УДК 517. 5

В. Ф. Бабенко
(Днепропетр. нац. ун-т; Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
Н. В. Парфинович (Днепропетр. нац. ун-т)

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ ДЕФЕКТА 2 И НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА

We establish the exact values of the best (α, β)-approximations and the best one-sided approximations of classes of differentiable periodic functions by splines of defect 2. We obtain new exact Jackson-type inequalities for the best and best one-sided approximations by splines of defect 2.

Знайдено точні значення найкращих (α, β)-наближень і найкращих односторонніх наближень класів диференційовних періодичних функцій сплайнами дефекту 2. Отримано нові точні нерівності типу Джексона для найкращих і найкращих односторонніх наближень сплайнами дефекту 2.

1. Введение. Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространства 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$; $p' = p/(p-1)$, C^r, $r = 0, 1, \ldots$, — пространство r раз непрерывно дифференцируемых (непрерывных при $r = 0$) 2π-периодических функций.

Если $f \in L_p$ и α, β — положительные числа, то положим

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p,$$

где

$$f_\pm(t) = \max\{\pm f(t), 0\}.$$

Наилучшим (α, β)-приближением функции $f \in L_p$ множеством $H \subset L_p$ в метрике L_p называется величина

$$E(f, H)_{p;\alpha,\beta} := \inf_{h \in H} \|f - h\|_{p;\alpha,\beta}. \tag{1}$$

Наилучшее (α, β)-приближение $f \in L_p$ подпространством констант будем обозначать через $E(f)_{p;\alpha,\beta}$.

Если $M \subset L_p$ — некоторый класс функций, то величина

$$E(M, H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f \in M} \inf_{h \in H} \|f - h\|_{p;\alpha,\beta} \tag{2}$$

называется наилучшим (α, β)-приближением класса M множеством H в метрике L_p. При $\alpha = \beta = 1$ величины (1) и (2) совпадают с обычным наилучшим L_p-приближением функции f (обозначение $E(f, H)_p$) и класса M (обозначение $E(M, H)_p$) соответственно.

Пусть множество $H \subset L_p$ фиксировано. Сопоставим функции $f \in L_p$ подмножества

$$H_f^+ = \{u(t) : u \in H,\, u(t) \le f(t),\, 0 \le t \le 2\pi\},$$

$$H_f^- = \{u(t) : u \in H,\, u(t) \ge f(t),\, 0 \le t \le 2\pi\}.$$

Через $E^{\pm}(f, H)_p$ и $E^{\pm}(M, H)_p$ обозначим наилучшие односторонние L_p-приближения функции f и класса $M \in L_p$ множеством H соответственно, т. е.

$$E^{\pm}(f, H)_p := \begin{cases} \inf\left\{\|f - u\|_p : u \in H_f^{\pm}\right\}, & H_f^{\pm} \ne \varnothing, \\ \infty, & H_f^{\pm} = \varnothing, \end{cases}$$

и

$$E^{\pm}(M, H)_p := \sup_{f \in M} E^{\pm}(f, H)_p .$$

Величины $E^{\pm}(f, H)_p$ и $E^{\pm}(M, H)_p$ называются наилучшими приближениями снизу (+) и сверху (–) функции $f \in L_p$ и класса $M \subset L_p$ соответственно.

В. Ф. Бабенко [1, 2] (см. также [3], теоремы 1.4.10, 1.5.9) установил, что если множество $H \subset L_p$, $1 \le p < \infty$, локально компактно, то для любой функции $f \in L_p$ монотонно по α и β

$$\lim_{\beta \to \infty} E(f, H)_{p,1,\beta} = E^{+}(f, H)_p ,$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} E(f, H)_{p,\alpha,1} = E^{-}(f, H)_p ,$$

а для любого множества $M \subset L_p$ монотонно по α и β

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to \infty} E(M, H)_{p,1,\beta} &= E^{+}(M, H)_p , \\ \lim_{\alpha \to \infty} E(M, H)_{p,\alpha,1} &= E^{-}(M, H)_p . \end{aligned} \tag{3}$$

Через L_p^r, $r = 1, 2, \ldots$, обозначим множество 2π-периодических функций, у которых $f^{(r-1)}\left(f^{(0)} := f\right)$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(r)} \in L_p$.

