УДК 517.98

М. А. Муратов (Тавр. нац. ун-т, Симферополь),
В. И. Чилин (Нац. ун-т Узбекистана, Ташкент)

(o)-ТОПОЛОГИЯ В $*$-АЛГЕБРАХ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

We consider the topology $t(\mathcal{M})$ of convergence locally in measure in the $*$-algebra $LS(\mathcal{M})$ of all locally measurable operators affiliated to the von Neumann algebra $\mathcal{M}$. We prove that $t(\mathcal{M})$ coincides with (o)-topology in $LS_h(\mathcal{M}) = \{T \in LS(\mathcal{M})\colon T^* = T\}$ if and only if the algebra $\mathcal{M}$ is σ-finite and is of finite type. We also establish relations between $t(\mathcal{M})$ and various topologies which are generated by faithful normal semifinite trace on $\mathcal{M}$.

Розглядається топологія $t(\mathcal{M})$ збіжності локально за мірою в $*$-алгебрі $LS(\mathcal{M})$ усіх локально вимірних операторів, що приєднані до алгебри фон Неймана $\mathcal{M}$. Встановлено, що $t(\mathcal{M})$ збігається з (o)-топологією в $LS_h(\mathcal{M}) = \{T \in LS(\mathcal{M})\colon T^* = T\}$ тоді і лише тоді, коли алгебра $\mathcal{M}$ є σ-скінченною і має скінченний тип. Також встановлено зв'язки між $t(\mathcal{M})$ та різними топологіями, що породжені точним нормальним напівскінченним слідом на $\mathcal{M}$.

Пусть $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — $*$-алгебра всех измеримых комплексных функций, заданных на пространстве с полной мерой (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются). Если $\mu(\Omega) < \infty$, то (o)-топология в $L^0_h(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu)\colon \overline{f} = f\}$ совпадает с топологией сходимости по мере (см., например, [1], гл. III, § 9). В случае, когда мера μ σ-конечна, сходимость в (o)-топологии t_o в $L^0_h(\Omega, \Sigma, \mu)$ равносильна сходимости локально по мере μ, т. е. $f_\alpha \xrightarrow{t_o} f$, $f_\alpha, f \in L^0_h(\Omega, \Sigma, \mu)$, тогда и только тогда, когда $f_\alpha \chi_A \xrightarrow{\mu} f\chi_A$ для всех $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$ [1] (гл. VI, § 3). Если же мера μ не σ-конечна, но обладает свойством прямой суммы, то (o)-топология существенно сильнее топологии сходимости локально по мере μ [2] (гл. V, § 4, 6).

Развитие теории интегрирования для точного нормального полуконечного следа τ, заданного на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, привело к необходимости изучения $*$-алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ τ-измеримых операторов (см., например, [3]). Эта алгебра является заполненной $*$-подалгеброй в $*$-алгебре $S(\mathcal{M})$ всех измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. $*$-Алгебры $S(\mathcal{M})$ были введены И. Сигалом [4] для описания „некоммутативного варианта" $*$-алгебры измеримых комплексных функций. Если $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $\mathcal{M}$ можно отождествить с $*$-алгеброй $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех существенно ограниченных измеримых комплексных функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с полной мерой μ, обладающей свойством прямой суммы. В этом случае $*$-алгебра $S(\mathcal{M})$ отождествляется с $*$-алгеброй $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ [4].

$*$-Алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ и $S(\mathcal{M})$ являются содержательными примерами EW^*-алгебр E замкнутых линейных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, действующих в том же гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, что и $\mathcal{M}$, у которых ограниченная часть $E_b = E \cap \mathcal{B}(\mathcal{H})$ совпадает с $\mathcal{M}$ (см. [5]), где $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$. Естественное желание построения наибольшей EW^*-алгебры E с $E_b = \mathcal{M}$ привело к определению $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$ [5]. В [6] показано, что любая EW^*-алгебра E с $E_b = \mathcal{M}$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$.

