathcal{J}^\psi f$. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка пiдмножина з $\mathcal{X}$, то множину ψ-iнтегралiв всiх елементiв з $\mathfrak{N}$ позначають через $\psi\mathfrak{N}$. Зокрема, ψS^p_φ — множина ψ-iнтегралiв всiх елементiв, що належать до S^p_φ.

Нехай U^p_φ — одинична куля у просторi S^p_φ:

$$U^p_\varphi := \{f \in S^p_\varphi \colon \|f\|_p \le 1\}.$$

Тодi ψU^p_φ — множина ψ-iнтегралiв всiх елементiв з U^p_φ. Слiд зазначити, що коли простiр S^p_φ є повним i виконується умова

$$\psi_k \ne 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

то

$$\psi U^p_\varphi = \left\{ f \in S^p_\varphi \colon \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\widehat{f}_\varphi(k)}{\psi_k} \right|^p \le 1 \right\},$$

тобто множина ψU^p_φ є p-елiпсоїдом у просторi S^p_φ, пiвосi якого дорiвнюють $|\psi_k|$.

Нехай, далi, $n \in \mathbb{N}$, γ_n — довiльний набiр iз n натуральних чисел i

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k,$$

де α_k — деякi комплекснi числа.

Розглянемо наступнi величини:

$$e_n(f)_{\varphi,p} := \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{\varphi,p}, \quad f \in S^p_\varphi,$$

$$e_n(\mathfrak{N})_{\varphi,p} := \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_n(f)_{\varphi,p}, \quad \mathfrak{N} \subset S^p_\varphi,$$

та

$$\mathcal{D}_n(\mathfrak{N})_{\varphi,p} := \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{\alpha_k} \|f - P_{\gamma_n}\|_{\varphi,p}.$$

Величини $e_n(f)_{\varphi,p}$ та $e_n(\mathfrak{N})_{\varphi,p}$ називаються найкращим n-членним наближенням у просторi S^p_φ вiдповiдно елемента $f \in S^p_\varphi$ та множини $\mathfrak{N} \subset S^p_\varphi$. Величину $\mathcal{D}_n(\mathfrak{N})_{\varphi,p}$ називають базисним поперечником множини $\mathfrak{N}$ у просторi S^p_φ.

У випадку, коли $\mathfrak{N} = \psi U^q_\varphi$, точнi значення величин $e_n(\mathfrak{N})_{\varphi,p}$ та $\mathcal{D}_n(\mathfrak{N})_{\varphi,p}$ при всiх $0<p, q<\infty$ були знайденi О. I. Степанцем [5, 6, 15], [7] (гл. XI). Для цих значень мають мiсце наступнi твердження.

Теорема 3.1 [7] (гл. XI). *Нехай* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— система чисел, яка задовольняє умови* (3.3) *та*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k = 0, \tag{3.4}$$

p *і* q *— довільні числа такі, що* $0 < q \le p < \infty$. *Тоді при будь-якому* $n \in \mathbb{N}$ *справджуються рівності*

$$\mathcal{D}_n(\psi U_{\varphi}^q)_{\varphi,p} = \bar{\psi}_{n+1} \tag{3.5}$$

та

$$e_n^p(\psi\, U_{\varphi}^q)_{\varphi,p} = \sup_{l>n}(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l} \bar{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q} = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*} \bar{\psi}_k^{-q}\right)^{-p/q}, \tag{3.6}$$

де $\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— спадна перестановка послідовності* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$, *а* l^* *— деяке натуральне число.*

Теорема 3.2 [7] (гл. XI). *Нехай числа* p *і* q *такі, що* $0 < p < q < \infty$, $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— фіксована система комплексних чисел, для якої*

$$\|\psi\|_{l_{\frac{pq}{q-p}}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{(q-p)/pq} < \infty \tag{3.7}$$

і виконується умова (3.3). *Тоді при кожному* $n \in \mathbb{N}$ *справджуються рівності*

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U_{\varphi}^q)_{\varphi,p} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{\psi}_k^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{(q-p)/p\,q} \tag{3.8}$$

та

$$e_n^p(\psi\, U_{\varphi}^q)_{\varphi,p} = \bar{\sigma}_1^{-p/q}\left[(l^*-n)^{\frac{q}{q-p}} + \bar{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}\,\bar{\sigma}_2\right]^{(q-p)/q}, \tag{3.9}$$

де

$$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_1(l^*) = \sum_{k=1}^{l^*} \bar{\psi}_k^{-q}, \qquad \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_2(l^*) = \sum_{k=l^*+1}^{\infty} \bar{\psi}_k^{pq/(q-p)},$$

$\bar{\psi} = \{\bar{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— спадна перестановка послідовності* $\{|\psi_k|\}_{k=1}^{\infty}$, *а число* l^* *вибрано з умови*

$$\bar{\psi}_{l^*}^{-q} \le \frac{1}{l^*-n}\sum_{k=1}^{l^*} \bar{\psi}_k^{-q} < \bar{\psi}_{l^*+1}^{-q}.$$

Таке число l^* *завжди існує і єдине.*

Зауважимо, що умови (3.4) та (3.7) забезпечують у відповідних випадках вкладення $\psi U_{\varphi}^q \subset S_{\varphi}^p$. При цьому у випадку, коли $0 < p < q$, умова (3.7) є не лише достатньою для такого вкладення, але й необхідною.

Враховуючи означення функціоналів $G_n(\psi, r)$, рівності (3.6) та (3.9) можна записати у вигляді

$$e_n^p(\psi\, U_{\varphi}^q)_{\varphi,p} = G_n(\psi_1, q/p),$$

де $\psi_1(k) = \bar{\psi}_k^p$, $0 < p$, $q < \infty$.

Звідси на підставі теорем 2.1 – 2.4 випливають такі твердження.

