УДК 517.51

С. П. Войтенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain exact-order estimates of the best orthogonal trigonometric approximations of classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of multivariable periodic functions in the space L_q.

Получены точные по порядку оценки наилучших ортогональных тригонометрических приближений классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q.

1. Постановка задачі та основні результати. Нехай $L_p(\mathbb{T}^d)$ — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p, $1 \le p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) на кубі $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi)$ функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$, в якому норма визначається таким чином:

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)|.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ покладемо

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

і означимо кратну різницю порядку l, $l \in \mathbb{N}$, функції $f(x)$ у точці $x = (x_1, \ldots, x_d)$ з кроком $h = (h_1, \ldots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ за формулою

$$\Delta^l_h f(x) = \Delta_h \Delta^{l-1}_h f(x) \quad \left(\Delta^0_h f(x) = f(x)\right).$$

Кратну різницю $\Delta^l_h f(x)$ можна також записати у вигляді

$$\Delta^l_h f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l+n} C^n_l f(x+nh).$$

Означимо модуль неперервності порядку l функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, який позначимо через $\Omega_l(f, t)_p$, згідно з формулою

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{|h| \le t} \left\| \Delta^l_h f(x) \right\|_p,$$

де $|h| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_d^2}$.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, яка задана на $\mathbb{R}_+ = \{t : t \ge 0\}$ та задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(0)=0$, $\Omega(t)>0$ для $t>0$;

2) $\Omega(t)$ є неперервною;

3) $\Omega(t)$ зростає;

4) для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ $\Omega(nt)\le Cn^l\Omega(t)$, де $l\ge 1$ — фіксоване натуральне число, стала $C>0$ не залежить від n і t.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє також умови (S) і (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція $\Omega(\tau)\ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\Omega(\tau)/\tau^{\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha>0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1>0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^{\alpha}}\le C_1\frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^{\alpha}},\quad 0<\tau_1\le\tau_2.$$

Функція $\Omega(\tau)\ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\Omega(\tau)/\tau^{\gamma}$ майже спадає при деякому $0<\gamma<l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2>0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^{\gamma}}\ge C_2\frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^{\gamma}},\quad 0<\tau_1\le\tau_2.$$

В роботі [2], аналогічно [3, 4], наведено означення аналогів класів Бєсова таким чином.

Для $1\le p,\theta\le\infty$ і заданої функції $\Omega(t)$ типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається так:

$$B^{\Omega}_{p,\theta}=\left\{f\in L_p(\mathbb{T}^d):\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}\overset{\mathrm{df}}{=}\|f\|_p+\|f\|_{b^{\Omega}_{p,\theta}}\le 1\right\},$$

де

$$\|f\|_{b^{\Omega}_{p,\theta}}=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{1/\theta}, & 1\le\theta<\infty,\\ \displaystyle\sup_{t>0}\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta=\infty.\end{cases}$$

Якщо $\Omega(t)=t^r$, то класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з класами О. В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [5] і, зокрема, при $\theta=\infty$ та $\Omega(t)=t^r$ $B^r_{p,\infty}=H^r_p$, де H^r_p — класи, введені С. М. Нікольським [6].

Перейдемо безпосередньо до означення апроксимативної характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, що буде досліджуватись у даній роботі.

Для функції $f\in L_q(\mathbb{T}^d)$, $1\le q\le\infty$, в якості наближаючого полінома за системою експонент $\{e^{i(k^j,x)}\}_{j=1}^M$ будемо використовувати поліном

$$S_M(f,x)=\sum_{j=1}^{M}\hat f(k^j)e^{i(k^j,x)}$$

і розглядати величину

$$e_M^{\perp}(f)_q = \inf_{\{k^j\}_{j=1}^M} \left\| f(x) - S_M(f,x) \right\|_q ,$$

де $\{k^j\}_{j=1}^M$ — набір векторів $k^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j)$ з цілочисловими координатами, $(k^j, x) = k_1^j x_1 + \ldots + k_d^j x_d$ і

$$\hat{f}(k^j) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-i(k^j,t)}\, dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f.

Якщо $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ — деякий клас функцій, то покладаємо

$$e_M^{\perp}(F)_q = \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_q . \tag{1}$$

Величину $e_M^{\perp}(F)_q$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі L_q.

