УДК 517.928

І. Г. Ключник (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З КРАТНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ

With the use of transformation matrix, a system of differential equations with small parameter of a part of derivatives with a multiple turning point is asymptotically reduced to an integrated system of equations.

С помощью матрицы преобразования система дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных с кратной точкой поворота асимптотически сводится к интегрируемой системе уравнений.

У роботах [1 – 8] наведено огляд літератури і запропоновано методи формального спрощення для сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з кратною точкою звороту. Лінійну систему диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту першого порядку, для якої запропоновано асимптотичний метод інтегрування, уперше розглянуто в [9]. Цей метод полягає у зведенні лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних, у випадку збігу в одній точці двох власних значень, за допомогою матриць перетворень до інтегровної системи рівнянь. У [10] доведено існування і нескінченну диференційовність за дійсними змінними x, ε перетворюючих матриць, які мають своїм асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$ матриці, одержані запропонованим в [9] асимптотичним методом. У даній статті розглядається система лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з кратною точкою звороту, для якої одержано асимптотичний метод інтегрування.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} y' &= A(x)y + A_1(x)y_1, \\ \varepsilon y_1' &= (B(x) + \varepsilon B_1(x))y_1 + \varepsilon B_2(x)y, \end{aligned} \tag{1}$$

де $y \in R^p$, $y_1 \in R^2$, матриці $A(x)$, $A_1(x)$, $B(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ голоморфні при

$$|x| \le x_0, \tag{2}$$

$B(x)$ — матриця, для якої виконуються умови

$$\det B(0) = \frac{d^i(\det B(x))}{dx^i}\bigg|_{x=0} = 0, \qquad \frac{d^q}{dx^q}(\det B(x))\bigg|_{x=0} \ne 0, \tag{3}$$

де $i = \overline{1, q-1}$, q — ціле число і $q \ge 2$. Будемо вважати, що

$$\operatorname{tr} B(x) = \operatorname{tr} B_1(x) = \operatorname{tr} A(x) \equiv 0. \tag{4}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що матриця $B(x) = \begin{pmatrix} \tilde a(x)x^\lambda & \tilde b(x)x^\mu \\ \tilde c(x)x^\nu & -\tilde a(x)x^\lambda \end{pmatrix}$ голоморфно подібна матриці $k(x)\begin{pmatrix} 0 & x^\mu \\ x^\nu & 0 \end{pmatrix}$ з матрицею перетворення $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j(x) & 1 \end{pmatrix}$ при $\mu \le \lambda$, де $j(x) = -\dfrac{\tilde{a}(x)x^{\lambda-\mu}}{\tilde{b}(x)}$, $k(x) = \tilde{b}(x)$, $\tilde{b}(0) \ne 0$ і $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & \beta(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $\nu \le \lambda$, де $\beta(x) = \dfrac{\tilde{a}(x)x^{\lambda-\nu}}{\tilde{c}(x)}$, $k(x) = \tilde{c}(x)$, $\tilde{c}(0) \ne$ $\ne 0$. Далі за допомогою заміни $\xi = \varphi(x) = \left(\dfrac{\mu+\nu+2}{2}\displaystyle\int_0^x t^{(\mu+\nu)/2}k(t)dt\right)^{2/(\mu+\nu+2)}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} v$, де $\omega = \varphi(x)^{(\mu-\nu)/2}x^{(\nu-\mu)/2}$, враховуючи (3), одержуємо систему (1) з матрицею $B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x^q & 0 \end{pmatrix}$.

За допомогою перетворення $\begin{pmatrix} y \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x,\varepsilon)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ систему (1) зведемо до вигляду

$$u' = \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_i(\varepsilon)x^i\right)v, \tag{5}$$

$$\varepsilon v' = \big(B(x) + \varepsilon B_3(x,\varepsilon)\big)v + \varepsilon\left(\sum_{i=0}^{q-1} D_i(\varepsilon)x^i\right)u, \tag{6}$$

де $\Phi(x,\varepsilon)$ — блочна матриця вигляду

$$\Phi(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} U(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x) & \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x) & V(x) + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

матриці $C_i(\varepsilon)$, $D_i(\varepsilon)$, $B_3(x,\varepsilon)$ мають формальні розвинення

$$C_i(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n C_{in}, \qquad D_i(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n D_{in}, \qquad B_3(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{3n}(x)\varepsilon^n, \tag{8}$$

$$C_{in} = \begin{pmatrix} c_{i1n} & 0 \\ \ldots & \ldots \\ c_{ipn} & 0 \end{pmatrix}, \qquad D_{in} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ d_{in1} & \ldots & d_{inp} \end{pmatrix}, \qquad B_{3n}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_n(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

З (1), (5), (6) випливає, що матриця $\Phi(x,\varepsilon)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\varepsilon\Phi' + \Phi\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon\left(\sum\limits_{i=0}^{q-1} C_i(\varepsilon)x^i\right) \\ \varepsilon\left(\sum\limits_{i=0}^{q-1} D_i(\varepsilon)x^i\right) & B(x) + \varepsilon B_3(x,\varepsilon) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon A(x) & \varepsilon A_1(x) \\ \varepsilon B_2(x) & B(x) + \varepsilon B_1(x) \end{pmatrix}\Phi. \tag{9}$$

