УДК 517.5

**Т. В. Жигалло, Ю. І. Харкевич** (Волин. нац. ун-т, Луцьк)

# НАБЛИЖЕННЯ $(\psi, \beta)$-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА У РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ*

We obtain asymptotic equalities for upper bounds of approximations of functions from the class $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ by the Poisson integrals in metric of the space $C$.

Получены асимптотические равенства для верхних граней приближений функций из класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ интегралами Пуассона в метрике пространства $C$.

**1. Постановка задачі та деякі історичні відомості.** Нехай $C$ — простір $2\pi$-періодичних неперервних функцій із нормою $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$, $L_\infty$ — простір $2\pi$-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$, $L_1$ — простір $2\pi$-періодичних сумовних функцій з нормою $\|f\|_{L_1} = \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

У 1983 р. О. І. Степанцем запропоновано новий підхід до класифікації періодичних функцій, в основу якого покладено поняття $(\psi, \beta)$-похідної (див., наприклад, [1 – 4]). Було введено класи $L^{\psi}_{\beta}$ функцій $f \in L_1$ таким чином. Нехай послідовність $\psi = \psi(k)$ і параметр $\beta$ такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \tag{1}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\Psi_\beta(t)$. Тоді для довільної $f \in L^{\psi}_{\beta}$ майже для всіх $x \in R$ виконується рівність

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)\, \Psi_\beta(t)dt,$$

де $\varphi(\cdot)$ — деяка функція з $L_1$, $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0$. Функцію $\varphi$ називають $(\psi, \beta)$-похідною функції $f$ і позначають $f^{\psi}_{\beta}$.

Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subseteq L_1$, то кажуть, що $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій з $L^{\psi}_{\beta}$ та $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають відповідно через $C^{\psi}_{\beta}$ та $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Далі, коли $\mathfrak{N}$ збігається з одиничною кулею простору $L_\infty$, тобто $\mathfrak{N} = \{f^{\psi}_{\beta} \in L_\infty : \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f^{\psi}_{\beta}(t)| \le 1\}$, класи $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають через $C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ збігаються з класами $W^r_{\beta,\infty}$ і $f^{\psi}_{\beta}(x) = f^{(r)}_{\beta}(x)$ — $(r, \beta)$-похідна в розумінні Вейля – Надя [5]. Якщо, крім цього, $\beta = r$, $r \in N$, то $f^{\psi}_{\beta}$ є похідною порядку $r$ функції $f$ і класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ є відомими класами Соболєва $W^r_\infty$.

Наслідуючи О. І. Степанця (див., наприклад, [4, с. 155]), через $\mathfrak{M}$ будемо позначати множину всіх опуклих донизу послідовностей $\psi(k)$, для яких $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(k) = 0$.

*Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант 25.1/043).

Якщо послідовність $\psi(k)$ задовольняє умови $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\psi(k)}{k} < \infty$, то, згідно з теоремою 1.7.3 роботи [3, с. 28], ряд (1) буде рядом Фур'є функції $\Psi_\beta(t)$.

Не зменшуючи загальності будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$ із множини $\mathfrak{M}$ є звуженнями на множині натуральних чисел деяких додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, що прямують до нуля на нескінченності. Множину таких функцій теж будемо позначати через $\mathfrak{M}$. Отже, далі

$$\mathfrak{M} = \Big\{ \psi(t)\colon \quad \psi(t) > 0, \quad \psi(t_1) - 2\psi\left((t_1+t_2)/2\right) + \psi(t_2) \geq 0$$

$$\forall t_1,\ t_2 \in [1,\infty), \quad \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0 \Big\}.$$

Множину функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\psi(t)}{t} dt < \infty$, позначимо через $\mathfrak{M}'$. Із множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножину $\mathfrak{M}_0$ (див., наприклад, [4, с. 160])

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \psi \in \mathfrak{M}\colon \quad 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K \quad \forall t \geq 1 \right\},$$

де $\eta(t) = \eta(\psi, t) = \psi^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\psi(t)\right)$, $\psi^{-1}$ — функція, обернена до функції $\psi$, а $K$ — константа, яка може залежати від $\psi$.

Нехай $f \in L_1$. Величину

$$P_\delta(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k/\delta} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad \delta > 0,$$

де $a_0$, $a_k$, $b_k$ — коефіцієнти Фур'є функції $f$, називають інтегралом Пуассона (див., наприклад, [6, с. 161]).

У даній роботі вивчається асимптотична поведінка при $\delta \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_\delta\right)_C = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| f(\cdot) - P_\delta(f;\cdot) \right\|_C. \tag{2}$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(\delta) = \varphi(\mathfrak{N};\delta)$ таку, що при $\delta \to \infty$

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N}; P_\delta\right)_X = \varphi\left(\delta\right) + o\left(\varphi\left(\delta\right)\right),$$

то, наслідуючи О. І. Степанця [4, с. 198], будемо говорити, що розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для інтеграла Пуассона $P_\delta(f;x)$ на класі $\mathfrak{N}$ у метриці простору $X$.

Зауважимо, що задачу Колмогорова – Нікольського на класах Соболєва $W^1_\infty$ для функцій $P_\delta(f;x)$ розв'язав І. П. Натансон (див. роботу [7]). Точні значення верхніх меж відхилень інтегралів Пуассона від функцій з класу $W^r_\infty$, $r > 0$, отримано в роботі О. П. Тімана [8]. Розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського на класі $W^r_{\beta,\infty}$, $r > 0$, $\beta \in R$, знайдено у роботі Л. І. Баусова [9]. Зокрема, для класу $W^1_{\beta,\infty}$ він отримав асимптотичну рівність

$$\mathcal{E}\left(W^1_{\beta,\infty}; P_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi} \left| \sin\frac{\beta\pi}{2} \right| \frac{\ln\delta}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{3}$$

Апроксимативні властивості методу наближення інтегралами Пуассона на інших класах диференційовних функцій досліджувались також у роботах авторів [10, 11].

