УДК 513.88

Д. Ю. Якименко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УНИТАРИЗАЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА, КОТОРОЕ СООТВЕТСТВУЕТ ГРАФУ $\tilde{E}_6$

We prove that every Schur representation of a partially ordered set corresponding to the graph $\tilde{E}_6$ is unitarizable with some character and give the description of characters, that admit the unitarization of the Schur representations of $\tilde{E}_6$.

Доведено, що будь-яке шурівське зображення частково впорядкованої множини, що відповідає графу $\tilde{E}_6$, можна унітаризувати з деяким характером, і наведено опис характерів, з якими можлива унітаризація шурівських зображень $\tilde{E}_6$.

1. Введение. Описание представлений колчанов и частично упорядоченных множеств (сокращенно *чум*) в категории линейных пространств связано со многими проблемами линейной алгебры, и работы в этом направлении стали классическими (см., например, [1 – 6]).

Проблему описания представлений колчанов и чум можно также рассматривать в категории гильбертовых пространств. Однако содержательные результаты возникают лишь при введении дополнительных ограничений на представления. На языке гильбертовых представлений алгебр описание представлений, размерностей и другие результаты приведены в [7 – 9]. В [10] для колчанов изучались локально-скалярные представления (позднее в [11] этот термин был изменен на ортоскалярные).

Для представлений чум в категории гильбертовых пространств также можно выделить ортоскалярные представления. При этом изучение ортоскалярных представлений примитивных чум может быть сведено к изучению ортоскалярных представлений для соответствующих колчанов и наоборот.

В настоящей статье изучаются связи неразложимых линейных представлений чум и его гильбертовых неприводимых ортоскалярных представлений. Неприводимому ортоскалярному представлению естественно соответствует линейное представление, но линейному представлению может соответствовать множество ортоскалярных представлений с различными характерами. Будем говорить, что линейное представление π унитаризуется с характером χ, если существует ортоскалярное представление π' с χ, которое линейно изоморфно π (см. п. 2). Известно, что из неразложимых линейных представлений чума унитаризоваться с каким-либо характером могут только шуровские. При этом если для фиксированного характера унитаризация существует, то она единственна [11].

В работе [12], следуя [13], доказано, что все шуровские представления примитивных чум конечного типа унитаризуются с некоторым характером, и дано описание всех таких характеров. В [14] доказано, что все шуровские представления $\tilde{D}_4$ унитаризуются, а в [15] получено описание характеров, с которыми унитаризация возможна. Для $\tilde{E}_6$ в случае дискретной серии (см. п. 2) описание характеров, с которыми возможна унитаризация, получено в [16].

В данной статье мы покажем, что любое шуровское представление чума, которое соответствует графу $\tilde{E}_6$, унитаризуется с некоторым характером, и опишем множество характеров, с которыми эти представления можно унитаризовать.

2. Определения и основные свойства. ***2.1. Чум и их представления в категории линейных пространств.*** Пусть $(\mathcal{N}, \prec)$ — конечное чум, элементами которого будем считать числа $\{1, \ldots, n\}$. Чум $\mathcal{N}$ называется примитивным и обозначается $(k_1, \ldots, k_m)$, если оно является кадинальной суммой m линейно упорядоченных множеств $\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_m$ с порядками $k_1, \ldots, k_m$.

Линейным представлением $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$ чума $\mathcal{N}$ называется такой набор подпространств V_i линейного пространства V (мы ограничимся полем комплексных чисел, хотя представления можно рассматривать и над произвольными полями), что из $i \prec j$ следует $V_i \subseteq V_j$. Для примитивных чум $(k_1, \ldots$ $\ldots, k_m)$ также будем использовать запись $\pi = (V; V_1^{(1)}, \ldots, V_{k_1}^{(1)}; \ldots; V_1^{(m)}, \ldots, V_{k_m}^{(m)})$.

Под размерностью представления π будем понимать набор $d_\pi = (d_0; d_1, \ldots$ $\ldots, d_n)$, где $d_0 = \dim V$, $d_i = \dim V_i$ (соответственно для примитивных чум $d_\pi =$ $= (d_0; d_1^{(1)}, \ldots, d_{k_1}^{(1)}; \ldots; d_1^{(m)}, \ldots, d_{k_m}^{(m)})$).