Підставляючи (7) в (9), одержуємо систему рівнянь для коефіцієнтів розвинень (7) матричної функції $\Phi(x,\varepsilon)$:

$$\begin{gathered}
U'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n'(x)+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{q-1}D_i(\varepsilon)x^i\right)= \\
=A(x)U(x)+A(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x)+A_1(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x), \\
\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}'(x)+U(x)\sum_{i=0}^{q-1}C_i(\varepsilon)x^i+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{q-1}C_i(\varepsilon)x^i\right)+ \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}V_{n1}'(x)B(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x)B_3(x,\varepsilon)= \\
=A(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x)+A_1(x)V(x)+A_1(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x), \\
\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}'(x)+V(x)\sum_{i=0}^{q-1}D_i(\varepsilon)x^i+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{q-1}D_i(\varepsilon)x^i\right)= \\
=B_2(x)U(x)+B_2(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_n(x)+ \\
+B(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n-1}U_{n1}(x)+B_1(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x), \\
\varepsilon V'(x)+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n'(x)+\varepsilon\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n U_{n1}(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{q-1}C_i(\varepsilon)x^i\right)+ \\
+V(x)B(x)+\varepsilon V(x)B_3(x,\varepsilon)+ \\
+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)B(x)+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)B_3(x,\varepsilon)= \\
=\varepsilon B_2(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_{n1}(x)+B(x)V(x)+\varepsilon B_1(x)V(x)+ \\
+B(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x)+\varepsilon B_1(x)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n V_n(x).
\end{gathered} \tag{10}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при нульовому степені ε у рівняннях (10) і враховуючи (8), маємо

$$U'(x)=A(x)U(x), \tag{11}$$

$$U(x)\sum_{i=0}^{q-1}C_{i0}(\varepsilon)x^i+V_{11}(x)B(x)=A_1(x)V(x), \tag{12}$$

$$V(x)\sum_{i=0}^{q-1} D_{i0}(\varepsilon)x^i = B_2(x)U(x) + B(x)U_{11}(x), \tag{13}$$

$$V(x)B(x) = B(x)V(x). \tag{14}$$

З рівнянь (11) і (14) одержуємо

$$U(x) = \Omega_0^x(A(x)), \qquad V(x) = q_{01}(x)B(x) + q_{02}(x)I, \tag{15}$$

де $\Omega_0^x(A(x))$ — матрицант рівняння (11), $q_{01}(x)$, $q_{02}(x)$ — довільні голоморфні в області $|x| \le x_0$ функції, I — одинична матриця.

Для визначення $q_{01}(x)$, $q_{02}(x)$ використаємо систему рівнянь, що одержується з (10) прирівнюванням в ній коефіцієнтів при першому степені параметра ε:

$$U_1'(x) + V_{11}(x)\sum_{i=0}^{q-1} D_{i0}(\varepsilon)x^i = A(x)U_1(x) + A_1(x)U_{11}(x), \tag{16}$$

$$\begin{gathered} V_{11}'(x) + U(x)\sum_{i=0}^{q-1} C_{i1}(\varepsilon)x^i + \\ + U_1(x)\sum_{i=0}^{q-1} C_{i0}(\varepsilon)x^i + V_{21}(x)B(x) + V_{11}(x)B_{30}(x) = \\ = A(x)V_{11}(x) + A_1(x)V_1(x), \end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered} U_{11}'(x) + V(x)\sum_{i=0}^{q-1} D_{i1}(\varepsilon)x^i + V_1(x)\sum_{i=0}^{q-1} D_{i0}(\varepsilon)x^i = \\ = B_2(x)U_1(x) + B(x)U_{21}(x) + B_1(x)U_{11}, \end{gathered} \tag{18}$$

$$V'(x) + V(x)B_{30}(x) + V_1(x)B(x) = B_1(x)V(x) + B(x)V_1(x). \tag{19}$$

Для існування розв'язку рівняння (19) необхідно і достатньо виконання умов

$$\operatorname{tr}(V'(x) + V(x)B_{30}(x) - B_1(x)V(x)) \equiv 0,$$

$$\operatorname{tr}(V'(x)B(x) + V(x)B_{30}(x)B(x) - B_1(x)V(x)B(x)) \equiv 0.$$

Підставляючи в ці умови замість функції $V(x)$ і $V'(x)$ її вираз із (15) і враховуючи, що $\operatorname{tr} B_1(x) \equiv 0$, отримуємо систему вигляду

$$\begin{gathered} 2x^q q_{01}' + qx^{q-1}q_{01} + q_{02}(b_0 - x^q b_{12}(x) - b_{21}(x)) = 0, \\ 2q_{02}' + q_{01}(b_0 - x^q b_{12}(x) - b_{21}(x)) = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

В якості $b_0(x)$ візьмемо многочлен степеня $q-2$ вигляду $b_0(x) = \sum_{r=0}^{q-2} x^r b_{0r}$ з коефіцієнтами b_{0r}, які визначаються за формулами $b_{00} = b_{21}(0)$, $b_{0r} = \dfrac{b_{21}^{(r)}(0)}{r!}$, $r = \overline{1, q-2}$, де $b_{ij}(x) = \{B_1(x)\}_{ij}$, $i, j = 1, 2$; $b_{21}^{(r)}(0)$ — r-та похідна функції $b_{21}(x)$ у точці $x = 0$, $b_0(x)$ — елемент матриці $B_{30}(x)$. Тоді одержимо

$$b_{21}(x) - b_0(x) = x^{q-1}\widetilde{k}(x),$$

де $\widetilde{k}(x) = \sum_{r=q-1}^{\infty} \dfrac{b_{21}^{(r)}}{r!} x^{r-q+1}$.