Твердження 3.1. *Нехай* $0 < p, q < \infty$ *і послідовність* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що при всіх натуральних* k *її спадна перестановка задовольняє рівність* $\bar{\psi}_k = \psi_1(k)$, *де* ψ_1 — *деяка функція з множини* $\mathfrak{M}'_\infty$. *Тоді справджується порядкова при* $n \to \infty$ *рівність*

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_{\varphi,p} \asymp \frac{\psi_1(n+1)}{(\eta(\psi_1, n) - n)^{1/q-1/p}}.$$

Твердження 3.2. *Нехай* $0 < p, q < \infty$ *і послідовність* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що при всіх натуральних* k *її спадна перестановка задовольняє рівність* $\bar{\psi}_k = \psi_1(k)$, *де* ψ_1 — *деяка функція з множини* $\mathfrak{M}_\infty^c$ *або* $\mathfrak{M}''_\infty$. *Тоді має місце порядкова при* $n \to \infty$ *рівність*

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_{\varphi,p} \asymp \psi_1(n+1).$$

Швидкість прямування до нуля величин $\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\varphi,p}$ при $0 < q \le p$ визначається рівністю (3.5). Якщо ж $0 < p < q$, то порядкові рівності для цих величин випливають з наступних тверджень, доведення яких буде наведено у п. 4.

Твердження 3.3. *Нехай* $0 < p < q < \infty$ *і послідовність* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що при всіх натуральних* k *її спадна перестановка задовольняє рівність* $\bar{\psi}_k = \psi_1(k)$, *де* ψ_1 — *деяка функція з множини* $\mathfrak{M}'_\infty$. *Тоді справджується порядкова при* $n \to \infty$ *рівність*

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\varphi,p} \asymp \psi_1(n+1)(\eta(\psi_1, n) - n)^{1/p-1/q}.$$

Твердження 3.4. *Нехай* $0 < p < q < \infty$ *і послідовність* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що при всіх натуральних* k *її спадна перестановка задовольняє рівність* $\bar{\psi}_k = \psi_1(k)$, *де* ψ_1 — *деяка функція з множини* $\mathfrak{M}_\infty^c$ *або* $\mathfrak{M}''_\infty$. *Тоді має місце порядкова при* $n \to \infty$ *рівність*

$$\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\varphi,p} \asymp \psi_1(n+1).$$

Порівнюючи порядкові рівності для величин $e_n(\psi U_\varphi^q)_{\varphi,p}$ та $\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\varphi,p}$, бачимо, що у випадку, коли $0 < q < p$, а послідовність $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що при всіх натуральних k її спадна перестановка задовольняє рівність $\bar{\psi}_k = \psi_1(k)$, де ψ_1 — деяка функція з множини $\mathfrak{M}'_\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n(\psi U_\varphi^q)_{\varphi,p}}{\mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\varphi,p}} = 0.$$

Якщо ж $0 < p \le q$ або функція ψ_1 належить множинам $\mathfrak{M}_\infty^c$ чи $\mathfrak{M}''_\infty$ і $0 < p$, $q < \infty$, то має місце порядкова рівність

$$e_n(\psi U_\varphi^q)_{\varphi,p} \asymp \mathcal{D}_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\varphi,p}, \quad n \to \infty.$$

4. Доведення теорем. У даному пункті доведемо теореми 2.1 – 2.4, але перед цим сформулюємо низку допоміжних тверджень.

4.1. Деякі допоміжні відомості. Наведемо деякі допоміжні відомості про функції з множини $\mathfrak{M}$, які будуть використовуватися далі.

Згідно з (1.4) для кожної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ має місце рівність

$$\eta'(\psi; t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))}, \quad t \ge 1,$$

з якої випливає, що

$$\eta'(\psi;t) \geq \frac{1}{2}, \quad t \geq 1.$$

Приклади функцій $\psi(t) = t^{-r}$, $r > 0$ і $\psi(t) = \ln^{-\varepsilon}(t+e)$, $\varepsilon > 0$, показують, що величина $\eta'(\psi;t)$ для різних функцій $\psi \in \mathfrak{M}$ може бути як обмеженою зверху, так і необмеженою. У зв'язку з цим розглядають множину (див., наприклад, [с. 164 – 166; 9])

$$F = \left\{\psi \in \mathfrak{M} \colon \eta'(\psi;t) \leq K\right\}.$$

Множина F має низку специфічних властивостей. Наведемо деякі з них.

Твердження 4.1 [9, с 694]**.** *Має місце вкладення*

$$\mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty^+ \subseteq F. \tag{4.1}$$

Твердження 4.2 [9, с 694]**.** *Для того щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала до F, необхідно і достатньо, щоб при всіх $t \geq 1$ виконувалось співвідношення*

$$K_1|\psi'(t)|(\eta(t)-t) \leq \psi(t) \leq K_2\big|\psi'(\eta(t))\big|(\eta(t)-t), \quad \eta(t) = \eta(\psi,t). \tag{4.2}$$

***Зауваження* 4.1** [9, с 695]. Якщо покласти $\lambda(t) := \psi(t)/|\psi'(t)|$, то з (4.2) випливає, що

$$K_1(\eta(t)-t) \leq \lambda(t) \leq K_2(\eta(t)-t), \quad \eta(t) = \eta(\psi,t) \quad \forall\psi \in F. \tag{4.3}$$

Твердження 4.3 [9, с 695]**.** *Для того щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала до F, необхідно і достатньо, щоб при всіх $t \geq 1$ виконувалась нерівність*

$$\frac{\eta(\eta(t))-\eta(t)}{\eta(t)-t} \leq K, \quad \eta(t) = \eta(\psi;t). \tag{4.4}$$

***Зауваження* 4.2** [9, с 695]. Оскільки для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ має місце оцінка $\eta'(\psi;t) \geq \frac{1}{2}$, то, оцінюючи знизу інтеграл у співвідношенні

$$\eta(\eta(t)) - \eta(t) = \int\limits_t^{\eta(t)} \eta'(\tau)d\tau, \quad \eta(t) = \eta(\psi;t),$$