Величини $e_M^{\perp}(F)_q$ для деяких класів функцій вивчалися в роботах Е. С. Бєлінського [7] та А. С. Романюка [8 – 10], в яких можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

Отримані результати будемо формулювати у термінах порядкових співвідношень. Для додатних функцій $\mu_1(N)$ та $\mu_2(N)$ запис $\mu_1 \ll \mu_2$ означає, що існує стала $C > 0$ така, що $\mu_1(N) \le C\mu_2(N)$. Співвідношення $\mu_1 \asymp \mu_2$ рівносильне тому, що виконуються порядкові нерівності $\mu_1 \ll \mu_2$ та $\mu_1 \gg \mu_2$. Зауважимо, що всі сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати лише від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$.

Для величин, означених рівністю (1), має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай* $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $(p, q) \ne (1, 1), (\infty, \infty)$ *і* $\Omega(t)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > d(1/p - 1/q)_+$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $M \in \mathbb{N}$ *має місце оцінка*

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega})_q \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{(1/p-1/q)_+} , \tag{2}$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Як наслідок, поклавши в теоремі $\theta = \infty$ і взявши до уваги, що $B_{p,\infty}^{\Omega} = H_p^{\Omega}$, можемо записати співвідношення

$$e_M^{\perp}(H_p^{\Omega})_q \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{(1/p-1/q)_+} .$$

***Зауваження* 1.** Якщо $\Omega(t) = t^r$, $r > d(1/p - 1/q)_+$, то виконується співвідношення

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{r})_q \asymp M^{-r/d+(1/p-1/q)_+} . \tag{3}$$

Оцінку (3) встановлено в роботі [10].

***Зауваження* 2.** В одновимірному випадку класи, що розглядаються в даній роботі, збігаються з іншими аналогами класів Бєсова $B_{p,\theta}^{\Omega}$, де $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності, $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$. Тому, поклавши в (2) $d = 1$, отримаємо точні за порядком оцінки величин $e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$, які при певних співвідношеннях між параметрами p та q були отримані в роботах [11, 12]. Крім цього в (2) містяться і нові результати в одновимірному випадку для співвідношень $p = \infty$, $1 \le q < \infty$ та $1 < p \le \infty$, $q = 1$.

2. Допоміжні твердження. Спочатку введемо деякі позначення. Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m} \right) \cos kt .$$

Тоді багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, означимо згідно з формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j) .$$

Нехай V_m — оператор, який задає згортку функцій $f(x)$ із багатовимірним ядром $V_m(x)$, тобто

$$V_m f = f * V_m = V_m(f, x) .$$

Таким чином, $V_m(f, x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції $f(x)$. Покладемо для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$

$$\Phi_0(f, x) = V_1(f, x), \qquad \Phi_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Наведемо кілька відомих тверджень, які будемо використовувати далі в роботі.

Лема 1 [13]. *Нехай* $1 \le p, \theta \le \infty$ *і* $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}$. *Тоді, функцію* f *можна зобразити у вигляді ряду*

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi_s(f, x),$$

збіжного до цієї функції у просторі $L_p(\mathbb{T}^d)$, *причому*

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s=0}^{\infty} \left(\dfrac{\| \Phi_s(f, x) \|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s} \dfrac{\| \Phi_s(f, x) \|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{4}$$

Варто зазначити, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентне співвідношення для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, використовуючи в (4) замість $\Phi_s(f, x)$ „блоки” ряду Фур’є функції $f(x)$.

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ введемо позначення:

$$f_0(x) = \hat{f}(0) \quad \text{і} \quad f_s(x) = \sum_{\substack{2^{s-1} \le \max\limits_{j=\overline{1,d}} |k_j| < 2^s}} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Таким чином, при $1 < p < \infty$ з точністю до абсолютних сталих будемо мати

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s=0}^{\infty} \left(\dfrac{\|f_s(x)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{s} \dfrac{\|f_s(x)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{5}$$

Лема 2 [13]. *Нехай* $1 \le p < q \le \infty$ *і* $\Omega(t)/t^{\alpha}$ *при* $\alpha > d(1/p - 1/q)$ *майже зростає. Тоді* $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega_1}_{q,\theta}$, *де* $\Omega_1(t) = \Omega(t)/t^{d(1/p-1/q)}$ *і*

$$\|f\|_{B^{\Omega_1}_{q,\theta}} \ll \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}}.$$