Морфизмом представления $\pi_1 = (V; V_1, \ldots, V_n)$ в представление $\pi_2 = (W;$ $W_1, \ldots, W_n)$ чума $\mathcal{N}$ называется такое линейное отображение $C: V \to W$, что $C(V_i) \subseteq W_i$, $i = \overline{1, n}$.

Линейные представления чума $\mathcal{N}$ образуют аддитивную категорию $\operatorname{Rep}(\mathcal{N})$.

Два представления π_1 и π_2 будут изоморфными, если существует обратимый морфизм, т. е. такое невырожденное линейное отображение $C: V \to W$, что $C(V_i) = W_i$, $i = \overline{1, n}$.

Прямой суммой $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ представлений π_1 и π_2 называется представление

$$\pi = (V \oplus W; V_1 \oplus W_1, \ldots, V_n \oplus W_n).$$

Представление называется неразложимым, если оно не изоморфно прямой сумме ненулевых представлений, иначе оно называется разложимым. Представление называется шуровским, если множество его эндоморфизмов тривиально, т. е. $\operatorname{End}(\pi) = \mathbb{C}I$. Шуровские представления всегда неразложимы, но обратное верно не всегда.

Говорят, что чум конечного (линейного) представленческого типа, если оно имеет лишь конечное число неразложимых неэквивалентных представлений. Описание чум конечного типа можно найти в [5].

2.2. Чум и колчаны. Представления примитивных чум тесно связаны с представлениями колчанов.

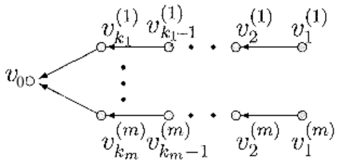
Колчан $Q = (Q_0, Q_1, s, t: Q_1 \to Q_0)$ состоит из множества вершин $Q_0 =$ $= \{v_0, \ldots, v_n\}$ и множества стрелок Q_1. Стрелка $\rho \in Q_1$ выходит из вершины $s(\rho)$ и входит в вершину $t(\rho)$. Линейное представление X для Q — это набор линейных пространств X_{v_i} для каждой из вершин $v_i \in Q_0$ и набор линейных операторов $X_\rho : X_{s(\rho)} \to X_{t(\rho)}$ для каждой из стрелок $\rho \in Q_1$. Подобно чум для представлений X и Y колчана определяются множество морфизмов, неразложимые и шуровские представления (см. [17]).

Произвольному чуму $\mathcal{N}$ можно поставить в соответствие колчан $Q^{\mathcal{N}}$ следующим образом: $Q_0^{\mathcal{N}} = \{v_0, v_x \mid x \in \mathcal{N}\}$ и $Q_1^{\mathcal{N}}$ состоит из:

стрелок $v_x \to v_y$, если $x \prec y$ и не существует z такое, что $x \prec z \prec y$;

стрелок $v_x \to v_0$, если не существует z такое, что $x \prec z$.

Для примитивных чум $\mathcal{N} = (k_1, \ldots, k_m)$ соответствующий колчан $Q^{\mathcal{N}}$ имеет вид



Любому представлению π чума $\mathcal{N} = (k_1, \ldots, k_m)$ можно поставить в соответствие представление X_π соответствующего колчана $Q^{\mathcal{N}}$. Действительно, пусть есть представление

$$\pi = (V; V_1^{(1)}, \ldots, V_{k_1}^{(1)}; \ldots; V_1^{(m)}, \ldots, V_{k_m}^{(m)})$$

чума $\mathcal{N}$, тогда X_π для колчана Q строится следующим образом: каждой вершине $v_i^{(j)}$ ставится в соответствие пространство $V_i^{(j)}$, $X_{v_i^{(j)}} = V_i^{(j)}$ (вершине v_0 ставим в соответствие пространство V, $X_{v_0} = V$) и каждой стрелке $v_i^{(j)} \to$ $\to v_{i+1}^{(j)}$ — вложение $V_i^{(j)} \hookrightarrow V_{i+1}^{(j)}$ (для стрелок $v_{k_i}^{(j)} \to v_0$ будет вложение $V_{k_i}^{(j)} \hookrightarrow V$).