робимо висновок, що для будь-якого $t \geq 1$

$$\frac{\eta(\eta(t))-\eta(t)}{\eta(t)-t} \geq \frac{1}{2} \quad \forall\psi \in \mathfrak{M}. \tag{4.5}$$

Таким чином, згідно з (4.4) і (4.5) при всіх $t \geq 1$

$$2(\eta(t)-t) \leq \eta(\eta(t)) - \eta(t) \leq K(\eta(t)-t) \quad \forall\psi \in F.$$

Встановимо ще деякі допоміжні твердження, які характеризують функції з множини $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Твердження 4.4. *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}_\infty^c$, то для будь-якого $c > 0$ існує число $K_c > 0$ таке, що при всіх $t \geq 1$ справджується нерівність*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(t+c)} \leq K_c. \tag{4.6}$$

Доведення. Якщо функцiя ψ належить множинi $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$, то при всiх $t \geq 1$ виконується нерiвнiсть

$$\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)} \leq K, \tag{4.7}$$

де K — деяка додатна стала. Звiдси для будь-яких $c > 0$ та $t \geq 1$ маємо

$$\int\limits_t^{t+c} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau \leq K\, c.$$

З iншого боку,

$$\int\limits_t^{t+c} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau = -\int\limits_t^{t+c} \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau = \ln \frac{\psi(t)}{\psi(t+c)}.$$

Тому iснує число $K_c > 0$, яке при всiх $t \geq 1$ задовольняє спiввiдношення (4.6).

Твердження 4.5. *Якщо функцiя ψ належить множинi $\mathfrak{M}'_\infty$ або $\mathfrak{M}^c_\infty$, то для будь-якого $c > 0$ iснують числа $K_{c,1}$, $K_{c,2} > 0$ такi, що при всiх $t \geq 1$*

$$K_{c,1} \leq \frac{\eta(\psi;t) - t}{\eta(\psi;t+c) - (t+c)} \leq K_{c,2}. \tag{4.8}$$

Доведення. На пiдставi (4.1) та (4.3) для будь-якої функцiї ψ з множини $\mathfrak{M}^+_\infty$ має мiсце нерiвнiсть

$$\frac{K_1}{K_2} \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \frac{|\psi'(t+c)|}{\psi(t+c)} \leq \frac{\eta(\psi;t) - t}{\eta(\psi;t+c) - (t+c)} \leq$$
$$\leq \frac{K_2}{K_1} \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \frac{|\psi'(t+c)|}{\psi(t+c)}. \tag{4.9}$$

Тому для функцiй ψ з множини $\mathfrak{M}^c_\infty$ внаслiдок (1.6) iснування сталих $K_{c,1}$, $K_{c,2} >$ > 0, що задовольняють спiввiдношення (4.8), є очевидним.

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то величина $\psi(t)/|\psi'(t)|$ монотонно зростає, i тому

$$\frac{\eta(\psi;t) - t}{\eta(\psi;t+c) - (t+c)} \leq \frac{K_2}{K_1} \frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|} \frac{|\psi'(t+c)|}{\psi(t+c)} \leq \frac{K_2}{K_1}. \tag{4.10}$$

З iншого боку, оскiльки для будь-якої функцiї $\psi \in \mathfrak{M}^+_\infty$ величина $\alpha(\psi;t) = \dfrac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$ монотонно прямує до нуля, то з урахуванням (4.9) отримуємо

$$\frac{\eta(\psi;t) - t}{\eta(\psi;t+c) - (t+c)} \geq \frac{K_1}{K_2} \frac{t}{t+c} \frac{\alpha(\psi;t)}{\alpha(\psi;t+c)} \geq \frac{K_1}{K_2(1+c)}. \tag{4.11}$$

Об'єднуючи (4.10) та (4.11), робимо висновок, що i в цьому випадку iснують сталi $K_{c,1}$, $K_{c,2} > 0$ такi, що при всiх $t \geq 1$ виконується спiввiдношення (4.8).

Твердження 4.6. *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, то для будь-яких чисел $c > 0$ i $K > 0$ при всiх достатньо великих t*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(t+c)} \geq K. \tag{4.12}$$

Дійсно, якщо $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, то для довільної сталої $K_c > 0$ при всіх достатньо великих t виконується нерівність $|\psi'(t)|/\psi(t) \geq K_c$. Тому при $K_c = \dfrac{\ln K}{c}$ для таких t будемо мати

$$\ln\frac{\psi(t)}{\psi(t+c)} = \int\limits_t^{t+c} \frac{|\psi'(\tau)|}{\psi(\tau)} d\tau \geq K_c\, c = \frac{\ln K}{c}\, c = \ln K,$$

і співвідношення (4.12) доведено.

Для встановлення порядків величин $G_n(\psi; r)$ у випадку, коли функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$, також суттєво використовуються отримані в роботі [10] (див. також [11] (п. 10)) результати, які стосуються інтегральних аналогів цих величин.