Підставляючи останню рівність у систему (20) і записуючи її в матричному вигляді, маємо

$$xq_0'(x) = H(x)q_0(x), \tag{21}$$

де

$$q_0(x) = \begin{pmatrix} q_{01}(x) \\ q_{02}(x) \end{pmatrix}, \qquad H(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -q & xb_{12}(x) + \tilde{k}(x) \\ x^q(xb_{12}(x) + \tilde{k}(x)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Система (21) має ненульові голоморфні в області (2) розв'язки, які залежать від значень $q_{02}(0)$. Покладемо $q_{02}(0) = 1$ і визначимо однозначно розв'язок системи (21). Підставивши знайдені функції $U(x)$ і $V(x)$ у вигляді (15) в рівняння (12) і (13), одержимо рівняння для визначення C_{i0}, D_{i0}, $i = \overline{0, q-1}$, $V_{11}(x), U_{11}(x)$. Помноживши рівняння (12) справа на $B(x)$, а (13) зліва на матрицю $B(x)$, отримаємо

$$x^q V_{11}(x) = F(x), \qquad x^q U_{11}(x) = G(x), \tag{22}$$

де

$$F(x) = A_1(x)V(x)B(x) - U(x)\left(\sum_{i=0}^{q-1} C_{i0}x^i\right)B(x),$$

$$G(x) = B(x)V(x)\sum_{i=0}^{q-1} D_{i0}x^i - B(x)B_2(x)U(x).$$

Матрицю C_{00} будемо знаходити з рівності $F(0) = 0$, з якої випливає

$$C_{00}B(0) = A_1(0)V(0)B(0).$$

З покоординатного запису останнього рівняння знайдемо елементи матриці

$$\{C_{00}\}_{j1} = \{A_1(0)V(0)\}_{j1}, \qquad \{C_{00}\}_{j2} = 0, \quad j = \overline{1, p}.$$

З явного вигляду матриці $F(x)$ знайдемо i-ту похідну матриці $F(x)$ у вигляді

$$\frac{d^i F(x)}{dx^i} = (A_1(x)V(x))^{(i)}B(x) + \sum_{k=0}^{i-1} C_i^k (A_1(x)V(x))^{(k)} B^{(i-k)}(x) -$$

$$- \left(\sum_{j=0}^{q-1} x^j U(x) C_{j0}\right)^{(i)} B(x) - \sum_{k=0}^{i-1} C_i^k \left(\sum_{j=0}^{q-1} x^j U(x) C_{j0}\right)^{(k)} B^{(i-k)}(x), \tag{23}$$

де $B^{(k)}(x)$ — k-та похідна від матриці $B(x)$, C_i^k — число сполук з i елементів по k.

Записавши i-ту похідну від добутку степеневої функції і матриці $U(x)$ та виконавши перенумерування, а потім згрупувавши доданки при x^j окремо при $j = \overline{0, q-1-i}$ і $j = \overline{q-i, q-1}$, одержимо наступну похідну:

$$\left(\sum_{j=0}^{q-1} x^j U(x) C_{j0}\right)^{(i)} = \sum_{j=0}^{q-1} x^j U^{(i)}(x) C_{j0} +$$

$$+\sum_{k=1}^{i}\left(\sum_{j=k}^{q-1} C_i^k j(j-1)\ldots(j-k+1)x^{j-k}U^{(i-k)}(x)C_{j0}\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{q-1} x^j U^{(i)}(x) C_{j0} + \sum_{k=1}^{i}\sum_{j=0}^{q-1-k} C_i^k (j+k)(j+k-1)\ldots$$

$$\ldots(j+1)x^j U^{(i-k)}(x) C_{j+k,0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{q-1-i} (U^{(i)}(x) C_{j0} + \sum_{k=1}^{i} C_i^k (j+k)(j+k-1)\ldots$$

$$\ldots(j+1)U^{(i-k)}(x) C_{j+k,0}) x^j +$$

$$+\sum_{s=0}^{i-1} x^{q-i+s} (U^{(i)}(x) C_{q-i+s,0} +$$

$$+\sum_{k=1}^{i-1-s} C_i^k (q-i+s+k)(q-i+s+k-1)\ldots$$

$$\ldots(q-i+s+1)U^{(i-k)}(x) C_{q-i+s+k,0}).$$

Підставляючи знайдену похідну в останній рівності в (23) і покладаючи в одержаній рівності $x=0$, а також використовуючи те, що $B^{(s)}(0)=0$, $s\geq 1$, знаходимо значення i-ї похідної в точці $x=0$ вигляду

$$\frac{d^i F(0)}{dx^i} = i!\left(\left.\frac{d^i(A_1(x)V(x))}{dx^i}\right|_{x=0} B(0) -\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{(i-k)!}U^{(i-k)}(0) C_{k0} B(0) - U(0) C_{i0} B(0)\right).$$