И обратно, если колчан Q соответствует чуму $\mathcal{N} = (k_1, \ldots, k_m)$, то любому представлению X колчана такому, что для любого $\rho \in Q_1$ отображения X_ρ являются мономорфизмами, можно поставить в соответствие представление для $\mathcal{N}$

$$\pi_X = (V; V_1^{(1)}, \ldots, V_{k_1}^{(1)}; \ldots; V_1^{(n)}, \ldots, V_{k_n}^{(n)}),$$

где $V = X_{v_0}$ — пространство в вершине v_0 и $V_j^{(i)} = X_{v_j^{(i)} \to v_{j+1}^{(i)}} \ldots X_{v_{k_i}^{(i)} \to v_0}(X_{v_j^{(i)}})$ — образ пространства в вершине $v_j^{(i)}$ под действием отображений по пути от $v_j^{(i)}$ к v_0.

Приведенное соответствие между представлениями чума и колчана взаимно однозначно и выполняются следующие свойства:

1) представления π_1 и π_2 чума $\mathcal{N}$ изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие представления X_{π_1} и X_{π_2} колчана $Q^{\mathcal{N}}$ изоморфны;

2) представление π неразложимо (шурово) тогда и только тогда, когда X_π неразложимо (шурово).

Примитивному чум (2, 2, 2) соответствует колчан — расширенный граф Дынкина $\tilde{E}_6$. Поэтому чум (2, 2, 2) мы также будем обозначать как $\tilde{E}_6$.

2.3. Ортоскалярные представления чум в категории гильбертовых пространств. Унитаризация. Пусть $\mathcal{H}$ — категория унитарных (конечномерных гильбертовых) пространств. Ее можно рассматривать как подкатегорию категории линейных пространств. Определим категорию $\operatorname{Rep}(\mathcal{N}, \mathcal{H})$ унитарных представлений чум $\mathcal{N}$ как подкатегорию категории $\operatorname{Rep}(\mathcal{N})$. Объектами в ней будут такие представления: $\pi \in \operatorname{Rep}(\mathcal{N})$, $\pi = (V; V_1, \ldots, V_n)$, где V — унитарное пространство. Морфизмы $C: V \to W$ для $\pi_1 = (V; V_1, \ldots, V_n)$, $\pi_2 = (W; W_1, \ldots, W_n)$ в $\operatorname{Rep}(\mathcal{N}, \mathcal{H})$ мы оставим лишь такие, что помимо $C(V_i) \subseteq W_i$ выполняется также $C^*(W_i) \subseteq V_i$, $i = \overline{1, n}$. Можно показать, что два представления будут (унитарно) изоморфными в $\operatorname{Rep}(\mathcal{N}, \mathcal{H})$, если существует унитарный оператор $C: V \to W$ такой, что $C(V_i) = W_i$, $i = \overline{1, n}$.

Представление $\pi_1 = (V; V_1, \ldots, V_n)$ категории $\operatorname{Rep}(\mathcal{N}, \mathcal{H})$ называется *ортоскалярным* с характером $\chi = (\alpha_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{0, n}$, если выполняется

$$\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = \alpha_0 I,$$

где P_i — ортогональные проекторы на подпространства V_i.

Через $\operatorname{Rep}_{\mathrm{os}}(\mathcal{N}, \mathcal{H})$ будем обозначать полную подкатегорию $\operatorname{Rep}(\mathcal{N}, \mathcal{H})$, состоящую из всех ортоскалярных представлений $\mathcal{N}$.

Будем говорить, что представление $\pi \in \operatorname{Rep}(\mathcal{N})$ *унитаризуется* с характером $\pi \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, если существует ортоскалярное с характером χ представление $\pi' \in \operatorname{Rep}_{\mathrm{os}}(\mathcal{N}, \mathcal{H})$ такое, что $\pi \simeq \pi'$ в $\operatorname{Rep}(\mathcal{N})$.

Очевидно, что ортоскалярному представлению естественно соответствует линейное представление, но линейному представлению может соответствовать множество ортоскалярных с различными характерами.

Известно, что из неразложимых линейных представлений чума унитаризоваться с каким-либо характером могут только шуровские. При этом если для фиксированного характера унитаризация существует, то она единственна (см. [11]).

Для унитаризации линейного представления в размерности $d_\pi = (d_0; d_1, \ldots, d_n)$ сразу же возникает естественное условие на характер $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i = \alpha_0 d_0$, которое получается взятием следа от операторов в левой и правой частях равенства $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = \alpha_0 I$. Это условие будем называть trace-условием.