**2. Деякі оцінки для інтегралів Фур'є.** Для дослідження асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величини (2) необхідно спочатку з'ясувати умови, при яких перетворення Фур'є $\hat{\tau}(t)$ вигляду

$$\hat{\tau}(t) = \hat{\tau}_\delta(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \tag{4}$$

для функції $\tau(\cdot)$, що задана за допомогою співвідношення

$$\tau(u) = \tau_\delta(u;\psi) = \begin{cases} (1 - e^{-u})\,\dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\delta}, \\ (1 - e^{-u})\,\dfrac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, & u \ge \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{5}$$

буде сумовним на всій числовій осі.

Для вияснення цього питання потрібні наступні твердження.

**Означення** [9, с. 18]. *Нехай функція $\tau(u)$ задана на $[0,\infty)$, абсолютно неперервна і $\tau(\infty) = 0$. Кажуть, що функція $\tau(u)$ належить $\mathcal{E}_1$, якщо похідну $\tau'(u)$ в тих точках, де вона не існує, можна доозначити так, щоб існували інтеграли* $\displaystyle\int_0^{1/2} u|d\tau'(u)|$, $\displaystyle\int_{1/2}^\infty |u-1||d\tau'(u)|$.

**Твердження 1** [9, с. 19]. *Якщо $\tau(u) \in \mathcal{E}_1$, то*

$$|\tau(u)| \le H(\tau), \tag{6}$$

*де величина $H(\tau)$ визначається рівністю*

$$H(\tau) = |\tau(0)| + |\tau(1)| + \int\limits_0^{1/2} u\,|d\tau'(u)| + \int\limits_{1/2}^\infty |u-1|\,|d\tau'(u)|\,. \tag{7}$$

**Твердження 2** [4, с. 161]. *Функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належить до $\mathfrak{M}_0$ тоді і лише тоді, коли величина*

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t\,|\psi'(t)|}, \qquad \psi'(t) = \psi'(t+0), \tag{8}$$

*задовольняє умову $\alpha(t) \ge K > 0$ $\forall t \ge 1$.*

**Твердження 3** [4, с. 175]. *Для того щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала до $\mathfrak{M}_0$, необхідно і достатньо, щоб для довільного фіксованого числа $c > 1$ існувала стала $K$ така, що при всіх $t \ge 1$ виконується нерівність*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(ct)} \le K.$$

Далі через $K$, $K_i$ будемо позначати сталі, взагалі кажучи, різні.

Покладемо $\mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$. Має місце таке твердження.

**Лема 1.** *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_0'$, функція $g(u) = u\psi(u)$ опукла догори або донизу на $[b, \infty)$, $b \geq 1$. Тоді для функції $\tau(\cdot)$, що задана за допомогою співвідношення* (5), *її перетворення Фур'є вигляду* (4) *є сумовним на всій числовій осі, тобто інтеграл*

$$A(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tau}_\delta(t)\right| dt, \quad \delta \to \infty, \tag{9}$$

*є збіжним.*

***Доведення.*** Для того щоб показати збіжність інтеграла (9), згідно з теоремою 1 роботи [9], знайдемо оцінки таких інтегралів:

$$\int\limits_0^{1/2} u\left|d\tau'(u)\right|, \qquad \int\limits_{1/2}^{\infty} |u-1|\left|d\tau'(u)\right|, \tag{10}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_0^{\infty} \frac{|\tau(u)|}{u} du, \qquad \int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u} du. \tag{11}$$

Для оцінки першого інтеграла з (10) розіб'ємо проміжок $[0; 1/2]$ на дві частини: $[0; 1/\delta]$ та $[1/\delta; 1/2]$ (при $\delta > 2b$). Оскільки $\tau''(u) < 0$ на $[0, 1/\delta]$, то, враховуючи, що

$$1 - e^{-u} < u, \quad u \geq 0, \tag{12}$$

отримуємо

$$\int\limits_0^{1/\delta} u\left|d\tau'(u)\right| = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)} \left(1 - \frac{1}{\delta} e^{-1/\delta} - e^{-1/\delta}\right) = O\left(\frac{1}{\delta^2 \psi(\delta)}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{13}$$

Нехай тепер $u \in [1/\delta; 1/2]$. Покладемо $\tau(u) = \tau_1(u) + \tau_2(u)$, де

$$\tau_1(u) = \left(1 - e^{-u} - u\right) \frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{14}$$

$$\tau_2(u) = u \frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}, \tag{15}$$

тоді

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau'(u)| \leq \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_1'(u)| + \int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_2'(u)|, \quad \delta > 2. \tag{16}$$

Оцінимо перший інтеграл із правої частини нерівності (16). Для цього дослідимо спочатку функцію

$$\overline{\mu}(u) = 1 - e^{-u} - u. \tag{17}$$

З того, що $\overline{\mu}'(u) = e^{-u} - 1$, $\overline{\mu}''(u) = -e^{-u}$, $\overline{\mu}(0) = 0$, $\overline{\mu}'(0) = 0$, випливає, що при $u \geq 0$

$$\overline{\mu}(u) \leq 0, \qquad \overline{\mu}'(u) \leq 0, \qquad \overline{\mu}''(u) < 0. \tag{18}$$

Враховуючи (18), (12) і те, що $e^{-u} \leq 1 - u + \dfrac{u^2}{2}$, $u \geq 0$, одержуємо

$$\left|\overline{\mu}(u)\right| = u-1+e^{-u} \le \frac{u^2}{2}, \qquad \left|\overline{\mu}'(u)\right| = 1-e^{-u} \le u, \qquad \left|\overline{\mu}''(u)\right| = e^{-u} \le 1. \quad (19)$$