Матриці C_{i0}, $i=\overline{1,q-1}$, будемо знаходити з рівності $\dfrac{d^i F(0)}{dx^i}=0$, а тому, використавши значення $\dfrac{d^i F(0)}{dx^i}$, одержимо

$$C_{i0} B(0) = \left.\frac{d^i(A_1(x)V(x))}{dx^i}\right|_{x=0} B(0) - \sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{(i-k)!}U^{(i-k)}(0) C_{k0} B(0).$$

З покоординатного запису останнього рівняння поступово знайдемо всі матриці C_{i0}, $i=\overline{1,q-1}$, вигляду

$$\{C_{i0}\}_{j1} = \left\{ \frac{d^i (A_1(x)V(x))}{dx^i} \bigg|_{x=0} - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)!} U^{(i-k)}(x) C_{k0} \right\}_{j1},$$

$$\{C_{i0}\}_{j2} = 0, \quad j = \overline{1,p}.$$

Матриці $D_{00}, D_{i0}, i = \overline{1, \beta - 1}$, будемо знаходити відповідно з рівностей $G(0) = 0$, $\dfrac{d^i G(0)}{dx^i} = 0$. Використавши явний вигляд матриці $G(x)$ і знайшовши $\dfrac{d^i G(0)}{dx^i}$, одержимо рівняння

$$B(0)V(0)D_{00} = B(0)B_2(0)U(0),$$

$$B(0)D_{i0} = B(0) \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)!} V^{(i-k)}(0) D_{k0} - B(0) \frac{d^i (B_2(x)U(x))}{dx^i} \bigg|_{x=0}.$$

З покоординатного запису останніх двох рівнянь знайдемо всі матриці D_{i0}, $i = \overline{0, q-1}$, вигляду

$$\{D_{00}\}_{2j} = \{B_2(0)U(0)\}_{2j}, \qquad \{D_{00}\}_{1j} = 0,$$

$$\{D_{i0}\}_{2j} = \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{(i-k)!} V^{(i-k)}(0) D_{k0} - \frac{d^i (B_2(x)U(x))}{dx^i} \bigg|_{x=0} \right\}_{2j},$$

$$\{D_{i0}\}_{1j} = 0, \quad j = \overline{1,p}.$$

З огляду на вибір C_{i0}, D_{i0}, $i = \overline{0, q-1}$, матриці $F(x)$ і $G(x)$ можна записати у вигляді

$$F(x) = x^q \widetilde{F}(x), \qquad G(x) = x^q \widetilde{G}(x),$$

де

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{k=q}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^{k-q}, \qquad \widetilde{G}(x) = \sum_{k=q}^{\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} x^{k-q}.$$

Тоді з рівнянь (22), враховуючи останні дві рівності, маємо

$$V_{11}(x) = \widetilde{F}(x), \qquad U_{11}(x) = \widetilde{G}(x).$$

Отже, знайдено коефіцієнти розвинень (7), (8) при ε в нульовому степені.

Для знаходження коефіцієнтів розвинень (7), (8) при ε у першому степені маємо систему рівнянь (16)–(19). З рівняння (16), поклавши $U_1(0) = 0$, знайдемо матрицю $U_1(x)$ у вигляді

$$U_1(x) = \int_0^x \Omega_t^x \big(A(t)\big) \left(A_1(t) U_{11}(t) - V_{11}(t) \sum_{i=0}^{q-1} D_{i0} t^i \right) dt. \tag{24}$$

Розглянемо рівняння (19), яке набере вигляду

$$B(x)V_1(x) - V_1(x)B(x) = F_1(x), \tag{25}$$

де $F_1(x) = V'(x) + V(x)B_{30}(x) - B_1(x)V(x)$, $\operatorname{tr} F_1(x) \equiv 0$, $\operatorname{tr} F_1(x)B(x) \equiv 0$. Загальний розв'язок рівняння (25) визначається за формулою

$$V_1(x) = q_{11}(x)B(x) + q_{12}(x)I + W_1(x), \qquad W_1(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) & 0 \\ g_2(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Тут $W_1(x)$ — частинний розв'язок рівняння (25). Прирівнявши коефіцієнти в останньому з рівнянь (10) при другому степені параметра ε, одержимо

$$B(x)V_2(x) - V_2(x)B(x) = V_1'(x) - B_1(x)V_1(x) + \big(V(x)B_{31}(x) + F_2(x)\big), \tag{27}$$

де $F_2(x) = U_{11}(x)\sum_{i=0}^{q-1} C_{i0}x^i + V_1(x)B_{30}(x) - B_2(x)V_{11}(x)$. З умови існування розв'язку рівняння (27)

$$\operatorname{tr}\big(V_1'(x) - B_1(x)V_1(x)\big) = -\operatorname{tr}\big(V(x)B_{31}(x) + F_2(x)\big),$$
$$\operatorname{tr}\big(V_1'(x)B(x) - B_1(x)V_1(x)B(x)\big) = -\operatorname{tr}\big(V(x)B_{31}(x)B(x) + F_2(x)B(x)\big)$$

отримуємо систему рівнянь для визначення $q_{11}(x)$, $q_{12}(x)$:

$$\begin{gathered} 2x^q q_{11}' + qx^{q-1}q_{11} - x^{q-1}q_{12}(xb_{12}(x) + \tilde{k}(x)) = f_1(x) - q_{02}(x)b_1(x), \\ 2q_{12}' - x^{q-1}q_{11}(xb_{12}(x) + \tilde{k}(x)) = f_2(x) - q_{01}b_1(x), \end{gathered} \tag{28}$$