Твердження 4.7 [10, с. 534]. *Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$, то для довільного $r \in (0,1]$*

$$G_\sigma(\psi, r) := \sup_{l>\sigma} \frac{l-\sigma}{\left(\displaystyle\int_1^{l+1} \frac{dt}{\psi(t)}\right)^{1/r}} \asymp \frac{\psi^{1/r}(\sigma+1)}{(\eta(\psi;\sigma+1)-\sigma-1)^{1/r-1}}, \quad \sigma\to\infty.$$

У випадку, коли $r \in (1,\infty)$, будемо застосовувати також дві порядкові рівності, які виконуються для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ і отримані в роботі [10] (див. відповідно співвідношення (72) та (81)):

$$\int\limits_1^l \frac{dt}{\psi^r(t)} \asymp \frac{\eta(\psi;l)-l}{\psi^r(l)}, \quad l\to\infty, \tag{4.13}$$

і

$$\int\limits_l^\infty \psi^s(t)\,dt \asymp \psi^s(l)(\eta(\psi;l)-l), \quad l\to\infty, \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1. \tag{4.14}$$

4.2. Доведення теореми 2.1. Нехай функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$. Для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ та $l > n$ покладемо

$$F_n(l) = \frac{l-n}{\left(\displaystyle\int_1^{l+1} \frac{dt}{\psi^r(t)}\right)^{1/r}} \quad \text{і} \quad H_n(l) = \frac{[l]-n}{\left(\sum_{k=1}^{[l]} \dfrac{1}{\psi^r(k)}\right)^{1/r}}, \tag{4.15}$$

де $[l]$ — ціла частина числа l.

З огляду на нерівність

$$\int\limits_1^{l-1} \frac{dt}{\psi^r(t)} \leq \sum_{k=1}^{[l]} \frac{1}{\psi^r(k)} \leq \int\limits_1^{l+1} \frac{dt}{\psi^r(t)},$$

яка виконується при будь-якому $l > 2$, маємо $F_{n+1}(l) \leq H_n(l) \leq F_{n-2}(l-2)$. Звідси випливає, що

$$\sup_{l>n} F_{n+1}(l) \leq \sup_{l>n} H_n(l) \leq \sup_{l>n} F_{n-2}(l-2). \tag{4.16}$$

Далі, оскільки

$$(\psi^r(t))' = r\psi^{r-1}(t)\psi'(t) = -r\psi^r(t)\frac{|\psi'(t)|}{\psi(t)}$$

і

$$\frac{\psi^r(t)}{\big|(\psi^r(t))'\big|} = \frac{1}{r}\,\frac{\psi(t)}{|\psi'(t)|}, \quad t \geq 1, \tag{4.17}$$

то для довільної функції ψ з множини $\mathfrak{M}'_\infty$ її r-й степінь $\psi^r(\cdot)$ теж належить цій множині. Тому на підставі твердження 4.7 при $n \to \infty$

$$\sup_{l>n} F_{n+1}(l) \geq \sup_{l>n+1} F_{n+1}(l) \asymp \frac{\psi(n+2)}{(\eta(\psi^r; n+2) - n - 2)^{1/r-1}} \tag{4.18}$$

і

$$\sup_{l>n} F_{n-2}(l-2) \asymp \frac{\psi(n-2)}{(\eta(\psi^r; n-1) - n + 1)^{1/r-1}}. \tag{4.19}$$

При цьому за твердженнями 4.4 та 4.5 величини у правих частинах співвідношень (4.18) та (4.19) рівні за порядком:

$$\frac{\psi(n+2)}{(\eta(\psi^r; n+2) - n - 2)^{1/r-1}} \asymp$$

$$\asymp \frac{\psi(n-2)}{(\eta(\psi^r; n-1) - n + 1)^{\frac{1}{r}-1}} \asymp \frac{\psi(n+1)}{(\eta(\psi^r, n) - n)^{1/r-1}}, \quad n \to \infty. \tag{4.20}$$

Крім того, на підставі (4.3) і (4.17) робимо висновок, що

$$\eta(\psi^r, n) - n \asymp \eta(\psi, n) - n, \quad n \to \infty. \tag{4.21}$$

Таким чином, внаслідок (4.15), (4.16), (4.18) – (4.21) отримуємо співвідношення (2.1):

$$G_n(\psi; r) = \sup_{l>n} H_n(l) \asymp \frac{\psi(n+1)}{(\eta(\psi, n) - n)^{1/r-1}}.$$

4.3. Доведення теореми 2.2. Нехай функція ψ належить множині $\mathfrak{M}^c_\infty$ або $\mathfrak{M}''_\infty$. Тоді внаслідок співвідношень (4.17), (1.16) та (1.17) існує стала $K_1 > 0$ така, що при будь-якому $t \geq 1$

$$\psi^r(t) \leq K_1\big|(\psi^r(t))'\big|. \tag{4.22}$$

Тому при всіх натуральних s справджується співвідношення

$$\frac{1}{\psi^r(l)} \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)} \leq \frac{1}{\psi^r(l)} + \int_1^l \frac{dt}{\psi^r(t)} \leq \frac{1}{\psi^r(l)} + K_1 \int_1^l \frac{|(\psi^r(t))'|}{\psi^{2r}(t)} dt =$$

$$= \frac{1}{\psi^r(l)} + K_1\left(\frac{1}{\psi^r(l)} - \frac{1}{\psi^r(1)}\right) \leq \frac{K_2}{\psi^r(l)}, \tag{4.23}$$

де K_2 — деяка додатна стала.

При довільних натуральних n та l, $l > n$, розглянемо функції

$$H_n(l) = \frac{l-n}{\left(\sum_{k=1}^{l} \dfrac{1}{\psi^r(k)}\right)^{1/r}} \quad \text{і} \quad F_n(l) = \psi(l)(l-n).$$

На підставі (4.23) робимо висновок, що при всіх натуральних n та l, $l > n$,

$$K_2^{-1/r} F_n(l) \le H_n(l) \le F_n(l),$$

і тому

$$K_2^{-1/r} \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} F_n(l) \le G_n(\psi; r) = \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} H_n(l) \le \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} F_n(l). \tag{4.24}$$

Похідна функції $F_n(l)$ має вигляд

$$F_n'(l) = \psi'(l)(l-n) + \psi(l) = |\psi'(l)| \left(\frac{\psi(l)}{|\psi'(l)|} - (l-n) \right).$$