Оскільки при $u \ge 1/\delta$, згідно з (14) та (17),

$$\left|d\tau_1'(u)\right| \le \left(\left|\overline{\mu}(u)\right|\frac{\delta^2\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)} + 2\left|\overline{\mu}'(u)\right|\frac{\delta|\psi'(\delta u)|}{\psi(\delta)} + \left|\overline{\mu}''(u)\right|\frac{\psi(\delta u)}{\psi(\delta)}\right)du, \qquad (20)$$

то з урахуванням (19) маємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_1'(u)| \le \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2}\frac{u^3}{2}\delta^2\psi''(\delta u)du +$$

$$+\frac{2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^2\delta\,|\psi'(\delta u)|\,du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\psi(\delta u)du.$$

Інтегруючи перший інтеграл правої частини останньої нерівності частинами, отримуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_1'(u)| \le \frac{1}{\psi(\delta)}\left.\frac{u^3}{2}\delta\psi'(\delta u)\right|_{1/\delta}^{1/2} +$$

$$+\frac{7}{2\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^2\delta\,|\psi'(\delta u)|\,du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\psi(\delta u)du. \qquad (21)$$

Використовуючи умову твердження 2, для $\psi \in \mathfrak{M}_0$ маємо

$$\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u^2\delta\,|\psi'(\delta u)|\,du \le \frac{K}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\psi(\delta u)du.$$

Тоді з (21) на підставі твердження 3 одержуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\left|d\tau_1'(u)\right| \le K_1 + \frac{K_2}{\delta^2\psi(\delta)} + \frac{K_3}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u\psi(\delta u)du. \qquad (22)$$

Розглянемо інтеграл із правої частини нерівності (22) на проміжках $[1/\delta, b/\delta]$ та $[b/\delta, 1/2]$, $\delta > 2b$. Оскільки функція $g(u) = u\psi(u)$ обмежена на $[1,b]$, то

$$\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\psi(\delta u)du = \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{b} g(u)du \le \frac{K}{\delta^2\psi(\delta)}. \qquad (23)$$

Далі, оскільки функція $g(u)$ опукла догори або донизу при $u \ge b$ і $g(u) \ne 0$, то при $u \in [b,\delta]$ можливі лише два випадки: або $u\psi(u) \le b\psi(b)$, або $u\psi(u) \le \delta\psi(\delta)$. Отже, при $\delta \to \infty$

$$\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{b/\delta}^{1/2} u\psi(\delta u)du = \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{b}^{\delta/2} g(u)du \le$$

$$\le \frac{1}{\delta^2\psi(\delta)}\int\limits_{b}^{\delta} g(u)du = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \qquad (24)$$

Враховуючи (23) та (24), з (22) отримуємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{1/2} u|d\tau_1'(u)| = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \quad \delta\to\infty. \qquad (25)$$

Оцінимо другий інтеграл із правої частини нерівності (16) на проміжку $[1/\delta, b/\delta]$, $\delta > 2b$. Із (15) випливає

$$\tau_2''(u) = 2\delta\frac{\psi'(\delta u)}{\psi(\delta)} + \delta^2\frac{u\psi''(\delta u)}{\psi(\delta)}. \qquad (26)$$

Використовуючи співвідношення (26) і враховуючи, що функція $\psi(u)$ є спадною та опуклою донизу при $u \ge 1$, маємо

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\big|d\tau_2'(u)\big| \le \frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u^2\psi''(\delta u)du + \frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\big|\psi'(\delta u)\big|du.$$

Оскільки $\psi(\delta u) \le \psi(1)$ при $u \in [1/\delta, b/\delta]$, $\delta > 2b$, то на підставі твердження 2 для функції $\psi \in \mathfrak{M}_0$ отримуємо

$$\frac{\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\,|\psi'(\delta u)|\,du \le \frac{K}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta}\psi(\delta u)du \le \frac{K\psi(1)(b-1)}{\delta\psi(\delta)}.$$

Далі, інтегруючи частинами, знаходимо

$$\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u^2\psi''(\delta u)du \le \frac{K_1}{\delta\psi(\delta)}.$$

І тому

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u|d\tau_2'(u)| \le \frac{K_2}{\delta\psi(\delta)}. \qquad (27)$$

Знайдемо оцінку другого інтеграла із правої частини нерівності (16) на проміжку $[b/\delta, 1/2]$, $\delta > 2b$. Оскільки функція $g(u) = u\psi(u)$ опукла на $[b;\infty)$, то

$$\int\limits_{b/\delta}^{1/2} u\big|d\tau_2'(u)\big| = \left|\int\limits_{b/\delta}^{1/2} ud\tau_2'(u)\right| = \left|\big(u\tau_2'(u)-\tau_2(u)\big)\Big|_{b/\delta}^{1/2}\right| = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \qquad (28)$$

Отже, із співвідношень (13), (16), (25), (27) та (28) випливає

$$\int\limits_0^{1/2} u|d\tau'(u)| = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{29}$$

Оцінимо другий інтеграл з (10). При $u\in[1/\delta;\infty)$, згідно з (5), маємо

$$\psi(\delta)d\tau'(u) = \Big\{(1-e^{-u})\delta^2\psi''(\delta u) + 2\delta e^{-u}\psi'(\delta u) - e^{-u}\psi(\delta u)\Big\}du. \tag{30}$$

Тоді, враховуючи (30) та властивості функції $\psi\in\mathfrak{M}$, дістаємо

$$\int\limits_{1/2}^{\infty}|u-1|\big|d\tau'(u)\big| \le \int\limits_{1/2}^{\infty}u|d\tau'(u)| \le \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}u\left(1-e^{-u}\right)\delta^2\psi''(\delta u)du+$$

$$+\frac{2\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}ue^{-u}\left|\psi'(\delta u)\right|du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}ue^{-u}\psi(\delta u)du. \tag{31}$$