2.4. Фильтрации и стабильность линейных представлений чум. Пусть E — унитарное пространство и $H: E \to E$ — эрмитов оператор. *Спектральной фильтрацией* E^H оператора H называется отображение из $\mathbb{R}$ во множество подпространств E такое, что для любого $x \in \mathbb{R}$ $E^H(x)$ равно сумме собственных подпространств H с собственными значениями больше либо равными x. По фильтрации можно обратно построить эрмитов оператор, поэтому между $\mathbb{R}$-фильтрациями и эрмитовыми операторами существует взаимно однозначное соответствие. Заметим, что фильтрация не зависит от скалярного произведения в E.

Кратностью фильтрации E^a в точке $x \in \mathbb{R}$ называется $m_E^a(x) := \dim E(x) - \dim E(x+0)$. Это целозначная функция с конечным носителем.

Семейство фильтраций E^a, $a \in A$, называется *полустабильным*, если для любого собственного подпространства $F \subset E$ для индуцированных фильтраций

$F^a = F \bigcap E^a$ выполняются соотношения

$$\frac{1}{\dim F} \sum_{x \in R,\, a \in A} x m_F^a(x) \le \frac{1}{\dim E} \sum_{x \in R,\, a \in A} x m_E^a(x).$$

Если все неравенства строгие, то семейство фильтраций называется *стабильным*.

Из утверждения 3.5.5 в [18] непосредственно следует такое утверждение.

Утверждение 1. *Для шуровского семейства фильтраций* E^a, $a \in A$, *в пространстве* E *можно ввести скалярное произведение так, чтобы* $\sum_{a \in A} H^a = \lambda \mathbb{I}$ *для некоторого* $\lambda \in \mathbb{C}$ *тогда и только тогда, когда* E^a — *стабильное семейство.*

Пусть теперь есть некоторое представление $\pi = (V; V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6)$ для чума $\tilde{E}_6$ в линейном пространстве V и характер $\alpha = (1; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$. По π и α для каждой из трех веток $\tilde{E}_6$ можно построить соответствующую фильтрацию:

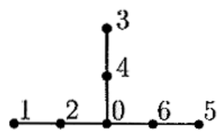
$$E^j(x) = \begin{cases} V, & x \le 0, \\ V_{2j-1}, & 0 < x \le \alpha_{2j-1}, \\ V_{2j}, & \alpha_{2j-1} < x \le \alpha_{2j-1} + \alpha_{2j}, \\ 0, & \alpha_{2j-1} + \alpha_{2j} < x, \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3.$$

При любом выбранном скалярном произведении в V условие ортоскалярности представления π с характером α эквивалентно тому, что $\sum_j H^j = \mathbb{I}$, где H^j — операторы, соответствующие введенным фильтрациям. Поэтому получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Шуровское представление* $\pi = (V; V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6)$ *для* $\tilde{E}_6$ *в линейном пространстве* V *унитаризуется с характером* α *тогда и только тогда, когда* $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \dim V_i = \alpha_0 \dim V$ *и* $\forall F \subset V$, $F \ne 0$, V: $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \dim(F \bigcap V_i) < \alpha_0 \dim F$.

2.5. Описание шуровских линейных представлений чум $\tilde{E}_6$**.** Факты, приведенные в этом пункте, общеизвесты (см., например, [1 – 3, 17, 19]).

Пусть колчан Q — расширенная диаграмма Дынкина $\tilde{E}_6$:



и $\mathcal{N}$ — примитивное чум, которое ему соответствует. Как показано в пп. 2.2, представления для $\mathcal{N}$ несложным образом строятся из представлений для Q.

Формой Титса $q : Z^{Q_0} \mapsto Z$ колчана Q называется квадратичная форма

$$q(\alpha) = \sum_{x \in Q_0} \alpha_x^2 - \sum_{a \in Q_1} \alpha_{s(a)} \alpha_{t(a)}.$$

Все неразложимые представления Q могут быть только в размерностях d, для которых $q(d)=0$ или $q(d)=1$.