У випадку, коли функція ψ належить множині $\mathfrak{M}''_\infty$, величина $\psi(t)/|\psi'(t)|$ монотонно прямує до нуля при $t \to \infty$. В такому разі при всіх n, більших за деяке число n_0, та $l > n$ виконується нерівність $F_n'(l) < 0$. Тому для таких n функція $F_n(l)$ спадає при всіх $l > n$, і її найбільше значення на множині всіх натуральних чисел $l > n$ досягається у точці $l = n+1$ та дорівнює $\psi(n+1)$:

$$\sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} F_n(l) = F_n(n+1) = \psi(n+1), \qquad n > n_0.$$

Звідси з огляду на (4.24) робимо висновок, що має місце співвідношення (2.2):

$$G_n(\psi; r) \asymp \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} F_n(l) \asymp \psi(n+1), \quad n \to \infty.$$

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$, то внаслідок нерівності (4.22) при всіх $l > n + K_1$ виконується нерівність $F_n'(l) < 0$ і, отже, функція $F_n(l)$ спадає. Таким чином, найбільше значення функції $F_n(l)$ на множині всіх натуральних чисел $l > n$ досягається у деякій точці $n + c$, де $c = c(n)$ — деяке натуральне число, менше за $K_1 + 1$:

$$\sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} F_n(l) = F_n(n+c) = c\,\psi(n+c). \tag{4.25}$$

Далі, оскільки функція ψ належить множині $\mathfrak{M}^c_\infty$, то внаслідок співвідношення (4.6) існує стала $K_3 = K_3(c) > 0$ така, що при всіх $t \ge 1$

$$\psi(t+c) \le \psi(t+1) \le K_3 \psi(t+c). \tag{4.26}$$

На підставі співвідношень (4.24)–(4.26) робимо висновок, що і у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$, має місце співвідношення (2.2):

$$G_n(\psi; r) \asymp \sup_{l\in\mathbb{N},\, l>n} F_n(l) \asymp \psi(n+c) \asymp \psi(n+1), \quad n \to \infty.$$

4.4. Доведення теореми 2.3 проведемо за схемою доведення теореми 4 з роботи [10]. При цьому будемо здебільшого використовувати методи, розроблені в [10].

Покажемо спочатку, що справджується порядкова рівність

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)} \asymp \frac{\eta(\psi; l) - l}{\psi^r(l)}, \quad l \to \infty. \tag{4.27}$$

Справді, при будь-якому натуральному l

$$\int_1^l \frac{dt}{\psi^r(t)} \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)} \leq \int_1^{l+1} \frac{dt}{\psi^r(t)}.$$

Звідси внаслідок (4.13) випливає, що існують сталі K_1, $K_2 > 0$ такі, що при всіх достатньо великих натуральних l

$$K_1 \frac{\eta(\psi; l) - l}{\psi^r(l)} \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)} \leq K_2 \frac{\eta(\psi; l+1) - l - 1}{\psi^r(l+1)}. \tag{4.28}$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то на підставі тверджень 4.4 та 4.5 робимо висновок, що величини

$$\frac{\eta(\psi; l) - l}{\psi^r(l)} \quad \text{і} \quad \frac{\eta(\psi; l+1) - l - 1}{\psi^r(l+1)},$$

які обмежують суму $\sum_{k=1}^{l} \dfrac{1}{\psi^r(k)}$ в (4.28), мають однаковий порядок і, отже, справджується співвідношення (4.27).

З рівності (2.4) внаслідок твердження 4.4 випливає порядкова рівність

$$(l^* - n) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)} \right)^{-1} \asymp \psi^r(l^*), \quad n \to \infty, \tag{4.29}$$

Тому, якщо довести, що

$$\psi(l^*) \asymp \psi(n), \quad n \to \infty, \tag{4.30}$$

то тим самим буде оцінено величину в лівій частині співвідношення (4.29).

Внаслідок монотонності функції ψ завжди $\psi(n) \geq \psi(l^*)$, тому для доведення (4.30) досить переконатись, що існує стала $K_3 > 0$ така, що

$$\psi(n) \leq K_3 \psi(l^*). \tag{4.31}$$

Із співвідношення (4.27) випливає, що існує стала $K_4 > 0$ така, що при всіх натуральних l виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)} \leq K_4 \frac{\eta(\psi; l) - l}{\psi^r(l)}. \tag{4.32}$$

Виберемо натуральне число $k_0 = k_0(K_4)$, $k_0 > 3$, таке, що

$$\frac{2^{k_0 - 2} - 1}{K_4} \geq 1, \tag{4.33}$$

і покажемо, що $l^* < n_{k_0+1}$, де $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ — зростаюча послідовність чисел таких, що $n_0 := n$, а при довільному $k \in \mathbb{N}$ $n_k := \eta(\psi; n_{k-1})$. Звідси буде випливати, що

$$\psi(l^*) \geq \psi(n_{k_0+1}) = \psi(n)/2^{k_0+1},$$

і, отже, справджуються співвідношення (4.31) та (4.30).

Розглянемо функцію

$$\Phi(l) := \sum_{k=n+1}^{l} \left(\frac{1}{\psi^r(l)} - \frac{1}{\psi^r(k)} \right), \quad l > n, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{4.34}$$

Ця функція додатна і не спадає при $l > n$. Тому якщо буде показано, що при $l = [n_{k_0+1}]$ має місце співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi^r(k)} < \Phi(l), \tag{4.35}$$

то таке ж співвідношення виконуватиметься і при довільних $l > [n_{k_0+1}]$. Звідси випливатиме, що при довільних $l > [n_{k_0+1}]$

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)} < \frac{l-n}{\psi^r(l)}$$

або

$$\frac{l-n}{\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)}} > \psi^r(l).$$

Тоді, зважаючи на те, що згідно з означенням числа l^*

$$\frac{l^*-n}{\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)}} \leq \psi^r(l^*),$$

будемо мати $l^* < [n_{k_0+1}] < n_{k_0+1}$.