Оскільки $1-e^{-u}\le 1$ при $u\ge 0$, $ue^{-u}\le K$ і $\psi(\delta u)\le\psi(\delta/2)$ при $u\in[1/2;\infty)$, $\delta\ge 2$, то з (31) випливає

$$\int\limits_{1/2}^{\infty}|u-1|\big|d\tau'(u)\big| \le$$

$$\le \frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}u\psi''(\delta u)du + \frac{2K\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}\left|\psi'(\delta u)\right|du + \frac{\psi\left(\dfrac{\delta}{2}\right)}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}ue^{-u}du. \tag{32}$$

На підставі твердження 3 для неперервної функції $\psi(\delta u)\in\mathfrak{M}_0$, $u\ge 1/2$, $\delta\ge 2$, знаходимо

$$\frac{\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}\left|\psi'(\delta u)\right|du = -\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}d\psi(\delta u)\le K. \tag{33}$$

Далі покажемо, що для будь-якої функції $\psi\in\mathfrak{M}$

$$\lim_{u\to\infty}u\psi'(u) = 0. \tag{34}$$

Дійсно, оскільки функція $|\psi'(u)|$ при $u\ge 1$ спадна, то

$$\frac{1}{2}\lim_{u\to\infty}u|\psi'(u)| = \lim_{\delta\to\infty}\frac{\delta}{2}|\psi'(\delta)| = \lim_{\delta\to\infty}\left(\delta-\frac{\delta}{2}\right)|\psi'(\delta)| \le$$

$$\le \lim_{\delta\to\infty}\int\limits_{\delta/2}^{\delta}|\psi'(u)|du \le -\lim_{\delta\to\infty}\int\limits_{\delta/2}^{\infty}\psi'(u)du = \lim_{\delta\to\infty}\psi\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0.$$

Знайдемо оцінку першого інтеграла з правої частини нерівності (32). Беручи до уваги (33), (34), твердження 2 та 3, отримуємо

$$\frac{\delta^2}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty} u\psi''(\delta u)du = \frac{\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty} ud\psi'(\delta u) =$$

$$= \frac{\delta}{\psi(\delta)}\lim_{u\to\infty} u\psi'(\delta u) + \frac{\frac{\delta}{2}\left|\psi'\left(\frac{\delta}{2}\right)\right|}{\psi(\delta)} + \frac{\delta}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/2}^{\infty}|\psi'(\delta u)|\,du \le K_1. \tag{35}$$

Поєднуючи співвідношення (32), (33) та (35), переконуємося, що

$$\int\limits_{1/2}^{\infty}|u-1|\big|d\tau'(u)\big| = O(1). \tag{36}$$

Для оцінки першого інтеграла з (11) розіб'ємо проміжок $[0;\infty)$ на три частини: $[0;1/\delta]$, $[1/\delta;1]$ та $[1,\infty)$. Використовуючи співвідношення (5) і (12), одержуємо

$$\int\limits_{0}^{1/\delta}\frac{\tau(u)}{u}du = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_{0}^{1/\delta}\left(1-e^{-u}\right)\frac{du}{u} \le \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\int\limits_{0}^{1/\delta}u\frac{du}{u} = \frac{\psi(1)}{\delta\psi(\delta)}. \tag{37}$$

Із співвідношень (5), (17), (19) та з оцінок (23), (24) маємо

$$\left|\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{\tau(u)}{u}du - \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\psi(\delta u)du\right| \le \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{\left|\overline{\mu}(u)\right|}{u}\psi(\delta u)du \le$$

$$\le \frac{1}{2\psi(\delta)}\left(\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} + \int\limits_{b/\delta}^{1}\right)u\psi(\delta u)du = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right).$$

Звідси

$$\int\limits_{1/\delta}^{1}\frac{\tau(u)}{u}du = \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du + O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{38}$$

Враховуючи спадання функції $\psi(u)$ при $u\ge 1$, знаходимо

$$\left|\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\tau(u)}{u}du - \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right| = \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\psi(\delta u)du \le \int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du \le K. \tag{39}$$

Із співвідношень (37) – (39) випливає

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du = \frac{1}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du + \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du + O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \tag{40}$$

Оцінимо другий інтеграл із (11). Із співвідношення (5) знайдемо вигляд функцій $\tau(1-u)$ і $\tau(1+u)$:

$$\tau(1-u) = \begin{cases} \left(1 - e^{-(1-u)}\right) \dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & 1 - \dfrac{1}{\delta} \le u \le 1, \\ \left(1 - e^{-(1-u)}\right) \dfrac{\psi(\delta(1-u))}{\psi(\delta)}, & u \le 1 - \dfrac{1}{\delta}, \end{cases} \tag{41}$$

$$\tau(1+u) = \begin{cases} \left(1 - e^{-(1+u)}\right) \dfrac{\psi(1)}{\psi(\delta)}, & -1 \le u \le \dfrac{1}{\delta} - 1, \\ \left(1 - e^{-(1+u)}\right) \dfrac{\psi(\delta(1+u))}{\psi(\delta)}, & u \ge \dfrac{1}{\delta} - 1. \end{cases} \tag{42}$$

Подамо другий інтеграл із (11) у вигляді суми двох інтегралів

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u} du =$$

$$= \int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u} du + \int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u} du. \tag{43}$$

Оцінимо спочатку перший доданок у правій частині (43). З цією метою додамо і віднімемо під знаком модуля в підінтегральній функції величину

$$e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}.$$

Отримаємо

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{|\tau(1-u) - \tau(1+u)|}{u} du \le \int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{\left|e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du +$$

$$+ \int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u) + e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du. \tag{44}$$

Для першого інтеграла з правої частини нерівності (44) є очевидною оцінка

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \left|e^{-1+u} - e^{-1-u}\right| \frac{du}{u} = O(1). \tag{45}$$

Далі, оскільки мають місце співвідношення (41) і (42), то при $u \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{\delta}\right]$

$$e^{-(1-u)} = 1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))} \tau(1-u), \qquad e^{-(1+u)} = 1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))} \tau(1+u).$$

Тоді

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u) + e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du \le$$

$$\leq \int\limits_0^{1-1/\delta} \big|\tau(1-u)\big| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))}\right| \frac{du}{u}+$$

$$+\int\limits_0^{1-1/\delta} \big|\tau(1+u)\big| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\right| \frac{du}{u}. \tag{46}$$