Теорема А [6]. *Нехай* $n = (n_1, \ldots, n_d)$, $n_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, *та*

$$t(x) = \sum_{|k_j| \le n_j} c_k e^{i(k,x)}.$$

Тоді при $1 \le q < p \le \infty$ *має місце нерівність*

$$\|t\|_p \le 2^d \left(\prod_{j=1}^{d} n_j \right)^{1/q - 1/p} \|t\|_q. \tag{6}$$

Нерівність (6) встановлена С. М. Нікольським і отримала назву „нерівності різних метрик”. У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [14].

3. Доведення теореми. Зважаючи на те, що права частина (2) від θ не залежить, а із збільшенням параметра θ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ розширюються, тобто при $1 \le \theta \le \theta' \le \infty$ мають місце вкладення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta'} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_{p},$$

необхідну оцінку зверху достатньо встановити для $e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\infty})_q$, а знизу — для $e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,1})_q$.

Нехай спочатку має місце випадок $1 \le p < q \le \infty$. Тоді за заданим M підберемо число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{nd} \asymp M$ та розглянемо для $f \in B^{\Omega}_{p,\infty}$ наближення її кубічною сумою Фур'є $S_M(f, x)$ вигляду

$$S_M(f, x) = \sum_{s=0}^{n} f_s(x).$$

Нехай q_0 — деяке число, що задовольняє умову $p < q_0 < q$. З огляду на те, що для $f \in B^{\Omega}_{p,\infty}$, $1 \le p \le \infty$, виконується співвідношення $\left\| \Phi_s(f,x) \right\|_p \le \le \Omega(2^{-s})$ (див. (4)), згідно з нерівністю різних метрик Нікольського та лемою 2 можемо записати

$$e^{\perp}_M(f)_q \le \left\| f(x) - S_M(f,x) \right\|_q = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_s(x) \right\|_q \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| f_s(x) \right\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/q_0 - 1/q)} \left\| f_s(x) \right\|_{q_0} \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/q_0 - 1/q)} \left\| \Phi_s(f,x) \right\|_{q_0} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/q_0 - 1/q)} 2^{sd(1/p - 1/q_0)} \left\| \Phi_s(f,x) \right\|_p = \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/p - 1/q)} \left\| \Phi_s(f,x) \right\|_p \le$$

$$\le \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/p - 1/q)} \Omega(2^{-s}) = I.$$

Оскільки $\Omega(t)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > d(1/p - 1/q)_+$, то має місце співвідношення

$$\frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} \le \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}, \quad s = n+1, \ldots .$$

Тому

$$I = \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(1/p - 1/q)} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-s(\alpha - d(1/p - 1/q))} \ll$$

$$\ll 2^{nd(1/p - 1/q)} \Omega(2^{-n}) \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{1/p - 1/q}.$$

Нехай тепер $1 < p = q < \infty$. Тоді в силу співвідношення (5) для $f \in B^{\Omega}_{p,\infty}$ при $2^{nd} \asymp M$ будемо мати

$$e^{\perp}_M(f)_q \le \left\| f(x) - S_M(f,x) \right\|_p = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_s(x) \right\|_p \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| f_s(x) \right\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s} \ll \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-\alpha s} \ll \Omega(2^{-n}) \asymp \Omega(M^{-1/d}). \qquad (7)$$

Нарешті оцінка зверху величини $e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\infty})_q$ у випадку $1 \le q < p < \infty$ випливає із (7) згідно із вкладенням $B^{\Omega}_{p,\infty} \subset B^{\Omega}_{q,\infty}$, тобто

$$e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\infty})_q \le e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{q,\infty})_q \asymp \Omega(M^{-1/d}), \qquad (8)$$

а при $1 \le q < \infty$ і $p = \infty$ відповідна оцінка є наслідком (8) згідно з вкладенням $B^{\Omega}_{\infty,\infty} \subset B^{\Omega}_{p,\infty}$.

Оцінки зверху в усіх випадках теореми доведено.