Для всех $r = 1, 2, \ldots$, $1 \le p \le \infty$ обозначим через W_p^r класс функций $f \in L_p^r$, у которых $\|f\|_p \le 1$.

Для натуральных n и m через T_{2n-1} будем обозначать пространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n - 1$, а через $S_{2n,m}^k$, $k = 1, 2$, — пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка m дефекта k с узлами в точках $kj\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть еще $\varphi_{n,m}(\alpha, \beta; t)$, $\alpha, \beta > 0$, $m \in \mathbb{N}$, — $2\pi/n$-периодический интеграл порядка m с нулевым средним значением на периоде от четной $2\pi/n$-периодической функции $\varphi_{n,0}(\alpha, \beta; t)$, которая для $t \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right)$ определяется следующим образом:

$$\varphi_{n,0}(\alpha, \beta; t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \le t \le \dfrac{\pi\beta}{n(\alpha+\beta)}, \\ -\beta, & \dfrac{\pi\beta}{n(\alpha+\beta)} < t \le \dfrac{\pi}{n}. \end{cases}$$

При $\alpha = \beta = 1$ вместо $\varphi_{n,m}(\alpha, \beta; t)$ будем писать $\varphi_{n,m}(t)$.

Через

$$B_m(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kt - \pi m/2)}{k^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

обозначим ядро Бернулли порядка m (см. [3, с. 36]) и положим

$$\tilde{B}_m(t) = 2(-1)^m B_m(t).$$

Функция $\tilde{B}_m$ — это $(m-1)$-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от нечетной 2π-периодической функции, равной $\pi - t$ для $t \in (0, 2\pi)$.

Отметим (см., например, [3, с. 109]), что при $m \ge 2$ и $\alpha \to \infty$

$$\left\| \varphi_{1,m}(\alpha, 1; \cdot) - \tilde{B}_m \right\|_\infty \to 0$$

и

$$\left\| \varphi_{1,1}(\alpha, 1; \cdot) - \tilde{B}_1 \right\|_1 \to 0.$$

Кроме того, при всех $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha \to \infty$

$$E\big(\varphi_{1,m}(\alpha, 1; \cdot)\big)_\infty \to E(\tilde{B}_m)_\infty. \tag{5}$$

Известно, что для $n, r, m \in \mathbb{N}$, $m \ge r-1$, $p = 1, \infty$

$$E\big(W_p^r, T_{2n-1}\big)_p = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{n^r} \tag{6}$$

и

$$E\big(W_p^r, S_{2n,m}^1\big)_p = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{n^r}. \tag{7}$$

Равенство (6) при $p = \infty$ — это результат Фавара – Ахиезера – Крейна (см. [4 – 6]), при $p = 1$ его установил С. М. Никольский [7]. Равенство (7) при $p = \infty$ и $m = r - 1$ установлено В. М. Тихомировым [8], а в остальных случаях — А. А. Лигуном [9].

Аналогичные результаты для односторонних приближений классов W_p^r полиномами получены Т. Ганелиусом [10], а для наилучших односторонних приближений классов W_p^r сплайнами — В. Г. Дорониным и А. А. Лигуном [11]. Ими было доказано, что при $n, m, r \in \mathbb{N}$, $m \ge r$,

$$E^{\pm}\left(W_1^r,\, T_{2n-1}\right)_1 \;=\; E^{\pm}\left(W_1^r,\, S_{2n,m}^1\right)_1 \;=\; \frac{E(\tilde{B}_r)_\infty}{n^r}. \tag{8}$$

В. Ф. Бабенко [1] установил, что для $n,\ r,\ m \in \mathbb{N}$, $m \geq r$, при всех $\alpha, \beta > 0$

$$E\left(W_1^r,\, T_{2n-1}\right)_{1;\alpha,\beta} \;=\; E\left(W_1^r,\, S_{2n,m}^1\right)_{1;\alpha,\beta} \;=\; \frac{E\left(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\,\cdot)\right)_\infty}{n^r}. \tag{9}$$

В работе авторов [12] получен, в частности, аналог соотношения (7) при $p = 1$ для наилучших приближений сплайнами дефекта 2: для $n, r,\ m \in \mathbb{N}$, $m \geq r$, имеет место равенство

$$E\left(W_1^r,\, S_{2n,m}^2\right)_1 \;=\; \frac{\left\|\varphi_{1,r}\right\|_\infty}{n^r}. \tag{10}$$