Оскільки функція $\tau(\cdot)$ вигляду (5) належить множині $\mathcal{E}_1$, то має місце твердження 1, згідно з яким

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \big|\tau(1-u)\big| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1-u))}\right| \frac{du}{u}+\int\limits_0^{1-1/\delta} \big|\tau(1+u)\big| \left|1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\right| \frac{du}{u}=$$

$$=H(\tau)\,O\left(\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\psi(\delta(1-u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1-u))}du+\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))}du\right). \tag{47}$$

Покажемо, що при $\delta\to\infty$

$$I_{1,\delta}:=\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\psi(\delta(1-u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1-u))}du=O(1), \tag{48}$$

$$I_{2,\delta}:=\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))}du=O(1), \tag{49}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по $\delta$.

Дійсно, функція $\dfrac{1-\psi(\delta)/\psi(\delta(1-u))}{u}$ обмежена при всіх $u\in\left[\delta,1-\dfrac{1}{\delta}\right]$, $0<$ $<\delta<1-\dfrac{1}{\delta}$ і, крім того, з урахуванням твердження 2 для $\psi\in\mathfrak{M}_0$

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\psi(\delta)/\psi(\delta(1-u))}{u}=\frac{\delta\,|\psi'(\delta)|}{\psi(\delta)}\leq K.$$

Отже, $I_{1,\delta}=O(1)$, $\delta\to\infty$. Переходячи до оцінки інтеграла $I_{2,\delta}$, зауважимо, що

$$I_{2,\delta}<\frac{1}{\psi(2\delta-1)}\int\limits_0^{1-1/\delta}\frac{\psi(\delta)-\psi\left(\delta\left(1+u\right)\right)}{u}du.$$

Після заміни змінної $v=\delta(1+u)$ отримуємо

$$I_{2,\delta}<\frac{1}{\psi(2\delta-1)}\int\limits_\delta^{2\delta-1}\frac{\psi(\delta)-\psi\left(v\right)}{v-\delta}dv<\frac{1}{\psi(2\delta-1)}\int\limits_\delta^{2\delta}\frac{\psi(\delta)-\psi\left(v\right)}{v-\delta}dv.$$

Застосовуючи до правої частини останньої нерівності лему 5.5 з роботи [3, с. 97] та враховуючи, що $\psi(2\delta-1)\geq\psi(2\delta)$, $\delta\geq 1$, на підставі твердження 3 одержуємо

$$I_{2,\delta} < \frac{K_1 \psi(\delta)}{\psi(2\delta - 1)} \le \frac{K_1 \psi(\delta)}{\psi(2\delta)} \le K_2.$$

Поєднання співвідношень (46) та (47) – (49) дозволяє записати

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u) + e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du = H(\tau) O(1), \quad \delta \to \infty.$$

Для величини $H(\tau)$ вигляду (7), згідно з (5), (29) та (36), справедливою є оцінка

$$H(\tau) = O\left(1 + \frac{1}{\delta \psi(\delta)}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{50}$$

Отже, при $\delta \to \infty$

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u) + e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta \psi(\delta)}\right). \tag{51}$$

Співставляючи (44), (45) та (51), отримуємо

$$\int\limits_0^{1-1/\delta} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u)\right|}{u} du = O\left(1 + \frac{1}{\delta \psi(\delta)}\right). \tag{52}$$

Оцінимо другий доданок із правої частини рівності (43). Маємо

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u)\right|}{u} du = \int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{\left|e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du +$$

$$+ O\left(\int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u) + e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du\right). \tag{53}$$

Із співвідношень (41) і (42) при $u \in \left[1 - \frac{1}{\delta}; 1\right]$ випливають рівності

$$e^{-(1-u)} = 1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(1)} \tau(1-u), \qquad e^{-(1+u)} = 1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))} \tau(1+u),$$

враховуючи які, згідно з твердженням 1, знаходимо

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1} \frac{\left|\tau(1-u) - \tau(1+u) + e^{-(1-u)} - e^{-(1+u)}\right|}{u} du =$$

$$= \int\limits_{1-1/\delta}^{1} \left|\tau(1-u)\left(1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\right) - \tau(1+u)\left(1 - \frac{\psi(\delta)}{\psi(\delta(1+u))}\right)\right| \frac{du}{u} =$$

$$= H(\tau)O\left(\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\psi(1)-\psi(\delta)|}{u\psi(1)}du+\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))}du\right). \qquad (54)$$

Далі отримуємо

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\psi(1)-\psi(\delta)|}{u\psi(1)}du=\left(1-\frac{\psi(\delta)}{\psi(1)}\right)\ln\frac{1}{1-1/\delta}=O(1). \qquad (55)$$

Повторюючи міркування, наведені при встановленні оцінки (49), можна показати, що при $\delta\to\infty$

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{|\psi(\delta(1+u))-\psi(\delta)|}{u\psi(\delta(1+u))}du=O(1). \qquad (56)$$

Об'єднуючи співвідношення (54) – (56) із (53) та враховуючи (50) і той факт, що

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{\left|e^{-(1-u)}-e^{-(1+u)}\right|}{u}du=O(1),$$

записуємо таку оцінку:

$$\int\limits_{1-1/\delta}^{1}\frac{\left|\tau(1-u)-\tau(1+u)\right|}{u}du=O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right),\quad \delta\to\infty. \qquad (57)$$

Із рівності (43) на підставі оцінок (52), (57) маємо

$$\int\limits_{0}^{1}|\tau(1-u)-\tau(1+u)|\,\frac{du}{u}=O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right),\quad \delta\to\infty. \qquad (58)$$

Отже, за теоремою 1 роботи [9] інтеграл $A(\tau)$ вигляду (9) є збіжним.

Лему 1 доведено.