Если $q(d)=0$, то d называется мнимым корнем. Для расширенных диаграмм Дынкина равенство $q(d)=0$ может быть только при $d=k\delta$, $k\in Z$, где δ — минимальный мнимый корень. Для $\tilde{E}_6$ минимальный $\delta=(3;\,2,\,1;\,2,\,1;\,2,\,1)$. Шуровские представления в этом случае (который будем называть *непрерывным*) будут лишь в размерности δ. В пересчете на представления чума $\mathcal{N}$ они будут выглядеть следующим образом:

а) при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1\}$ имеем серию представлений

$$\pi_\lambda = (\langle e_1,e_2,e_3\rangle;\ \langle e_2,e_3\rangle,\ \langle e_2+e_3\rangle;\ \langle e_3,e_1\rangle,\ \langle e_3+e_1\rangle;\ \langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1+e_2\lambda\rangle),$$

которые будем называть невырожденными;

б) также есть 8 вырожденных представлений:

$$\pi_{-1} = (\langle e_1,e_2,e_3\rangle;\ \langle e_2,e_3\rangle,\ \langle e_2+e_3\rangle;\ \langle e_3,e_1\rangle,\ \langle e_3+e_1\rangle;\ \langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1-e_2\rangle),$$

$$\pi'_{-1} = (\langle e_1,e_2,e_3\rangle;\ \langle e_2-e_3,e_1\rangle,\ \langle e_1\rangle;\ \langle e_3-e_1,e_2\rangle,\ \langle e_2\rangle;\ \langle e_1+e_2,e_3\rangle,\ \langle e_3\rangle),$$

$$\pi_{(3,2)} = (\langle e_1,e_2,e_3\rangle;\ \langle e_2,e_3\rangle,\ \langle e_2+e_3\rangle;\ \langle e_3,e_1\rangle,\ \langle e_3+e_1\rangle;\ \langle e_1,e_2\rangle,\ \langle e_1\rangle)$$

и представления $\pi_{(3,1)}$, $\pi_{(2,1)}$, $\pi_{(2,3)}$, $\pi_{(3,2)}$, $\pi_{(1,3)}$, которые получаются перестановкой веток $\pi_{(3,2)}$. Под перестановкой веток понимаем $\pi=(V;\,V_1,\,V_2,\,V_3,\,V_4,\,V_5,\,V_6)\to\sigma\pi=(V;\,V_5,\,V_6,\,V_1,\,V_2,\,V_3,\,V_4)$ для $\sigma=(312)$ и т. д.

Если $q(d)=1$, то d называется действительным корнем. При этом в размерности d существует единственное неразложимое представление. Этот случай будем называть дискретным. Все шуровские представления в этом случае можно построить с помощью функторов Кокстера из простейших.

3. Унитаризация представлений чум $\tilde{E}_6$. Чтобы определить с какими характерами возможна унитаризация шуровского представления в размерности $d=(d_0;\,d_1,\,\ldots,\,d_6)$ — действительного корня, достаточно определить для каких $\chi=(\alpha_0;\,\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_6)$ существует неприводимый набор ортопроекторов $P_1,\ldots,P_6$ в унитарном конечномерном пространстве V такой, что $\dim V=d_0$, $\dim P_i=d_i$, $i=\overline{1,6}$,

$$\alpha_1P_1+\ldots+\alpha_6P_6 = \alpha_0 I$$

и $\operatorname{Im}P_1\subseteq\operatorname{Im}P_2$, $\operatorname{Im}P_3\subseteq\operatorname{Im}P_4$, $\operatorname{Im}P_5\subseteq\operatorname{Im}P_6$. В работе [16] теоремы 3 – 6 для каждого из возможных d дают описание характеров, для которых существует набор ортопроекторов с требуемыми условиями. Поскольку в дискретном случае существует ровно одно представление в фиксированной размерности d, то описание характеров из [16] соответствует возможным характерам, с которыми унитаризуется это единственное шуровское представление в размерности d.

В непрерывном случае воспользуемся утверждением 2. Как следует из утверждения 2, для определения характеров, с которыми возможна унитаризация линейного представления $\pi=(V;\,V_1,\,V_2;\,V_3,\,V_4;\,V_5,\,V_6)$, нужно определить все *подразмерности*, т. е. все возможные значения $(\dim F;\ \dim(F\cap V_1),\ \dim(F\cap\cap V_2);\ \dim(F\cap V_3),\ \dim(F\cap V_4);\ \dim(F\cap V_5),\ \dim(F\cap V_6))$ для любого $F\subset V$. Подразмерностей, очевидно, может быть лишь конечное число.