В данной работе мы найдем точные значения наилучших $(\alpha,\ \beta)$-приближений $E\left(W_1^r,\, S_{2n,m}^2\right)_{1;\alpha,\beta}$ при всех $\alpha, \beta > 0$ и наилучших односторонних приближений $E^{\pm}\left(W_1^r,\, S_{2n,m}^2\right)_1$ для всех $n, r,\ m \in \mathbb{N}$, $m \geq r$, а также с помощью этих результатов установим некоторые новые неравенства типа Джексона для наилучших и наилучших односторонних приближений в пространстве L_1 сплайнами из $S_{2n,m}^2$ (подробнее о неравенствах Джексона см., например, в [13]).

2. Наилучшие (α, β)-приближения классов W_1^r.

Теорема 1. *Пусть* $n, r,\ m \in \mathbb{N}$, $m \geq r$, $\alpha, \beta > 0$. *Тогда*

$$E\left(W_1^r,\, S_{2n,m}^2\right)_{1;\alpha,\beta} \;=\; \frac{E\left(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\,\cdot)\right)_\infty}{n^r}.$$

При $\alpha = \beta = 1$ из теоремы 1 следует (10). Кроме того, из теоремы 1 в силу (3) и (5) вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $n, r,\ m \in \mathbb{N}$, $m \geq r$. *Тогда*

$$E^{\pm}\left(W_1^r,\, S_{2n,m}^2\right)_1 \;=\; \frac{E(\tilde{B}_r)_\infty}{n^r}. \tag{11}$$

Везде далее будем полагать $t_j = \dfrac{2\pi j}{n}$, $j \in \mathbb{Z}$. Мы также будем использовать обозначение $g \perp S_{2n,m}^2$, которое означает, что для любого $s \in S_{2n,m}^2$

$$\int_0^{2\pi} g(t)\, s(t)\, dt \;=\; 0.$$

При этом вместо $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 0$ будем писать $g \perp 1$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение, доказанное в [12].

Лемма 1. *Пусть* $n,\ m \in \mathbb{N}$, $g \in L_1$, $g \perp 1$, g_m — m*-я* 2π*-периодическая первообразная от функции* g. *Тогда для того чтобы выполнялось соотношение* $g \perp S_{2n,m}^2$, *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$g_{m+1}(t_1) \;=\; g_{m+1}(t_2) \;=\; \ldots = \; g_{m+1}(t_n)$$

и

$$g'_{m+1}(t_1) = g'_{m+1}(t_2) = \ldots = g'_{m+1}(t_n) = 0.$$

***Доказательство теоремы* 1.** Используя теорему двойственности для наилучшего несимметричного L_1-приближения подпространством (см. [3], теорема 1.4.9), получаем

$$E\Big(W_1^r, S_{2n,m}^2\Big)_{1;\alpha,\beta} = \sup_{f \in W_1^r} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1, \\ g \perp S_{2n,m}^2}} \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt. \tag{12}$$

Используя лемму 1, соотношение (12) после r-кратного интегрирования по частям можем записать в виде

$$E\Big(W_1^r, S_{2n,m}^2\Big)_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{\|f\|_1 \le 1, \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}, \\ g^{(r)} \perp S_{2n,m}^2}} \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt =$$

$$= \sup_{\substack{g \in W^{m+1}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}, \\ g(t_1) = \ldots = g(t_n), \\ g'(t_1) = \ldots = g'(t_n) = 0}} \sup_{\substack{\|f\|_1 \le 1, \\ f \perp 1}} \int_0^{2\pi} f(t)\, g^{(m-r+1)}(t)\, dt =$$

$$= \sup_{\substack{g \in W^{m+1}_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}, \\ g(t_1) = \ldots = g(t_n), \\ g'(t_1) = \ldots = g'(t_n) = 0}} E\Big(g^{(m-r+1)}\Big)_\infty. \tag{13}$$

Покажем, что для любой функции $g \in W_\infty^{m+1}$ такой, что

$$g(t_1) = g(t_2) = \ldots = g(t_n)$$

и

$$g'(t_1) = g'(t_2) = \ldots = g'(t_n) = 0,$$

при каждом