**3. Асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень інтегралів Пуассона від функцій з класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ у рівномірній метриці.** Має місце таке твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_0'$, функція $g(u)=u\psi(u)$ опукла догори або донизу на $[b,\infty)$, $b\geq 1$. Тоді при $\delta\to\infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};P_\delta\right)_C=\psi(\delta)A(\tau,\delta)+O\left(\frac{1}{\delta}\right), \qquad (59)$$

*де величина $A(\tau)$ означена за допомогою рівності (9) і для неї справедливою є оцінка*

$$A(\tau,\delta)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\int\limits_{1}^{\delta}\psi(u)du+\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right)+O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \qquad (60)$$

***Доведення.*** В лемі 1 показано, що перетворення Фур'є функції $\tau(u)$, означеної формулою (5), є сумовним на всій числовій осі, тобто інтеграл $A(\tau)$ вигляду (9) є збіжним. Тоді, повторюючи міркування, наведені в роботі [4, с. 183], неважко переконатися в тому, що для будь-якої функції $f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ у кожній точці $x\in R$ має місце рівність

$$f(x)-P_\delta(f;x)=\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\hat\tau_\delta(t)dt,\quad \delta>0. \tag{61}$$

Враховуючи (2), (61) та беручи до уваги інваріантність класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ відносно зсуву аргументу (див. [3, с. 109]), отримуємо

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};P_\delta\right)_C=\sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left|\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{\delta}\right)\hat\tau(t)dt\right|.$$

Звідси

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};P_\delta\right)_C\le\frac{\psi(\delta)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt. \tag{62}$$

З іншого боку, для довільної функції $\varphi_0\in L_1$, $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)dt=0$, такої, що $\operatorname*{ess\,sup}_t|\varphi_0(t)|\le 1$, у класі $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ знайдеться функція $f(x)=f(\varphi_0;x)$, для якої $f^{\psi}_{\beta}(x)=\varphi_0(x)$. Тому в класі $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ існує функція $\hat f(t)$ така, що

$$\hat f^{\psi}_{\beta}(t)=\operatorname{sign}\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(u\delta t+\frac{\beta\pi}{2}\right)du,\quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right). \tag{63}$$

Далі, оскільки

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty};P_\delta\right)_C\ge\frac{\psi(\delta)}{\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{\delta}\right)\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)dudt\right|, \tag{64}$$

то, враховуючи (63), маємо

$$\frac{\psi(\delta)}{\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat f^{\psi}_{\beta}\left(\frac{t}{\delta}\right)\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)dudt\right|\ge$$

$$\ge\delta\psi(\delta)\left|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sign}\hat\tau(t\delta)\hat\tau(t\delta)dt\right|-\psi(\delta)\int\limits_{|t|\ge(\delta\pi/2)}|\hat\tau_\delta(t)|\,dt=$$

$$=\psi(\delta)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\hat\tau_\delta(t)|\,dt+\gamma(\delta), \tag{65}$$

де $\gamma(\delta) \le 0$ і $|\gamma(\delta)| = O\left(\psi(\delta)\int_{|t|\ge(\delta\pi/2)} |\hat{\tau}_\delta(t)|\,dt\right)$. Поєднання співвідношень (62) та (64), (65) дозволяє записати при $\delta \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_\delta\right)_C = \psi(\delta)A(\tau) + O\left(\psi(\delta)\int\limits_{|t|\ge(\delta\pi/2)} |\hat{\tau}_\delta(t)|\,dt\right). \tag{66}$$

Крім того, із нерівностей (2.14) і (2.15) роботи [9, с. 25] з урахуванням формул (29), (36), (40) і (58) отримуємо співвідношення (60).

Оцінимо залишковий доданок у правій частині рівності (66), записавши перетворення $\hat{\tau}_\delta(t)$, що визначається співвідношенням (4), у вигляді

$$\hat{\tau}(t) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{1/\delta} + \int\limits_{1/\delta}^{\infty}\right)\tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{67}$$

Двічі інтегруючи частинами обидва інтеграли з (67) та беручи до уваги, що $\tau(0) = 0$ і $\lim\limits_{u\to\infty}\tau(u) = \lim\limits_{u\to\infty}\tau'(u) = 0$, одержуємо

$$\int\limits_0^{1/\delta}\tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du =$$

$$= \frac{1}{t}\tau\left(\frac{1}{\delta}\right)\sin\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \frac{1}{t^2}\tau'\left(\frac{1}{\delta}\right)\cos\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\tau'(0)\cos\frac{\beta\pi}{2} - \frac{1}{t^2}\int\limits_0^{1/\delta}\tau''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du, \tag{68}$$

$$\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du =$$

$$= -\frac{1}{t}\tau\left(\frac{1}{\delta}\right)\sin\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2}\tau'\left(\frac{1}{\delta}\right)\cos\left(\frac{t}{\delta} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\tau''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{69}$$

Поєднання формул (68) та (69) дозволяє записати

$$\int\limits_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du = -\frac{1}{t^2}\tau'(0)\cos\frac{\beta\pi}{2} - \frac{1}{t^2}\int\limits_0^{1/\delta}\tau''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_{1/\delta}^{\infty}\tau''(u)\cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Звідси

$$\left|\int_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \le \frac{K_1}{t^2\psi(\delta)}+\frac{1}{t^2}\left(\int_0^{1/\delta}+\int_{1/\delta}^1+\int_1^\infty\right)|\tau''(u)|\,du. \qquad (70)$$

Знайдемо оцінки інтегралів із правої частини співвідношення (70). Враховуючи, що $\tau''(u)<0$ при $u\in[0;1/\delta]$, та нерівність (12), отримуємо

$$\int_0^{1/\delta}|\tau''(u)|du = -\int_0^{1/\delta}\tau''(u)du = \frac{\psi(1)}{\psi(\delta)}\,e^{-u}\Big|_0^{1/\delta} = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right). \qquad (71)$$