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty} \subset \mathfrak{M}^{+}_{\infty} \subset F$, то внаслідок (1.5) і (4.3) величина $\eta(\psi; t) - t$ прямує до нескінченності. Тому при всіх t, більших за деяке число t_0, виконується нерівність $\eta(\psi; t) - t > 1$. Тоді якщо $n > t_0$, то для будь-якого натурального k виконується співвідношення

$$[n_k] > n_k - 1 = \eta(\psi; n_{k-1}) - 1 > n_{k-1}. \tag{4.36}$$

На підставі співвідношень (4.34) і (4.36) для довільного $n > t_0$ маємо

$$\Phi([n_{k_0+1}]) = \sum_{k=n+1}^{[n_{k_0+1}]} \left(\frac{1}{\psi^r([n_{k_0+1}])} - \frac{1}{\psi^r(k)} \right) \geq$$

$$\geq \int_{n+1}^{[n_{k_0+1}]} \left(\frac{1}{\psi^r([n_{k_0+1}])} - \frac{1}{\psi^r(t)} \right) dt \geq \int_{n_1}^{n_{k_0}} \left(\frac{1}{\psi^r(n_{k_0})} - \frac{1}{\psi^r(t)} \right) dt. \tag{4.37}$$

З огляду на те, що для кожного $k = 3, 4, \ldots$

$$\int\limits_{n_1}^{n_k} \left(\frac{1}{\psi^r(n_k)} - \frac{1}{\psi^r(t)} \right) dt \geq (2^{k-2} - 1) \frac{n_2 - n_1}{\psi^r(n_1)} =$$

$$= (2^{k-1} - 2) \frac{\eta(\psi; \eta(\psi; n)) - \eta(\psi; n)}{\psi^r(n)}$$

(в чому легко переконатися, зробивши малюнок), враховуючи співвідношення (4.5), (4.32) та (4.33), із (4.37) отримуємо

$$\Phi([n_{k_0+1}]) \geq (2^{k_0-1} - 2) \frac{\eta(\psi; \eta(\psi; n)) - \eta(\psi; n)}{\psi^r(n)} \geq$$

$$\geq (2^{k_0-2} - 1) \frac{\eta(\psi; n) - n}{\psi^r(n)} \geq \frac{2^{k_0-2} - 1}{K_4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi^r(k)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi^r(k)}.$$

Тобто нерівність (4.35) при $s = [n_{k_0+1}]$ виконується і, отже, $l^* < [n_{k_0+1}] < n_{k_0+1}$.

Тому

$$\psi(n) \geq \psi(l^*) \geq \psi(n_{k_0+1}) = \psi(n)/2^{k_0+1},$$

тобто дійсно співвідношення (4.30) виконується.

Покажемо тепер, що

$$\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)} \asymp \frac{\eta(\psi; n) - n}{\psi^r(n)}, \quad n \to \infty. \tag{4.38}$$

На підставі (4.27) і того, що $l^* > n$, маємо

$$\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi^r(k)} \geq K_5 \frac{\eta(\psi; n) - n}{\psi^r(n)}. \tag{4.39}$$

З іншого боку, $l^* \leq [n_{k_0+1}]$, і тому, враховуючи (4.32), одержуємо

$$\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)} \leq \sum_{k=1}^{[n_{k_0+1}]} \frac{1}{\psi^r(k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\psi^r(k)} + \sum_{k=n+1}^{[n_{k_0+1}]} \frac{1}{\psi^r(k)} \leq$$

$$\leq K_4 \frac{\eta(\psi; n) - n}{\psi^r(n)} + \frac{[n_{k_0+1}] - n}{\psi^r([n_{k_0+1}])} \leq K_4 \frac{\eta(\psi; n) - n}{\psi^r(n)} + \frac{n_{k_0+1} - n}{\psi^r(n_{k_0})}. \tag{4.40}$$

Оскільки функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+ \subset F$, то внаслідок співвідношення (4.4) має місце оцінка

$$\frac{n_{k_0+1} - n}{\psi^r(n_{k_0})} \leq 2^{rk_0} \frac{(\eta(\psi; n) - n)(K^{k_0} + K^{k_0-1} + \ldots + 1)}{\psi^r(n)} = K_6 \frac{\eta(\psi; n) - n}{\psi^r(n)}.$$

Підставляючи цю оцінку в (4.40), отримуємо нерівність

$$\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)} \leq K_4 \frac{\eta(n) - n}{\psi^r(n)} + K_6 \frac{\eta(\psi; n) - n}{\psi^r(n)} = K_7 \frac{\eta(\psi; n) - n}{\psi^r(n)},$$

з якої з урахуванням співвідношення (4.39) одержуємо (4.38).

Для завершення доведення даної теореми покажемо, що при $n\to\infty$

$$\sum_{k=l^*+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\asymp\psi^{\,s}(n)(\eta(\psi;n)-n),\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1. \tag{4.41}$$

Оскільки для довільного натурального l

$$\int\limits_{l+1}^{\infty}\psi^{\,s}(t)\,dt\le\sum_{k=l+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\le\int\limits_{l}^{\infty}\psi^{\,s}(t)\,dt, \tag{4.42}$$

то внаслідок (4.14) існують додатні сталі K_8 та K_9 такі, що при всіх достатньо великих l виконується нерівність

$$K_8\psi^s(l+1)(\eta(\psi;l+1)-l-1)\le\sum_{k=l+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\le K_9\psi^s(l)(\eta(\psi;l)-l),$$

звідки на підставі тверджень 4.4 та 4.5 робимо висновок, що

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\asymp\psi^s(l)(\eta(\psi;l)-l),\quad l\to\infty. \tag{4.43}$$

Звідси з урахуванням того, що $l^*>n$, отримуємо

$$\sum_{k=l^*+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\asymp\psi^{\,s}(n)\big(\eta(\psi;n)-n\big). \tag{4.44}$$