Тепер перейдемо до встановлення відповідних оцінок величин $e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ знизу, які, як зазначалося вище, достатньо встановити для класів $B^{\Omega}_{p,1}$. Нехай спочатку виконуються співвідношення $2 \le p < q < \infty$ або $1 < p \le 2 < q < \infty$. Для $f \in B^{\Omega}_{p,1}$ розглянемо наближаючий поліном

$$S_M(f, x) = \sum_{j=1}^{M} \hat{f}(k^j) e^{i(k^j, x)} .$$

Тоді на підставі наслідку Д 1.2 (див. [15, с. 392]) можемо записати

$$\| f(x) - S_M(f, x) \|_q = \sup_{g: \| g \|_{q'} \le 1} \left| \int_{\mathbb{T}^d} (f(x) - S_M(f, x)) g(x)\, dx \right|, \tag{9}$$

де $1/q + 1/q' = 1$.

З метою використання співвідношення (9) побудуємо відповідні функції. За заданим M підберемо $n \in \mathbb{N}$ з нерівності $2^{(n-2)d} \le M < 2^{(n-1)d}$ та розглянемо функцію

$$F_n(x) = \prod_{j=1}^{d} \sum_{|k_j| = 2^n}^{2^{n+1}-1} e^{ik_j x_j} .$$

Далі скористаємося відомим співвідношенням (див., наприклад, [16, с. 214])

$$\left\| \sum_{k=n}^{l} \cos kx \right\|_p \asymp (l - n)^{1-1/p} \quad \forall\, n, l \in \mathbb{N}, \quad l > n, \quad p \in (1, \infty),$$

згідно з яким

$$\left\| \sum_{|k_j| = 2^n}^{2^{n+1}-1} e^{ik_j x_j} \right\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}, \qquad 1 < p < \infty, \quad j = \overline{1, d} . \tag{10}$$

Таким чином, використовуючи (10), можемо записати

$$\| F_n \|_{B^{\Omega}_{p,1}} = \sum_s \Omega^{-1}(2^{-s}) \| (F_n)_s(x) \|_p = \Omega^{-1}(2^{-n-1}) \| F_n \|_p \asymp$$

$$\asymp \Omega^{-1}(2^{-n}) \| F_n \|_p \asymp \Omega^{-1}(2^{-n}) 2^{nd(1-1/p)}. \tag{11}$$

З (11) випливає, що функція

$$f_1(x) = C_3 \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1)} F_n(x)$$

при певному виборі сталої $C_3 > 0$ належить класу $B^{\Omega}_{p,1}$.

Далі, оскільки згідно з (10)

$$\| F_n \|_{q'} \asymp 2^{nd/q}, \quad 1 < q < \infty,$$

то функція

$$g_1(x) = C_4 2^{-nd/q} F_n(x)$$

із відповідною сталою $C_4 > 0$ задовольняє умову $\|g_1\|_{q'} \le 1$.

Таким чином, використавши співвідношення (9) для функцій $f_1(x)$ та $g_1(x)$, будемо мати

$$e_M^{\perp}(B_{p,1}^{\Omega})_q \ge e_M^{\perp}(f_1)_q = \inf_{S_M} \| f_1(x) - S_M(f_1, x) \|_q =$$

$$= \inf_{S_M} \sup_{\|g\|_{q'} \le 1} \left| \int_{\mathbb{T}^d} (f_1(x) - S_M(f_1, x)) g(x)\, dx \right| \gg$$

$$\gg \inf_{S_M} \left| \int_{\mathbb{T}^d} (f_1(x) - S_M(f_1, x)) g_1(x)\, dx \right| \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1)} 2^{-nd/q} \inf_{S_M} \left| \| F_n(x) \|_2^2 - \| S_M(F_n, x) \|_2^2 \right| \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1/q-1)} (2^{nd} - M) \gg \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1/q-1)} 2^{nd} =$$

$$= \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1/q)} \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{1/p-1/q}.$$

Нехай тепер має місце випадок $1 \le p < \infty$ та $q = \infty$. За заданим M підберемо таке число $n \in \mathbb{N}$, щоб виконувались співвідношення $2^{nd} \asymp M$ та $2^{nd} \ge 4M$, і покладемо

$$\upsilon_{n+1}(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{n+1}}(x_j) - V_{2^n}(x_j)).$$