Використавши (5), (14) та (15), оцінимо другий інтеграл з правої частини співвідношення (70). Отже,

$$\int_{1/\delta}^1|\tau''(u)|du \le \int_{1/\delta}^1|\tau_1''(u)|du+\int_{1/\delta}^1|\tau_2''(u)|du. \qquad (72)$$

Тоді, беручи до уваги нерівності (19) та (20), знаходимо

$$\int_{1/\delta}^1|\tau_1''(u)|du \le \frac{1}{\psi(\delta)}\int_{1/\delta}^1\frac{u^2}{2}\delta^2\psi''(\delta u)du+$$

$$+\frac{2}{\psi(\delta)}\int_{1/\delta}^1 u\delta\,|\psi'(\delta u)|\,du+\frac{1}{\psi(\delta)}\int_{1/\delta}^1\psi(\delta u)du. \qquad (73)$$

Інтегруючи частинами перший інтеграл із правої частини останньої нерівності та враховуючи умови твердження 2, для функції $\psi(u)\in\mathfrak{M}_0$, $u\ge1$, отримуємо

$$\frac{\delta^2}{2\psi(\delta)}\int_{1/\delta}^1u^2\psi''(\delta u)du \le K+\frac{|\psi'(1)|}{2\delta\psi(\delta)}+\frac{\delta}{\psi(\delta)}\int_{1/\delta}^1u\,|\psi'(\delta u)|\,du. \qquad (74)$$

Оскільки $\int_{1/\delta}^1\psi(\delta u)du=\frac{1}{\delta}\int_1^\delta\psi(u)du\le\psi(1)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)$, то знову на підставі твердження 2 переконуємося, що

$$\frac{\delta}{\psi(\delta)}\int_{1/\delta}^1u\,|\psi'(\delta u)|\,du \le \frac{K_1}{\psi(\delta)}\int_{1/\delta}^1\psi(\delta u)du \le \frac{K_2}{\psi(\delta)}. \qquad (75)$$

Поєднання співвідношень (73) – (75) дозволяє записати таку нерівність:

$$\int_{1/\delta}^1|\tau_1''(u)|du \le K+\frac{K_1}{\delta\psi(\delta)}+\frac{K_2}{\psi(\delta)}. \qquad (76)$$

Оцінимо другий інтеграл із правої частини нерівності (72), подавши його у вигляді

$$\int\limits_{1/\delta}^{1} |\tau_2''(u)|du = \left(\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} + \int\limits_{b/\delta}^{1}\right) |\tau_2''(u)|du, \quad \delta > b. \tag{77}$$

Беручи до уваги співвідношення (26), знаходимо

$$\int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} |\tau_2''(u)|du \leq \frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} u\psi''(\delta u)du + \frac{2\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} |\psi'(\delta u)|\, du =$$

$$= \frac{b\psi'(b) - \psi'(1)}{\psi(\delta)} - \frac{3\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{1/\delta}^{b/\delta} \psi'(\delta u)du = O\left(\frac{1}{\psi(\delta)}\right). \tag{78}$$

Далі, оскільки, згідно з умовами теореми, функція $g(u) = u\psi(u)$ опукла на $[b;\infty)$, то, враховуючи (15), знаходимо, що при $\delta \to \infty$ має місце оцінка

$$\int\limits_{b/\delta}^{1} |\tau_2''(u)|du = \left|\int\limits_{b/\delta}^{1} \tau_2''(u)du\right| = O\left(\frac{1}{\psi(\delta)}\right). \tag{79}$$

Із (72), (76) – (79) випливає

$$\int\limits_{1/\delta}^{1} |\tau''(u)|du = O\left(\frac{1}{\psi(\delta)}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{80}$$

Розглянемо інтеграл із правої частини співвідношення (70) на проміжку $[1,\infty)$. Використовуючи співвідношення (30), отримуємо

$$\int\limits_{1}^{\infty} |\tau''(u)|du \leq \frac{\delta^2}{\psi(\delta)} \int\limits_{1}^{\infty} \left(1 - e^{-u}\right) \psi''(\delta u)du +$$

$$+ \frac{2\delta}{\psi(\delta)} \int\limits_{1}^{\infty} e^{-u}\, |\psi'(\delta u)|\, du + \frac{1}{\psi(\delta)} \int\limits_{1}^{\infty} e^{-u}\psi(\delta u)du.$$

Тоді з урахуванням нерівностей $1 - e^{-u} \leq u$, $e^{-u} \leq 1$ при $u \geq 0$, $\psi(\delta u) \leq \psi(\delta)$ при $u \geq 1$, а також тверджень 2, 3 і співвідношення (34) неважко переконатися в тому, що

$$\int\limits_{1}^{\infty} |\tau''(u)|du = O(1),\ \delta \to \infty. \tag{81}$$

Із співвідношень (71), (80) та (81) випливає оцінка

$$\int\limits_{0}^{\infty} |\tau''(u)|du = O\left(\frac{1}{\psi(\delta)}\right).$$

Враховуючи останню оцінку та нерівність (70), отримуємо

$$\int\limits_{|t|\geq\delta\pi/2} \left| \int\limits_0^\infty \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| dt = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\delta)}\right), \quad \delta \to \infty. \tag{82}$$

Із співвідношень (82) та (66) випливає рівність (59).

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що для класів $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ періодичних функцій у випадку, коли $\psi(u) = \frac{1}{u^r}$, $0 < r < 1$, $u \geq 1$, аналогічну теорему встановлено в роботі [9, с. 31].