З іншого боку, $l^*<[n_{k_0+1}]$. Тому внаслідок (4.42) та (4.36) при всіх $n>t_0$

$$\sum_{k=l^*+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\ge\sum_{k=[n_{k_0+1}]+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\ge\int\limits_{[n_{k_0+1}]+1}^{\infty}\psi^{\,s}(t)\,dt\ge\int\limits_{n_{k_0+2}}^{\infty}\psi^{\,s}(t)\,dt.$$

Звідси, враховуючи означення послідовності $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ і співвідношення (4.14) та (4.5), маємо

$$\sum_{k=l^*+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\ge K_{10}\psi^s(n_{k_0+2})(\eta(\psi;n_{k_0+2})-n_{k_0+2})\ge K_{11}\psi^s(n)(\eta(\psi;n)-n), \tag{4.45}$$

де K_{10}, K_{11} — деякі додатні числа.

Об'єднуючи співвідношення (4.44) та (4.45), переконуємося, що дійсно має місце порядкова рівність (4.41).

Таким чином, на підставі співвідношень (4.29), (4.30), (4.38), (4.41), рівності $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ із урахуванням твердження 4.4 при $n\to\infty$ отримуємо

$$G_n(\psi;r)=$$

$$=\left(\left((s^*-\sigma)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\frac{1}{\psi^r(k)}\right)^{-1}\right)^s\left(\sum_{k=1}^{l^*}\frac{1}{\psi^r(k)}\right)^{s-s/r}+\sum_{k=l^*+1}^{\infty}\psi^{\,s}(k)\right)^{1/s}\asymp$$

$$\asymp \left(\psi^{rs}(n) \left(\frac{\eta(\psi;n)-n}{\psi^r(n)} \right)^{s-s/r} + \psi^s(n)(\eta(\psi;n)-n) \right)^{1/s} \asymp$$

$$\asymp \psi(n)(\eta(\psi;n)-n)^{1/s} \asymp \psi(n+1)(\eta(\psi;n)-n)^{1/s},$$

і співвідношення (2.6) встановлено.

Для доведення твердження 4.3 достатньо покласти $s = \dfrac{pq}{q-p}$ та $\bar{\psi}_k = \psi(k)$ і скористатись співвідношеннями (3.8) та (4.43) з урахуванням співвідношення (4.21).

4.5. Доведення теореми 2.4. Для спрощення записів покладемо

$$H_n(l) := \frac{l-n}{\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)}}, \quad l > n, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Оскільки для довільного $l > n$

$$H_n(l+1) - \psi^r(l+1) = \frac{l+1-n}{\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{\psi^r(k)}} - \psi^r(l+1) =$$

$$= \frac{l-n+1-\psi^r(l+1)\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)} - \frac{\psi^r(l+1)}{\psi^r(l+1)}}{\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{\psi^r(k)}} =$$

$$= (H_n(l) - \psi^r(l+1)) \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)} \left(\sum_{i=1}^{l+1} \frac{1}{\psi^r(i)} \right)^{-1},$$

то є рівносильними нерівності

$$H_n(l) > \psi^r(l+1) \quad \text{та} \quad H_n(l+1) > \psi^r(l+1),$$

а також нерівності

$$H_n(l) \leq \psi^r(l+1) \quad \text{та} \quad H_n(l+1) \leq \psi^r(l+1).$$

Тому на підставі означення числа l^* (співвідношення (2.4)) робимо висновок, що

$$H_n(l^*) = \sup_{l>n,\, l\in\mathbb{N}} H_n(l). \tag{4.46}$$

Далі, оскільки функція ψ належить множині $\mathfrak{M}_\infty^c$ або $\mathfrak{M}_\infty''$, то при всіх $l > 0$ має місце аналог співвідношення (4.23)

$$\frac{1}{\psi^r(l)} \leq \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\psi^r(k)} \leq \frac{K_1}{\psi^r(l)}, \tag{4.47}$$

де K_1 — деяка додатна стала, з якого випливає, що

$$\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)} \asymp \frac{1}{\psi^r(l^*)}, \quad n \to \infty. \tag{4.48}$$

При довільних натуральних n та l, $l > n$, розглянемо функцію

$$F_n(l) = \psi^r(l)(l-n).$$

Внаслідок (4.47) при всіх натуральних n та l, $l > n$,

$$K_1^{-1} F_n(l) \leq H_n(l) \leq F_n(l),$$

і тому

$$K_1^{-1} \sup_{l \in \mathbb{N},\, l > n} F_n(l) \leq H_n(l^*) = \sup_{l \in \mathbb{N},\, l > n} H_n(l) \leq \sup_{l \in \mathbb{N},\, l > n} F_n(l). \tag{4.49}$$

Похідна функції $F_n(l)$ має вигляд

$$F_n'(l) = r\psi'(l)\psi^{r-1}(t)(l-n) + \psi^r(l) = \psi^{r-1}(t)|\psi'(l)| \left(\frac{\psi(l)}{|\psi'(l)|} - r(l-n) \right).$$

У випадку, коли функція ψ належить множині $\mathfrak{M}''_\infty$, величина $\psi(t)/|\psi'(t)|$ монотонно прямує до нуля при $t \to \infty$. В такому разі при всіх n, більших за деяке число n_0, та всіх $l > n$ виконується нерівність $F_n'(l) < 0$. Тому для таких n функція $F_n(l)$ спадає при всіх $l > n$, і її найбільше значення на множині всіх натуральних чисел $l > n$ досягається у точці $l = n+1$ та дорівнює $\psi^r(n+1)$:

$$\sup_{l \in \mathbb{N},\, l > n} F_n(s) = F_n(n+1) = \psi^r(n+1), \quad n > n_0.$$