Розглянемо функцію

$$f_2(x) = C_5 \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1)} \upsilon_{n+1}(x), \quad C_5 > 0.$$

Оскільки (див., наприклад, [17, с. 66])

$$\| \upsilon_{n+1} \|_p \asymp 2^{nd(1-1/p)}, \quad 1 \le p \le \infty, \tag{12}$$

то можна переконатися, що функція $f_2(x)$ із відповідною сталою $C_5 > 0$ належить класу $B_{p,1}^{\Omega}$. Дійсно, згідно з (4) можемо записати

$$\| f_2 \|_{B_{p,1}^{\Omega}} = \sum_s \frac{\| \Phi_s(f_2, x) \|_p}{\Omega(2^{-s})} \asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1)} \Omega^{-1}(2^{-n-1}) \| \upsilon_{n+1} \|_p \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1)} \Omega^{-1}(2^{-n}) 2^{nd(1-1/p)} = 1.$$

Нехай $S_M(f_2, x)$ — частинна сума, що складається з M довільних гармонік ряду Фур'є функції $f_2(x)$. Тоді, враховуючи, що

$$\| \upsilon_{n+1} \|_\infty \asymp 2^{nd},$$

маємо

$$e_M^{\perp}(B_{p,1}^{\Omega})_{\infty} \ge \left\| f_2(x) - S_M(f_2, x) \right\|_{\infty} \ge \left\| f_2(x) \right\|_{\infty} - \left\| S_M(f_2, x) \right\|_{\infty} \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1)} (2^{nd} - M) \asymp \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1/p-1)} 2^{nd} =$$

$$= \Omega(2^{-n}) 2^{nd/p} \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{1/p}.$$

Розглянемо випадок, коли $p = 1$ і $q \in (1, \infty)$. Знову скористаємося співвідношенням (9). В якості функцій $f(x)$ і $g(x)$ з (9) виберемо функції $f_2(x)$ при $p = 1$ та

$$g_2(x) = C_6 2^{-nd/q} \upsilon_{n+1}(x), \quad C_6 > 0,$$

відповідно.

Оскільки на підставі (12)

$$\left\| g_2 \right\|_{q'} \asymp 2^{-nd(1-1/q')} \left\| \upsilon_{n+1} \right\|_{q'} \asymp 2^{-nd(1-1/q')} 2^{nd(1-1/q')} = 1,$$

то при відповідному виборі сталої $C_6 > 0$ функція $g_2(x)$ задовольняє умову співвідношення (9) для функції $g(x)$.

Таким чином, застосувавши це співвідношення при $p = 1$ до функцій $f_2(x)$ і $g_2(x)$, матимемо

$$e_M^{\perp}(B_{1,1}^{\Omega})_q \ge e_M^{\perp}(f_2)_q = \inf_{S_M} \left\| f_2(x) - S_M(f_2, x) \right\|_q =$$

$$= \inf_{S_M} \sup_{\|g\|_{q'} \le 1} \left| \int_{\mathbb{T}^d} (f_2(x) - S_M(f_2, x)) g(x)\, dx \right| \gg$$

$$\gg \inf_{S_M} \left| \int_{\mathbb{T}^d} (f_2(x) - S_M(f_2, x)) g_2(x)\, dx \right| \gg$$

$$\gg \Omega(2^{-n}) 2^{-nd/q} \inf_{S_M} \left| \left\| \upsilon_{n+1}(x) \right\|_2^2 - \left\| S_M(\upsilon_{n+1}, x) \right\|_2^2 \right| \asymp$$

$$\asymp \Omega(2^{-n}) 2^{-nd/q} (2^{nd} - M) \asymp \Omega(2^{-n}) 2^{-nd/q} 2^{nd} =$$

$$= \Omega(2^{-n}) 2^{nd(1-1/q)} \asymp \Omega(M^{-1/d}) M^{1-1/q}.$$

Встановимо тепер оцінку знизу у випадку $1 \le q \le p \le \infty$. Для цього спочатку розглянемо випадок $q = 1$ та $p = \infty$.

Нехай B_{∞}^{n} — множина всіх тригонометричних поліномів $t(x)$ таких, що $\|t\|_{\infty} \le 1$. Покажемо, що для довільних $n \in \mathbb{N}$ згідно з означенням класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ має місце вкладення

$$C_7 \Omega(2^{-n}) B_{\infty}^{2^n} \subset B_{\infty,1}^{\Omega},$$

де $C_7 > 0$ — деяка стала.