***Наслідок* 1.** *Нехай виконуються умови теореми* 1, $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$, *де величина* $\alpha(t)$ *означена рівністю* (8). *Тоді при* $\delta \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(u)}{u} du + O\left(\psi(\delta)\right). \tag{83}$$

***Доведення.*** Щоб переконатись у справедливості рівності (83), насамперед зазначимо, що при $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ функція $u^{\varepsilon_0}\psi(u)$ зростає, починаючи з деякого числа $u_0 \geq 1$. Дійсно, $(u^{\varepsilon_0}\psi(u))' = \varepsilon_0 u^{\varepsilon_0 - 1}\psi(u) - u^{\varepsilon_0}|\psi'(u)| = u^{\varepsilon_0}|\psi'(u)| \left(\varepsilon_0\alpha(u) - 1\right)$. Оскільки $\lim\limits_{u\to\infty} \alpha(u) = \infty$, то знайдеться таке $u_0 = u_0(\varepsilon_0)$, що при $u > u_0$ $(u^{\varepsilon_0}\psi(u))' > 0$. Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)$ при досить великих $\delta$ отримаємо

$$\frac{1}{\delta\psi(\delta)} \int\limits_1^\delta \psi(u) du = \frac{1}{\delta\psi(\delta)} \int\limits_1^\delta \frac{u^\varepsilon\psi(u)}{u^\varepsilon} du \leq \frac{\delta^\varepsilon\psi(\delta)}{\delta\psi(\delta)} \int\limits_1^\delta \frac{du}{u^\varepsilon} = O(1). \tag{84}$$

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}'_0$, то, використавши правило Лопіталя і те, що $\lim\limits_{u\to\infty} \alpha(u) = \infty$, знаходимо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty \frac{\psi(u)}{u} du}{\psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x|\psi'(x)|} = \infty. \tag{85}$$

Отже, при $\delta \to \infty$

$$\psi(\delta) = o\left(\int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(u)}{u} du\right). \tag{86}$$

Поєднавши (84), (86) із (59), (60), отримаємо (83).

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 1, є, наприклад, функції вигляду $\psi(u) = \frac{1}{\ln^\alpha(u + K)}$, де $\alpha > 1$, $K > 0$.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $u\psi(u)$ *опукла догори або донизу на* $[b, \infty)$, $b \geq 1$,

$$\lim_{u\to\infty} u\psi(u) = \infty, \tag{87}$$

$$\lim_{\delta\to\infty} \frac{1}{\delta\psi(\delta)} \int\limits_1^\delta \psi(u) du = \infty. \tag{88}$$

*Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\delta}\int\limits_1^\delta \psi(u)du + O\left(\psi(\delta)\right). \tag{89}$$

***Доведення.*** Якщо функція $\psi$ задовольняє умови (87) і (88), то, використовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\frac{1}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{\psi(x)+x\psi'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x \psi(u)du}{x\psi(x)} = \infty.$$

Звідси

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x) = 1. \tag{90}$$

Із рівностей (85) та (90) отримуємо

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(u)}{u}du = O\left(\psi(\delta)\right).$$

Використовуючи останню оцінку, співвідношення (59), (60), (87) та (88), одержуємо (89).

Зауважимо, що функції, які мають, наприклад, вигляд $\psi(u) = \dfrac{1}{u}\ln^\alpha(u+K)$, $K > 0$, $\alpha > 0$, задовольняють умови наслідку 2.

***Наслідок 3.*** *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, функція $u\psi(u)$ опукла донизу на $[b,\infty)$, $b \geq 1$,*

$$\lim_{u\to\infty} u\psi(u) = K < \infty, \tag{91}$$

$$\lim_{\delta\to\infty}\int\limits_1^\delta \psi(u)du = \infty. \tag{92}$$

*Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(C^{\psi}_{\beta,\infty}; P_\delta\right)_C = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\delta}\int\limits_1^\delta \psi(u)du + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{93}$$

***Доведення.*** Оскільки в умовах наслідку 3 функція $u\psi(u)$ при $u \geq b \geq 1$ є спадною, то при достатньо великих $\delta$ $(\delta > b)$ отримуємо

$$\frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty \frac{\psi(u)}{u}du = \frac{1}{\psi(\delta)}\int\limits_\delta^\infty \frac{u\psi(u)}{u^2}du \leq \delta\int\limits_\delta^\infty \frac{du}{u^2} = O(1).$$

Рівність (93) одержимо, підставивши останній вираз у (60) та врахувавши співвідношення (59), (91), (92).

Прикладом функцій, для яких має місце наслідок 3, є функції вигляду $\psi(u) = \frac{1}{u}(K+e^{-u})$, $\psi(u)=\frac{1}{u}\ln^{\alpha}(u+K)$, де $K>0$, $-1\le\alpha\le 0$.

Зазначимо, що коли $\psi(u)=\frac{1}{u}$, $u\ge 1$, $\beta\in R$, із співвідношення (93) отримуємо результат (3) (див. [9, с. 31]). А у випадку, коли $\psi(u)=\frac{1}{u^r}$, $u\ge 1$, $\beta=r=1$, із (93) випливає асимптотична при $\delta\to\infty$ рівність

$$\mathcal{E}\left(W^1_\infty;P_\delta\right)_C=\frac{2}{\pi}\frac{\ln\delta}{\delta}+O\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Таку оцінку для верхніх меж наближень на класах Соболєва $W^1_\infty$ інтегралами Пуассона отримав І. П. Натансон у роботі [7].

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 1–3 рівності (83), (89) та (93) дають розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для інтегралів Пуассона на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ у рівномірній метриці, коли функції $\psi$ мають незначну швидкість спадання до нуля, тобто таких функцій $\psi$, для яких $\int_1^\infty \psi(u)du=\infty$.


1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье. – Киев, 1983. – 57 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Уклонения сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 6. – С. 750–758.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
5. *Nagy B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I // Berichte Acad. Wiss. – Leipzig, 1938. – **90**. – S. 103–134.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
7. *Натансон И. П.* О порядке приближения непрерывной $2\pi$-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. – 1950. – **72**, № 1. – С. 11–14.
8. *Тиман А. Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Там же. – **74**, № 1. – С. 17–20.
9. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. Математика. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15–31.
10. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 43–52.
11. *Жигалло К. М., Харкевич Ю. І.* Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля–Пуассона // Там же. – 2009. – **61**, № 1. – С. 73–82.


Одержано 21.04.09