де $f_1(x) = -\operatorname{tr}(W_1'(x)B(x)) + \operatorname{tr}(B_1(x)W_1(x)B(x)) - \operatorname{tr}(F_2(x)B(x))$, $f_2(x) = -\operatorname{tr} W_1'(x) + \operatorname{tr}(B_1(x)W_1(x)) - \operatorname{tr} F_2(x)$. Внаслідок голоморфності $f_1(x)$, $q_{02}(x)$ і вибору $q_{02}(0) = 1$ запишемо ці функції у вигляді

$$\begin{gathered} f_1(x) = \sum_{s=0}^{q-2} \frac{f_1^{(s)}(0)}{s!}x^s + x^{q-1}\widetilde{f}_1(x), \\ q_{02}(x) = 1 + \sum_{s=1}^{q-2} \frac{q_{02}^{(s)}(0)}{s!}x^s + x^{q-1}\widetilde{q}_{02}(x). \end{gathered} \tag{29}$$

В якості $b_1(x)$ візьмемо многочлен степеня $q-2$ вигляду

$$b_1(x) = \sum_{s=0}^{q-2} x^s b_{1s} \tag{30}$$

з коефіцієнтами b_{1s}, $s = \overline{0, q-2}$, які визначаються за формулами

$$b_{10} = f_1(0), \qquad b_{1j} = \frac{f_1^{(j)}(0)}{j!} - \sum_{s=0}^{j} \frac{q_{02}^{(s)}(0)b_{1,j-s}}{s!}, \quad j = \overline{1, q-2}. \tag{31}$$

Підставляючи (29), (30) у вираз $f_1(x) - q_{02}(x)b_1(x)$, а потім використовуючи (31), одержуємо рівність

$$f_1(x) - q_{02}(x)b_1(x) = x^{q-1}\widetilde{k}_1(x), \tag{32}$$

де $\widetilde{k}_1(x) = \widetilde{f}_1(x) - \sum_{r=1}^{q-2}\sum_{s=r}^{q-2} q_{02s}b_{1,q-r-s} + \widetilde{q}_{02}(x)b_1(x)$. Враховуючи рівність (32), систему (28) записуємо у вигляді

$$xq_1'(x) = H(x)q_1(x) + F^{(1)}(x), \tag{33}$$

де $F^{(1)}(x)$ — голоморфна вектор-функція вигляду $F^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) - q_{02}(x)b_1(x) \\ f_2(x) - q_{01}(x)b_1(x) \end{pmatrix}$. Система (33) має голоморфні в області $|x| \leq x_0$ розв'язки, які залежать від значень $q_{12}(0)$. Покладемо $q_{12}(0) = 0$ і визначимо однозначно розв'язок системи (33). Матриці $V_{21}(x)$, $U_{21}(x)$, C_{i1}, D_{i1}, $i = \overline{0, q-1}$, однозначно знаходимо з рівнянь (17) і (18), підставляючи в них знайдені функції $U_1(x)$ і $V_1(x)$ з формул (24) і (26). Можна довести, що вказаним алгоритмом однозначно знаходяться довільні коефіцієнти розвинень (7) і (8) і коефіцієнти розвинень (7) є голоморфними функціями в області (2).

Розглянемо матрицю (7) при $\varepsilon = 0$. Вона має вигляд $\Phi(x, 0) = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & V(x) \end{pmatrix}$, де $U(x)$, $V(x)$ визначаються з (15). Врахувавши, що $\operatorname{tr} A(x) = 0$, одержимо $\det U(x) \equiv 1$. З (15) знайдемо $\det V(x) = q_{02}^2(x) - x^q q_{01}^2(x)$ і, врахувавши рівняння (20), будемо мати $\dfrac{d(\det V(x))}{dx} = 2q_{02}'(x)q_{02}(x) - qx^{q-1}q_{01}^2(x) - 2x^q q_{01}'(x)q_{01}(x) \equiv 0$. Звідси знаходимо $\det V(x) \equiv \det V(0) = 1$. Таким чином, $\det \Phi(x, 0) \equiv 1$ для всіх x з області (2).

Запишемо рівняння (5) покоординатно

$$u_j' = \left(\sum_{i=0}^{q-1} c_{ij}(\varepsilon) x^i \right) v_1, \tag{34}$$

де $c_{ij}(\varepsilon) = \big\{ C_i(\varepsilon) \big\}_{j1}$, $j = \overline{1, p}$. Будемо вважати, що $c_{i1}(\varepsilon) \neq 0$, $i = \overline{0, q-1}$. Тоді рівність (34) набере вигляду

$$u_1' = \left(\sum_{i=0}^{q-1} c_{i1}(\varepsilon) x^i \right) v_1, \qquad u_j' = \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_{ij}(\varepsilon) c_{i1}(\varepsilon) x^i v_1, \tag{35}$$

де $\gamma_{ij}(\varepsilon) = \dfrac{c_{ij}(\varepsilon)}{c_{i1}(\varepsilon)}$, $j = \overline{2, p}$, $i = \overline{0, q-1}$. З (35) випливає, що заміна

$$u_1 = \omega_1, \qquad u_j = \sum_{i=0}^{q-1} \gamma_{ij}(\varepsilon) u_1 + \omega_j, \quad j = \overline{2, p}, \tag{36}$$