Следующая лемма дает описание таких подразмерностей для каждого из представлений $\tilde{E}_6$ в непрерывном случае. При этом следует отметить, что для невырожденных представлений π_λ, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1\}$, а также для π_{-1} и π'_{-1}, если $(p_0; p_1, p_2; p_3, p_4; p_5, p_6)$ будет подразмерностью, то и перестановки, соответствующие перестановкам веток, т. е. $(p_0; p_3, p_4; p_1, p_2; p_5, p_6)$ и т. д., также будут подразмерностями.

Лемма. 1. *Для невырожденных шуровских представлений* π_λ, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$, *подразмерности будут следующими*:

а) *если* $\dim F = 1$:

$(1; 0, 0; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$,

$(1; 1, 0; 1, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_3 \rangle$,

$(1; 1, 0; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_2 + 2e_3 \rangle$,

$(1; 1, 1; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_2 + e_3 \rangle$;

б) *если* $\dim F = 2$:

$(2; 2, 1; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2, e_3 \rangle$,

$(2; 1, 1; 1, 1; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2 + e_3, e_1 + e_3 \rangle$,

$(2; 1, 1; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2 + e_3, e_1 \rangle$,

$(2; 1, 0; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2 + 2e_3, \lambda e_1 + 2e_3 \rangle$, *если* $\lambda \neq 2$, *и* $F = \langle e_2 + 2e_3, e_1 + 2e_3 \rangle$, *если* $\lambda = 2$.

2. *Для* π_{-1}:

а) *если* $\dim F = 1$:

$(1; 0, 0; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$,

$(1; 1, 0; 1, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_3 \rangle$,

$(1; 1, 0; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_2 + 2e_3 \rangle$,

$(1; 1, 1; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_2 + e_3 \rangle$;

б) *если* $\dim F = 2$:

$(2; 2, 1; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2, e_3 \rangle$,

$(2; 1, 1; 1, 1; 1, 1)$ *при* $F = \langle e_2 + e_3, e_1 + e_3 \rangle$,

$(2; 1, 1; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2 + e_3, e_1 \rangle$,

$(2; 1, 0; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2 + 2e_3, \lambda e_1 + 2e_3 \rangle$, *если* $\lambda \neq 2$, *и* $F = \langle e_2 + 2e_3, e_1 + 2e_3 \rangle$, *если* $\lambda = 2$.

3. *Для* π'_{-1}:

а) *если* $\dim F = 1$:

$(1; 0, 0; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_1 + 2e_2 \rangle$,

$(1; 1, 0; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_1 + e_2 - e_3 \rangle$,

$(1; 1, 0; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_2 - e_3 \rangle$,

$(1; 1, 1; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_1 \rangle$;

б) *если* $\dim F = 2$:

$(2; 2, 1; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2 - e_3, e_1 \rangle$,

$(2; 1, 1; 1, 1; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_1, e_2 \rangle$,

$(2; 1, 1; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_1, e_2 + e_3 \rangle$,

$(2; 1, 0; 1, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2 - e_3, e_3 - e_1 \rangle$.

4. *Для представления* $\pi_{(3,2)}$ *все подразмерности соответствующих семейств фильтраций будут следующими*:

а) *если* $\dim F = 1$:

$(1; 0, 0; 0, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$,

$(1; 1, 0; 1, 0; 0, 0)$ *при* $F = \langle e_3 \rangle$, $(1; 1, 0; 0, 0; 1, 0)$ *при* $F = \langle e_2 \rangle$, $(1; 0, 0; 1, 0;$

1, 1) *при* $F = \langle e_1 \rangle$,

(1; 1, 0; 0, 0; 0, 0) *при* $F = \langle e_2 + 2e_3 \rangle$, *а также* (1; 0, 0; 1, 0; 0, 0), (1; 0, 0; 0, 0; 1, 0),

(1; 1, 1; 0, 0; 0, 0) *при* $F = \langle e_2 + e_3 \rangle$, (1; 0, 0; 1, 1; 0, 0) *при* $F = \langle e_1 + e_3 \rangle$;

б) *если* $\dim F = 2$:

(2; 2, 1; 1, 0; 1, 0) *при* $F = \langle e_2, e_3 \rangle$, (2; 1, 0; 1, 2; 1, 1) *при* $F = \langle e_1, e_3 \rangle$, (2; 1, 0; 1, 0; 2, 1) *при* $F = \langle e_1, e_2 \rangle$,