Звідси з огляду на (4.49) робимо висновок, що місце співвідношення

$$H_n(l^*) = \sup_{l \in \mathbb{N},\, l > n} H_n(l) \asymp \psi^r(n+1), \quad n \to \infty. \tag{4.50}$$

Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}^c_\infty$, то існує стала $K_2 > 0$ така, що при всіх $l \geq 1$ $\psi(l)/|\psi'(l)| \leq K_2$. Тому при всіх $l > n + \dfrac{K_2}{r}$ виконується нерівність $F_n^{'}(l) < 0$ і, отже, функція $F_n(l)$ спадає. Таким чином, найбільше значення функції $F_n(l)$ на множині всіх натуральних чисел $l > n$ досягається у деякій точці $n + c$, де $c = c(n)$ — деяке натуральне число, менше за $\dfrac{K_2}{r} + 1$:

$$\sup_{l \in \mathbb{N},\, l > n} F_n(l) = F_n(n+c) = c\,\psi^r(n+c).$$

Звідси, враховуючи співвідношення (4.49) та (4.6), робимо висновок, що і в цьому випадку має місце співвідношення (4.50).

Із співвідношення (4.50) випливає, що існує стала $K_3 > 0$ така, що при всіх достатньо великих n

$$H_n(l^*) \geq K_3 \psi^r(n+1). \tag{4.51}$$

З іншого боку, згідно з означенням числа l^*

$$H_n(l^*) \leq \psi^r(l^*) \leq \psi^r(n+1). \tag{4.52}$$

Об'єднуючи нерівності (4.51) та (4.52), робимо висновок, що має місце порядкова рівність

$$\psi(l^*) \asymp \psi^r(n+1), \quad n \to \infty. \tag{4.53}$$

Для завершення доведення теореми залишилось переконатися, що

$$\sum_{k=l^*+1}^{\infty} \psi^{\,s}(k) \asymp \psi^{\,s}(n+2), \quad n \to \infty. \tag{4.54}$$

Для цього покажемо спочатку, що

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \psi^{\,s}(k) \asymp \psi^{\,s}(l+1), \quad l \to \infty. \tag{4.55}$$

Дійсно, оскільки, за означенням, для довільної функції ψ з множини $\mathfrak{M}_\infty^c$ або $\mathfrak{M}_\infty''$ існує стала $K_4 > 0$ така, що при всіх $t \geq 1$ $\psi(t) \leq K_4|\psi'(t)|$, то

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \psi^{\,s}(k) \leq \psi^s(l+1) + \int\limits_{l+1}^{\infty} \psi^s(t)dt \leq$$

$$\leq \psi^s(l+1) + K_4 \int\limits_{l+1}^{\infty} \psi^{s-1}(t)|\psi'(t)|dt = (1 + K_4/s)\psi^s(l+1).$$

З іншого боку, функція ψ додатна, тому

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \psi^{\,s}(k) \geq \psi^{\,s}(l+1)$$

і має місце порядкова рівність (4.55).

Із (4.55) випливає, що

$$\sum_{k=l^*+1}^{\infty} \psi^{\,s}(k) \asymp \psi^{\,s}(l^*+1), \quad n \to \infty.$$

Далі, якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty''$, то згідно з твердженням 4.6 виконання співвідношення (4.53) можливе лише у випадку, коли $l^* = n+1$, і тому має місце співвідношення (4.54). Якщо ж $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^c$, то з урахуванням (4.53) та твердження 4.4 співвідношення (4.54) теж виконується.

Таким чином, на підставі співвідношень (4.46), (4.48), (4.50), (4.53) та (4.54) при $n \to \infty$ отримуємо

$$G_n(\psi; r) =$$

$$= \left(\left((l^* - \sigma) \left(\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)} \right)^{-1} \right)^s \left(\sum_{k=1}^{l^*} \frac{1}{\psi^r(k)} \right)^{s-s/r} + \sum_{k=l^*+1}^{\infty} \psi^{\,s}(k) \right)^{1/s} \asymp$$

$$\asymp \left(\psi^{rs}(n+1) \left(\frac{1}{\psi^r(n)} \right)^{s-s/r} + \psi^s(n+2) \right)^{1/s} \asymp \psi(n+1),$$

і співвідношення (2.7) встановлено.

Для доведення твердження 4.4 достатньо покласти $s = \dfrac{pq}{q-p}$ та $\bar{\psi}_k = \psi(k)$ і скористатись співвідношеннями (3.8) та (4.55).

1. *Софман Л. Б.* Поперечники бесконечного октаэдра // Вестн. Моск. ун-та. – 1973. — № 5. – С. 54 – 56.
2. *Софман Л. Б.* Поперечники октаэдров // Мат. заметки. – 1969. – **5**, № 4. – С. 429 – 436.
3. *Pinkus A.* n-Widths in approximation theory. – Berlin etc.: Springer, 1985. – 291 p.
4. *Fang Gensun, Qian Lixin.* Approximation characteristics for diagonal operators in different computational settings // J. Approxim. Theory. – 2006. – **140**, Issue 2. – P. 178 – 190.
5. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
6. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.
7. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Тр. Ин–та математики НАН Украины. – 2002. – **40**, ч. II. – 468 с.
8. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Там же. – Ч. I. – 427 с.
9. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 688 – 702.
10. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* О порядках наилучших приближений интегралов функций с помощью интегралов ранга σ // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 4. – С. 528 – 559.
11. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Экстремальные задачи для интегралов от неотрицательных функций. – Киев, 2007. – 103 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2007.2).
12. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ. – Киев, 2000. – 52 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2000.2).
13. *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. – М.: Мир, 1976. – 204 с.
14. *Стерлин М. Д.* Точные постоянные в обратных теоремах теории приближений // Докл. АН СССР. – 1972. – **202**, № 3. – С. 545 – 547.
15. *Степанец А. И.* Задачи теории приближений в линейных пространствах // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 1. – С. 47 – 92.

Одержано 10.03.09