перетворює систему рівнянь (35) до вигляду

$$\omega_1' = \sum_{i=0}^{q-1} c_{i1}(\varepsilon) x^i v_1, \qquad \omega_j' = -\sum_{i=0}^{q-1} x^i \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{q-1} \gamma_{kj}(\varepsilon) c_{i1}(\varepsilon) \right) v_1, \quad j = \overline{2, p}.$$

З явного вигляду матриці заміни для (36)

$$V(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{q-1} \gamma_{i2}(\varepsilon) & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{i=0}^{q-1} \gamma_{ip}(\varepsilon) & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

випливає, що

$$\det V(\varepsilon) = 1.$$

Суперпозиція замін з матрицями $\Phi(x,\varepsilon)$ і $V(\varepsilon)$ приводить систему рівнянь (1) до вигляду

$$\omega_1' = \sum_{i=0}^{q-1} c_{i1}(\varepsilon)x^i v_1, \qquad \omega_j' = -\sum_{i=0}^{q-1} x^i \left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{q-1} \gamma_{kj}(\varepsilon)c_{i1}(\varepsilon)\right) v_1, \quad j=\overline{2,p}, \tag{37}$$

$$\varepsilon v' = \big(B(x)+\varepsilon B_3(x,\varepsilon)\big)v + \varepsilon\left(\sum_{i=0}^{q-1} D_i(\varepsilon)x^i\right)V(\varepsilon)\omega. \tag{38}$$

Теорема. *Нехай права частина системи рівнянь* (1) *голоморфна в області* (2). *Тоді існують формальні ряди* (7), (8), *коефіцієнти яких голоморфні в області* (2), *такі, що* $\det\Phi(x,0)\equiv 1$ *і формальне перетворення з матрицею заміни вигляду* (7) *приводить систему* (1) *до системи* (37), (38).

Розглянемо систему рівнянь (37), (38). З (37) знаходимо

$$\begin{gathered}\omega_1 = \omega_1^{(0)} + \sum_{i=0}^{q-1} c_{i1}(\varepsilon)\int_0^x t^i v_1(t)dt, \\ \omega_j = \omega_j^{(0)} - \sum_{i=0}^{q-1}\left(\int_0^x t^i v_1(t)dt\right)\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{q-1}\gamma_{kj}(\varepsilon)c_{i1}(\varepsilon)\right), \quad j=\overline{2,p},\end{gathered} \tag{39}$$

де $\omega_j^{(0)}$, $j=\overline{1,p}$, — довільні сталі. Із зображення $B_3(x,\varepsilon)$ рівністю (8) і явного вигляду $B_{3n}(x)$, змінюючи порядок підсумовування, одержуємо зображення $B_3(x,\varepsilon)$ у вигляді

$$B_3(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{q-2} B_{3i}(\varepsilon)x^i, \tag{40}$$

де $B_{3i}(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n B_{3ni}$, $B_{3ni}=\dfrac{B_{3n}^{(i)}(0)}{i!}$, $i=\overline{0,q-2}$. Підставляючи (39), (40) у (38), одержуємо

$$\begin{gathered}\varepsilon^2 v_1'' = \left(x^q + \varepsilon\sum_{i=0}^{q-2} b_i(\varepsilon)x^i\right)v_1 + \varepsilon\sum_{i=0}^{q-1}\mu_i(\varepsilon)x^i + \\ +\varepsilon\sum_{j=0}^{q-1}\left(\sum_{i=0}^{q-1} m_i^{(j)}(\varepsilon)x^i\right)\int_0^x t^j v_1(t)dt,\end{gathered} \tag{41}$$

де

$$b_i(\varepsilon) = \big\{B_{3i}(\varepsilon)\big\}_{21}, \quad \tilde{d}_i(\varepsilon) = \big(d_i(\varepsilon),\ d_{i2}(\varepsilon)\ldots d_{ip}(\varepsilon)\big),$$

$$d_{is}(\varepsilon) = \big\{D_i(\varepsilon)\big\}_{2s}, \quad s=\overline{1,p},$$

$$\omega^{(0)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0} \\ \dots \\ \omega_p^{(0)} \end{pmatrix}, \qquad \mu_i(\varepsilon) = \tilde{d}_i(\varepsilon)\omega^{(0)}, \qquad d_i(\varepsilon) = d_{i1}(\varepsilon) + \sum_{s=2}^{p}\sum_{k=0}^{q-1}\gamma_{ks}(\varepsilon)d_{is}(\varepsilon),$$

$$m_i^{(j)}(\varepsilon) = c_{j1}(\varepsilon)\left(d_i(\varepsilon) - \sum_{s=2}^{p}\left(\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{q-1}\gamma_{ks}(\varepsilon)\right)d_{is}(\varepsilon)\right), \quad i = \overline{0, q-1}, \quad j = \overline{0, q-1}.$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння (41), поклавши

$$v_1(0) = 0, \qquad v_1'(0) = 0. \tag{42}$$

Взявши $v_1(x)$ у вигляді степеневого ряду

$$v_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} v_n x^n, \tag{43}$$

для коефіцієнтів цього ряду одержимо рівняння

$$v_2 = \frac{\lambda\mu_0(\varepsilon)}{2}, \qquad v_3 = \frac{\lambda\mu_1(\varepsilon)}{3!}, \quad \lambda = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{44}$$

$$v_n = \frac{1}{\varepsilon^2 n(n-1)}\times$$

$$\times\left(v_{n-q-2} + \varepsilon\sum_{i=0}^{n-2}b_i(\varepsilon)v_{n-2-i} + \varepsilon\mu_{n-2}(\varepsilon) + \varepsilon\sum_{j=0}^{n-3}\sum_{i=0}^{n-3}m_i^{(j)}(\varepsilon)\frac{v_{n-3-i-j}}{n-i-2}\right), \tag{45}$$