В случае существования точного нормального конечного следа τ на $\mathcal{M}$ все три $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадают [7] (§ 2.6), и естественной топологией, наделяющей эти $*$-алгебры структурой топологической $*$-алгебры, является топология сходимости по мере, порожденная следом τ [3]. Если же τ — полуконечный, но не конечный след, то можно рассматривать топологии $t_{\tau l}$ τ-локальной сходимости и $t_{w\tau l}$ слабо τ-локальной сходимости по мере [8]. Однако в этих топологиях в случае, когда $\mathcal{M}$ не имеет конечный тип, операция умножения не является непрерывной по совокупности переменных. В связи с этим в $*$-алгебре $LS(\mathcal{M})$ разумно рассматривать топологию $t(\mathcal{M})$ сходимости локально по мере, определенную в [9] для любых алгебр фон Неймана и наделяющую $LS(\mathcal{M})$ структурой полной топологической $*$-алгебры [7] (§ 3.5).

Наличие естественного частичного порядка в самосопряженной части $LS_h(\mathcal{M}) = \{T \in LS(\mathcal{M})\colon T^* = T\}$ позволяет определять в $LS_h(\mathcal{M})$ (o)-сходимость и порождаемую ею (o)-топологию $t_o(\mathcal{M})$. Как уже отмечалось выше, в случае коммутативной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ верно неравенство $t(\mathcal{M}) \leqslant t_o(\mathcal{M})$, при этом равенство $t(\mathcal{M}) = t_o(\mathcal{M})$ влечет σ-конечность алгебры $\mathcal{M}$. Для некоммутативных алгебр фон Неймана $\mathcal{M}$ такие соотношения между топологиями $t(\mathcal{M})$ и $t_o(\mathcal{M})$, вообще говоря, не выполняются. Так, если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ и топология $t(\mathcal{M})$ совпадает с равномерной топологией, которая строго сильнее (o)-топологии в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ при $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ [7] (§ 3.5).

В настоящей работе изучаются связи между топологией $t(\mathcal{M})$ и топологиями $t_{\tau l}$, $t_{w\tau l}$ и $t_o(\mathcal{M})$. Устанавливается, что совпадение топологий $t(\mathcal{M})$ и $t_{\tau l}$ (соответственно, $t(\mathcal{M})$ и $t_{w\tau l}$) на $S(\mathcal{M}, \tau)$ равносильно конечности типа алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, а равенство $t(\mathcal{M}) = t_o(\mathcal{M})$ на $LS_h(\mathcal{M})$ имеет место в том и только в том случае, когда $\mathcal{M}$ — σ-конечная алгебра конечного типа. При этом используются терминология, обозначения и результаты теории алгебр фон Неймана из [10, 11], а также теории измеримых и локально измеримых операторов из [7, 9].

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство на полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, I — тождественный оператор в $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ — подалгебра фон Неймана в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{P}(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{M}\colon P^2 = P = P^*\}$ — решетка всех проекторов из $\mathcal{M}$, а $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{M})$ — подрешетка ее конечных проекторов. Через $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ будем обозначать центр алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$.

Замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную область определения $\mathfrak{D}(T) \subset \mathcal{H}$, называется *измеримым* относительно $\mathcal{M}$, если существует такая последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $P_n^{\perp} = I - P_n \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{M})$, $n = 1, 2, \ldots$.

Множество $S(\mathcal{M})$ всех измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbf{C}$ относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и сильного умножения, получаемых замыканием обычных операций [4].

Замкнутый линейный оператор T, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и имеющий всюду плотную область определения $\mathfrak{D}(T) \subset \mathcal{H}$, называется *локально измеримым* относительно $\mathcal{M}$, если существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, что $Z_n \uparrow I$ и $TZ_n \in S(\mathcal{M})$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Множество $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов является $*$-алгеброй с единицей I над полем $\mathbf{C}$ относительно тех же алгебраических операций, что и $S(\mathcal{M})$ [9]. В случае, когда $\mathcal{M}$ имеет конечный тип или когда $\mathcal{M}$ — фактор, алгебры $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ совпадают.