Розглянемо багатовимірне ядро Валле Пуссена V_n, для якого, як відомо, виконується нерівність $\|V_n\|_1 \le C_8(d)$.

Використавши цю нерівність і взявши до уваги, що $\Omega(t)$ задовольняє умову (S), для довільного тригонометричного полінома $T \in B_{\infty}^{2^n}$ будемо мати

$$\left\|\Omega(2^{-n})T\right\|_{B^{\Omega}_{\infty,1}} \asymp \Omega(2^{-n})\sum_{s=0}^{n}\Omega^{-1}(2^{-s})\left\|\Phi_s(T,x)\right\|_{\infty} =$$

$$= \Omega(2^{-n})\sum_{s=0}^{n}\Omega^{-1}(2^{-s})\left\|V_{2^s}(T,x)-V_{2^{s-1}}(T,x)\right\|_{\infty} =$$

$$= \Omega(2^{-n})\sum_{s=0}^{n}\Omega^{-1}(2^{-s})\left\|T*(V_{2^s}-V_{2^{s-1}})\right\|_{\infty} \le$$

$$\le \Omega(2^{-n})\sum_{s=0}^{n}\Omega^{-1}(2^{-s})\left\|T\right\|_{\infty}\left\|V_{2^s}-V_{2^{s-1}}\right\|_{1} \le$$

$$\le \Omega(2^{-n})\sum_{s=0}^{n}\Omega^{-1}(2^{-s})\left\|T\right\|_{\infty}\left(\left\|V_{2^s}\right\|_1+\left\|V_{2^{s-1}}\right\|_1\right) \ll \Omega(2^{-n})\sum_{s=0}^{n}\Omega^{-1}(2^{-s}) =$$

$$= \Omega(2^{-n})\sum_{s=0}^{n}\frac{\Omega^{-1}(2^{-s})}{2^{\alpha s}}2^{\alpha s} \ll \Omega(2^{-n})\Omega^{-1}(2^{-n})2^{-\alpha n}2^{\alpha n} = 1.$$

У роботі [18] показано, що для величини найкращого M-членного тригонометричного наближення класу F у просторі L_q, яка визначається таким чином:

$$e_M(F)_q = \sup_{f\in F}\inf_{\{k^j\}_{j=1}^M}\inf_{\{c_j\}_{j=1}^M}\left\|f(x)-\sum_{j=1}^{M}c_j e^{i(k^j,x)}\right\|_q,$$

де c_j — довільні числа, для всіх $n\in\mathbb{N}$ та $M\le n^d/2$ при $1\le q\le\infty$ виконується співвідношення

$$e_M(B_{\infty}^{n})_q \ge C_9(d).$$

Тому, використовуючи це співвідношення при $q=1$ і $M=2^{nd-1}$, одержуємо

$$e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{\infty,\theta})_1 \ge e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{\infty,1})_1 \gg \Omega(2^{-n})e_M^{\perp}(B_{\infty}^{2^n})_1 \ge$$

$$\ge \Omega(2^{-n})e_M(B_{\infty}^{2^n})_1 \gg \Omega(2^{-n}) \asymp \Omega(M^{-1/d}). \tag{13}$$

Таким чином, внаслідок монотонності величини $e_M^{\perp}$ це співвідношення виконується для всіх $M\in\mathbb{N}$.

Для $1\le p,\theta\le\infty$ згідно з лемою 1

$$B^{\Omega}_{\infty,\theta} \subseteq B^{\Omega}_{p,\theta},$$

і тому, використавши (13), для довільних $1\le q\le\infty$ будемо мати

$$e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \ge e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta})_1 \ge e_M^{\perp}(B^{\Omega}_{\infty,\theta})_1 \gg \Omega(M^{-1/d}). \tag{14}$$

Це співвідношення доводить нижню оцінку в (2) у випадку $1 \le q \le p \le \infty$.

Перейдемо до знаходження оцінки знизу у випадку $1 \le q \le p \le 2$. Для цього розглянемо функцію

$$f(x) = C_{10}\Omega(n^{-1})n^{d(1/p-1)}V_n(x),$$

де числа n і M пов'язані співвідношенням $M \le n^d/2$, а $C_{10} > 0$ — деяка стала.