$n \geq 4$, до того ж $\mu_i(\varepsilon) = 0$ при $i > q-1$, $b_i(\varepsilon) = 0$ при $i > q-2$, $m_i^{(j)} = 0$ при $j > q-1$ чи $i > q-1$. Рівність (45) перепишемо таким чином:

$$v_n = \sum_{j=2}^{n} A_n^j v_{n-j} + A_{n-2}\mu_{n-2}(\varepsilon), \quad n \geq 4, \tag{46}$$

де

$$A_n^j = \frac{\lambda b_n^j}{n(n-1)}, \qquad A_j = \frac{\lambda}{(j+1)(j+2)},$$

$$b_n^j = \begin{cases} b_{j-2} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-3}\frac{m_{j-3-k}^{(k)}}{n-j+k+1}, & \text{якщо} \quad j \neq q+2, \\ \lambda + b_q + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-3}\frac{m_{q-1-k}^{(k)}}{n-q+k-1}, & \text{якщо} \quad j = q+2, \end{cases} \qquad j = \overline{2, n}. \tag{47}$$

Використавши (42), (44) і (46), виразимо v_n через v_2 і v_3 :

$$v_n = \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-2\\ j_1\ldots j_i\geq 2}} A_n^{j_1}A_{n-j_1}^{j_2}\ldots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}v_2 +$$

$$+\sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-3\\ j_1\ldots j_i\geq 2}} A_n^{j_1} A_{n-j_1}^{j_2}\ldots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i} v_3 +$$

$$+\sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-2\\ j_1\ldots j_i\geq 2}} A_{j_1}\mu_{j_1}(\varepsilon) A_n^{j_2} A_{n-j_2}^{j_3}\ldots A_{n-j_2-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}. \tag{48}$$

Підставивши в (48) значення A_n^j, A_j, v_2, v_3 з формул (47), (44), розв'язок (43) рівняння (41) одержимо у вигляді

$$v_1(x)=\frac{\lambda x^2}{2}\left(\mu_0(\varepsilon)+\frac{\mu_1(\varepsilon)x}{3}\right)+$$

$$+\sum_{n=4}^{\infty}\left(\sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-2\\ j_1\ldots j_i\geq 2}} \frac{b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2}\ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{2n(n-j_1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})}\times\right.$$

$$\times\frac{\mu_0(\varepsilon)\lambda^{i+1}}{(n-1)(n-1-j_1)\ldots(n-1-j_1-\ldots-j_{i-1})}+$$

$$+\sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-3\\ j_1\ldots j_i\geq 2}} \frac{b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2}\ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{3!n(n-j_1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})}\times$$

$$\times\frac{\mu_1(\varepsilon)\lambda^{i+1}}{(n-1)(n-1-j_1)\ldots(n-1-j_1-\ldots-j_{i-1})}+$$

$$+\sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-2\\ j_1\ldots j_i\geq 2}} \frac{b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2}\ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{n(n-j_1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})}\times$$

$$\left.\times\frac{\mu_{j_1}(\varepsilon)\lambda^{i}}{(j_1+1)(j_1+2)(n-1)(n-1-j_1)\ldots(n-1-j_1-\ldots-j_{i-1})}\right)x^n. \tag{49}$$

Розглянемо однорідне рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 v_1''=\left(x^q+\varepsilon\sum_{i=0}^{q-2} b_i(\varepsilon)x^i\right)v_1+\varepsilon\sum_{j=0}^{q-1}\left(\sum_{i=0}^{q-1} m_i^{(j)}(\varepsilon)x^i\right)\int_0^x t^j v_1(t)dt. \tag{50}$$

Знайдемо два лінійно незалежних розв'язки рівняння (50). Перше з них визначаємо у вигляді ряду

$$v_1(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty} v_n x^n, \tag{51}$$

тобто початкові умови мають вигляд

$$v_1(0)=1, \qquad v_1'(0)=0. \tag{52}$$

Підставляючи (51) в (50), для коефіцієнтів v_n ряду (51) одержуємо рівняння

$$v_2 = \frac{\lambda b_0(\varepsilon)}{2}, \quad v_3 = \frac{\lambda(b_1(\varepsilon) + m_0^{(0)}(\varepsilon))}{3!}, \quad v_n = \sum_{j=2}^{n} A_n^j v_{n-j}, \quad n \geq 4. \tag{53}$$

Враховуючи (53) і початкову умову (52), отримуємо співвідношення

$$v_n = \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-2 \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} A_n^{j_1} A_{n-j_1}^{j_2} \ldots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i} v_2 +$$

$$+ \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-3 \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} A_n^{j_1} A_{n-j_1}^{j_2} \ldots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i} v_3 +$$

$$+ \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n \\ j_1\ldots j_{i-1} \geq 2 \\ j_i \geq 4}} A_n^{j_1} A_{n-j_1}^{j_2} \ldots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}. \tag{54}$$