(2; 1, 1; 1, 1; 1, 0) *при* $F = \langle e_2 + e_3, e_1 + e_3 \rangle$, (2; 1, 1; 1, 0; 1, 1) *при* $F = \langle e_2 + e_3, e_1 \rangle$,

(2; 1, 0; 1, 1; 1, 0) *при* $F = \langle e_1 + e_3, e_2 \rangle$, (2; 1, 0; 1, 0; 1, 1) *при* $F = \langle e_2 + 2e_3, e_1 \rangle$, (2; 1, 1; 1, 0; 1, 0) *при* $F = \langle e_2 + e_3, e_1 + 2e_3 \rangle$,

(2; 1, 0; 1, 0; 1, 0) *при* $F = \langle e_1 + e_2, e_3 \rangle$.

Следующая теорема получается непосредственным применением доказанной леммы к утверждению 2.

Теорема 1. *Для унитаризации шуровских представлений* $\tilde{E}_6$ *в непрерывном случае необходимы и достаточны следующие условия на характер* $(1; \alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4; \alpha_5, \alpha_6)$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,6}$:

1) trace-*условие*:

$$(2\alpha_1 + \alpha_2) + (2\alpha_3 + \alpha_4) + (2\alpha_5 + \alpha_6) = 3;$$

2) *дополнительно для* π_{-1}:

$$\forall j:\ \alpha_j < 1; \quad \alpha_1 + \alpha_3 < 1, \quad \alpha_1 + \alpha_5 < 1, \quad \alpha_3 + \alpha_5 < 1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1, \quad \alpha_3 + \alpha_4 < 1, \quad \alpha_5 + \alpha_6 < 1,$$

$$2 > ((2\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 + \alpha_5), \quad 2 > ((2\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1 + \alpha_5),$$

$$2 > ((2\alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_3 + \alpha_1),$$

$$2 > ((\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_5 + \alpha_6)),$$

для π'_{-1}:

$$\forall j:\ \alpha_j < 1; \quad \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 < 1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1, \quad \alpha_3 + \alpha_4 < 1, \quad \alpha_5 + \alpha_6 < 1,$$

$$2 > ((2\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 + \alpha_5), \quad 2 > ((2\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1 + \alpha_5),$$

$$2 > ((2\alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_3 + \alpha_1),$$

$$2 > ((\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_5), \quad 2 > ((\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_3),$$

$$2 > ((\alpha_5 + \alpha_6) + (\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1),$$

для π_λ, $\lambda \neq 0, -1$:

$$\forall j:\ \alpha_j < 1; \quad \alpha_1 + \alpha_3 < 1, \quad \alpha_1 + \alpha_5 < 1, \quad \alpha_3 + \alpha_5 < 1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1, \quad \alpha_3 + \alpha_4 < 1, \quad \alpha_5 + \alpha_6 < 1,$$

$$2 > ((2\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 + \alpha_5), \quad 2 > ((2\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1 + \alpha_5),$$

$$2 > ((2\alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_3 + \alpha_1),$$

$$2 > ((\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_5), \quad 2 > ((\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_3),$$

$$2 > ((\alpha_5 + \alpha_6) + (\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1),$$

для $\pi_{(3,2)}$:

$$\forall j: \alpha_j < 1; \quad \alpha_1 + \alpha_3 < 1, \quad \alpha_1 + \alpha_5 < 1, \quad \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 < 1,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1, \quad \alpha_3 + \alpha_4 < 1,$$

$$2 > ((2\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 + \alpha_5), \quad 2 > ((2\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_6),$$

$$2 > ((2\alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_3 + \alpha_1),$$

$$2 > ((\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_5), \quad 2 > ((\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_5 + \alpha_6) + \alpha_3).$$

Следствие. *Любое шуровское представление* $\tilde{E}_6$ *можно унитаризовать с некоторым характером.*

Чтобы убедиться в совместимости полученных систем неравенств, рассмотрим такие характеры, что $\alpha_0 = 1$, $\beta = \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5$, $\gamma = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6$. Тогда для π_{-1} условия имеют вид

$$2\beta + \gamma = 1; \quad \beta < 1, \quad \gamma < 1; \quad 2\beta < 1; \quad \beta + \gamma < 1; \quad 2 > 4\beta + \gamma; \quad 2 > 3(\beta + \gamma) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\beta + \gamma = 1; \quad \beta > 1/3,$$