Покажемо, що при певному виборі сталої C_{10} ця функція належить класу $B^{\Omega}_{p,1}$. З цією метою знову розглянемо функцію $V_n(x)$.

Використовуючи нерівність різних метрик (6), маємо

$$\|V_n\|_p \ll n^{d(1-1/p)}\|V_n\|_1 \ll n^{d(1-1/p)}. \tag{15}$$

Згідно з означенням норми класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ та співвідношенням (15) можемо записати

$$\|V_n\|_{B^{\Omega}_{p,1}} \asymp \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s})\left\|\Phi_s(V_n,x)\right\|_p =$$

$$= \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s})\left\|V_n * (V_{2^s} - V_{2^{s-1}})\right\|_p \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s})\left\|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\right\|_1 \|V_n\|_p \le$$

$$\le \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s})\left(\left\|V_{2^s}\right\|_1 + \left\|V_{2^{s-1}}\right\|_1\right)\|V_n\|_p \ll$$

$$\ll n^{d(1-1/p)} \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \Omega^{-1}(2^{-s}) = n^{d(1-1/p)} \sum_{s=0}^{[\log_2 n]+2} \frac{\Omega^{-1}(2^{-s})}{2^{\alpha s}} 2^{\alpha s} \ll$$

$$\ll n^{d(1-1/p)}\Omega^{-1}(n^{-1})n^{-\alpha}n^{\alpha} = n^{d(1-1/p)}\Omega^{-1}(n^{-1}).$$

Звідси робимо висновок, що функція $f(x) = C_{10}\Omega(n^{-1})n^{d(1/p-1)}V_n(x)$ належить класу $B^{\Omega}_{p,1}$.

У роботі [18, с. 47] показано, що при $1 \le q \le \infty$ має місце оцінка

$$e_M(V_n)_q \gg n^{d(1-1/q)}, \quad M \le n^d/2. \tag{16}$$

Тому з (16) одержуємо

$$e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,1})_q \ge \Omega(n^{-1})n^{d(1/p-1)}e^{\perp}_M(V_n)_q \ge$$

$$\ge \Omega(n^{-1})n^{d(1/p-1)}e_M(V_n)_q \gg \Omega(n^{-1})n^{d(1/p-1/q)}, \quad M \le n^d/2.$$

Беручи $M = [n^d/2]$, де $[a]$ — ціла частина числа a, отримуємо оцінку знизу в (2) у випадку $1 \le p \le q \le 2$. Внаслідок монотонності величини $e^{\perp}_M$ це співвідношення в даному випадку виконується для всіх M, тому

$$e_M^{\perp}(B_{p,1}^{\Omega})_q \gg \Omega(M^{-1/d})M^{1/p-1/q}.$$

Таким чином, одержано оцінки знизу в усіх випадках.

Теорему доведено.

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
2. *Li Yongping, Xu Guiqiao.* The infinite-dimensional widths and optimal recovery of generalized Besov classes // J. Complexity. – 2002. – **18**, № 4. – P. 815 – 832.
3. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**. – P. 35 – 48.
4. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
5. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1163 – 1165.
6. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
7. *Белинский Э. С.* Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988. – С. 16 – 33.
8. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 2002. – **71**, № 1. – С. 109 – 121.
9. *Романюк А. С.* Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B_{p,\theta}^{r}$ периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2006. – **70**, № 2. – С. 68 – 97.
10. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 4. – С. 513 – 523.
11. *Стасюк С. А.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних $B_{p,\theta}^{\Omega}$ // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Математика та її застосування: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 195 – 208.
12. *Конограй А. Ф., Стасюк С. А.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **4**, № 1. – С. 151 – 171.
13. *Xy Guiqiao.* The n-widths for a generalized periodic Besov classes // Acta Math. Sci. – 2005. – **25B**, № 4. – P. 663 – 671.
14. *Jakson D.* Certain problem of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39**. – P. 889 – 906.
15. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
16. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
17. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
18. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation by trigonometric sums //J. Fourier Anal. Appl. – 1995. – **2**, № 1. – P. 29 – 48.

Одержано 15.04.09