Підставивши в (54) значення A_n^j, v_2, v_3 з (53), розв'язок (51) рівняння (50) одержимо у вигляді

$$v_1(x) = 1 + \frac{\lambda x^2}{2}\left(b_0(\varepsilon) + \frac{(b_1(\varepsilon) + m_0^{(0)}(\varepsilon))x}{3}\right) +$$

$$+ \sum_{n=4}^{\infty}\left(\sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-2 \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} \frac{b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2} \ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{2n(n-j_1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})} \times\right.$$

$$\times \frac{b_0(\varepsilon)\lambda^{i+1}}{(n-1)(n-1-j_1)\ldots(n-1-j_1-\ldots-j_{i-1})} +$$

$$+ \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-3 \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} \frac{b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2} \ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{3!n(n-j_1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})} \times$$

$$\times \frac{(b_1(\varepsilon) + m_0^{(0)}(\varepsilon))\lambda^{i+1}}{(n-1)(n-1-j_1)\ldots(n-1-j_1-\ldots-j_{i-1})} +$$

$$+ \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-2 \\ j_1\ldots j_{i-1} \geq 2 \\ j_i \geq 4}} \frac{b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2} \ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{n(n-j_1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})} \times$$

$$\left.\times \frac{\lambda^i}{(n-1)(n-1-j_1)\ldots(n-1-j_1-\ldots-j_{i-1})}\right) x^n. \tag{55}$$

Другий лінійно незалежний розв'язок рівняння (50) шукаємо у вигляді ряду

$$v_1(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} v_n x^n. \tag{56}$$

Початкові умови визначаємо так:

$$v_1(0) = 0, \qquad v_1'(0) = 1. \tag{57}$$

Підставляючи (56) в (50), для коефіцієнтів v_n ряду (56) одержуємо рівняння

$$v_2 = 0, \qquad v_3 = \frac{\lambda b_0(\varepsilon)}{3!}, \qquad v_n = \sum_{j=2}^{n} A_n^j v_{n-j}, \quad n \geq 4. \tag{58}$$

З (57), (58) отримуємо

$$v_n = \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-3 \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} A_n^{j_1} A_{n-j_1}^{j_2} \ldots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i} v_3 +$$

$$+ \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-1 \\ j_1\ldots j_{i-1} \geq 2 \\ j_i \geq 3}} A_n^{j_1} A_{n-j_1}^{j_2} \ldots A_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}. \tag{59}$$

З (56), (58) випливає, що розв'язок (56) рівняння (50) має вигляд

$$v_1(x) = x + \frac{\lambda b_0(\varepsilon) x^3}{3!} +$$

$$+ \sum_{n=4}^{\infty} \left(\sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-3 \\ j_1\ldots j_i \geq 2}} \frac{b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2} \ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{3! n(n-j_1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})} \times \right.$$

$$\times \frac{b_0 \lambda^{i+1}}{(n-1)(n-1-j_1)\ldots(n-1-j_1-\ldots-j_{i-1})} +$$

$$+ \sum_i \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_i=n-1 \\ j_1\ldots j_{i-1} \geq 2 \\ j_i \geq 3}} \frac{b_n^{j_1} b_{n-j_1}^{j_2} \ldots b_{n-j_1-\ldots-j_{i-1}}^{j_i}}{n(n-j_1)\ldots(n-j_1-\ldots-j_{i-1})} \times$$

$$\left. \times \frac{\lambda^i}{(n-1)(n-1-j_1)\ldots(n-1-j_1-\ldots-j_{i-1})} \right) x^n. \tag{60}$$

Із розв'язків (49), (55), (60) рівнянь (41), (50) можна записати загальний розв'язок рівняння (41), а отже, і загальний розв'язок системи рівнянь (37), (38).

Таким чином, у даній статті запропоновано асимптотичний метод інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з кратною точкою звороту.

1. *Wasow W.* Linear turning point theory. – New York Ins.: Springer, 1985. – 243 p.
2. *Lee R. Y.* On uniform simplification of linear differential equation in a full neighborhood of a turning point // J. Math. Anal. and Appl. – 1969. – **27**. – P. 501 – 510.

3. *Hanson R. J.* Reduction theorems for systems of ordinary differential equations with a turning point // Ibid. – 1966. – **16**. – P. 280 – 301.
4. *Hanson R. J., Russell D. L.* Classification and reduction of second order systems at a turning point // J. Math. and Phys. – 1967. – **46**. – P. 74 – 92.
5. *Sibuya Y.* Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point // Mem. Amer. Math. Soc. – 1974. – **149**. – P. 3 – 106.
6. *Kohno M., Ohkohchi S., Kohmoto T.* On full uniform simplification of even order linear differential equations with a parameter // Hiroshima Math. J. – 1979. – **9**. – P. 747 – 767.
7. *Nishimoto T.* On an extension theorem and its application for turning point problems of large order // Kodai Math. Semin. Repts. – 1973. – **25**. – P. 458 – 489.
8. *Turritin H. L.* Stokes multipliers for asymptotic solutions of a central differential equation // Trans. Amer. Math. Soc. – 1950. – **68**. – P. 304 – 329.
9. *Самойленко А. М.* Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1505 – 1516.
10. *Самойленко А. М., Ключник І. Г.* Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 2. – С. 208 – 234.

Одержано 18.05.09