для π'_{-1}

$$2\beta + \gamma = 1; \quad \beta < 1, \quad \gamma < 1; \quad 3\beta < 1; \quad \beta + \gamma < 1; \quad 2 > 4\beta + \gamma; \quad 2 > 3\beta + 2\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\beta + \gamma = 1; \quad \beta < 1/3,$$

для π_λ, $\lambda \neq 0, -1$,

$$2\beta + \gamma = 1; \quad \beta < 1, \quad \gamma < 1; \quad 2\beta < 1; \quad \beta + \gamma < 1; \quad 2 > 4\beta + \gamma; \quad 2 > 3\beta + 2\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\beta + \gamma = 1,$$

для $\pi_{(3,2)}$

$$2\beta + \gamma = 1; \quad \beta < 1, \quad \gamma < 1; \quad 2\beta < 1; \quad \beta + \gamma < 1; \quad 2\beta + \gamma < 1; \quad 2 > 4\beta + \gamma; \quad 2 > 3\beta + 2\gamma,$$

т. е. для $\pi_{(3,2)}$ (а значит, и для $\pi_{(3,1)}, \ldots$) характеры такого вида не подходят, однако система неравенств для $(1; \alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4; \alpha_5, \alpha_6)$ для $\pi_{(3,2)}$ является совместимой.

Автор благодарит Ю. С. Самойленко за постановку задачи и ценные советы.

1. *Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Функторы Кокстера и теорема Габриеля // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 170. – С. 19 – 33.
2. *Dlab V., Ringel C. M.* Indecomposable representations of graphs and algebras // Mem. Amer. Math. Soc. – 1976. – **6**, № 176. – P. 1 – 72.
3. *Donovan P., Freislich M.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Math. Lect. Notes. – 1973. – **5**. – P. 1 – 187.
4. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 3. – С. 34 – 42.
5. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32 – 41.
6. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Там же.

– С. 5 – 31.

7. *Albeverio S., Ostrovskyi V., Samoilenko Y.* On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras // J. Algebra. – 2007. – **308**, Issue 2. – P. 567 – 582.
8. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, № 3. – С. 20 – 35.
9. *Ostrovskyi V. L., Samoilenko Yu. S.* On spectral theorems for families of linearly connected selfadjoint operators with prescribed spectra associated with extended Dynkin graphs // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1556 – 1570.
10. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Функцион. анализ и его прил. – 2005. – **39**, № 2. – С. 13 – 30.
11. *Кругляк С. А., Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Ортоскалярные представления колчанов в категории гильбертовых пространств // Вопросы теории представлений алгебр и групп: Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2006. – **338**, вып. 14. – С. 180 – 201.
12. *Grushevoy R., Yusenko K.* On the unitarization of linear representations of primitive partially ordered sets // arXiv:0807. 0155vl.
13. *Kruglyak S., Popovich S., Samoilenko Yu.* The spectral problem and $*$-representations of algebras associated with Dynkin graphs // J. Algebra and Appl. – 2005. – **4**, № 6. – P. 761 – 776.
14. *Moskaleva Yu. P., Samoilenko Yu. S.* Systems of n subspaces and representations of $*$-algebras generated by projections // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2006. – **12**, № 1. – P. 57 – 73.
15. *Samoilenko Yu. S., Yakymenko D. Yu.* On n-tuples of subspaces in linear and unitary spaces // Ibid. – 2009. – **15**, № 1. – P. 383 – 396.
16. *Kruglyak S. A., Popovich S. V., Samoilenko Yu. S.* The spectral problem and algebras associated with extended Dynkin graphs. I // Ibid. – 2005. – **11**, № 4. – P. 383 – 396.
17. *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras // Enc. Math. Sci. Algebra VIII. – 1992. – **73**.
18. *Klyachko A. A.* Stable bundles, representation theory and Hermitian operators // Selecta Math. (N. S.). – 1998. – **4**, № 3. – P. 419 – 445.
19. *Assem I., Simpson D., Skowronskiy A.* Elements of the representation theory of assosiative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory // London Math. Soc. Stud. Texts. – 2006. – **65**. – P. 458.

Получено 06.04.09,
после доработки — 01.07.09