Пусть T — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$ в $\mathcal{H}$, $T = U|T|$ — полярное разложение оператора T, где $|T| = (T^*T)^{1/2}$ — модуль оператора T, а U — соответствующая частичная изометрия из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, для которой U^*U является правым носителем для T. Известно, что $T \in LS(\mathcal{M})$ в том и только в том случае, когда $|T| \in LS(\mathcal{M})$ и $U \in \mathcal{M}$ (см., например, [7], § 2.3). Если T — самосопряженный оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$, то спектральное семейство проекторов $\{E_\lambda(T)\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ для T принадлежит $\mathcal{M}$ [7] (§ 2.1).

Для каждого подмножества $E \subset LS(\mathcal{M})$ через E_h (соответственно, E_+) будем обозначать множество всех самосопряженных (соответственно, положительных) операторов из E. Говорят, что сеть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset LS_h(\mathcal{M})$ (o)*-сходится* к оператору $T \in LS_h(\mathcal{M})$ (запись $T_\alpha \xrightarrow{(o)} T$), если существуют такие сети $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{R_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из $LS_h(\mathcal{M})$, что $S_\alpha \leqslant T_\alpha \leqslant R_\alpha$ при всех $\alpha \in A$ и $S_\alpha \uparrow T$, $R_\alpha \downarrow T$. Сильнейшая из топологий в $LS_h(\mathcal{M})$, в которых из (o)-сходимости сетей следует их топологическая сходимость, называется (o)-топологией и обозначается через $t_o(\mathcal{M})$.

Напомним теперь определение топологии сходимости локально по мере. Пусть сначала $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана. Тогда $\mathcal{M}$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех существенно ограниченных комплексных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве (Ω,Σ,μ) с полной мерой μ, обладающей свойством прямой суммы (равные почти всюду функции отождествляются). Свойство прямой суммы для меры μ означает, что для любого ненулевого P из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ существует такой $0 \neq Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $Q \leqslant P$ и $\mu(Q) < \infty$.

Рассмотрим $*$-алгебру $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}) = L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ и определим в $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ топологию $t(\mathcal{M})$ сходимости локально по мере, т. е. хаусдорфову топологию, наделяющую $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ структурой топологической $*$-алгебры, базис окрестностей нуля которой образуют множества

$$W(B,\varepsilon,\delta) = \Big\{f \in L^0(\Omega,\,\Sigma,\,\mu)\colon \text{существует такое множество } \ E \in \Sigma,$$

$$\text{что } \ E \subseteq B,\ \ \mu(B\setminus E) \leqslant \delta,\ \ f\chi_E \in L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu),\ \ \|f\chi_E\|_{L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)} \leqslant \varepsilon\Big\},$$

где $\varepsilon,\delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$, χ_E — индикатор множества E.

Сходимость сети $\{f_\alpha\}$ к f в топологии $t(\mathcal{M})$ (обозначение $f_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f$) означает, что $f_\alpha\chi_B \longrightarrow f\chi_B$ по мере μ для любого $B \in \Sigma$ с $\mu(B) < \infty$. Ясно, что топология $t(\mathcal{M})$ не изменится при замене меры μ на эквивалентную меру. Если $f_\alpha, f \in L_h^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ и $f_\alpha \xrightarrow{(o)} f$, то $f_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f$, и поэтому топология $t(\mathcal{M})$ на $L_h^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ мажорируется (o)-топологией.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана. Отождествим центр $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ с $*$-алгеброй $L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ и обозначим через $L_+(\Omega,\,\Sigma,\,m)$ множество всех измеримых действительных функций, заданных на (Ω,Σ,μ) и принимающих значения в расширенной полупрямой $[0,\,\infty]$ (равные почти всюду функции отождествляются). Пусть $\mathcal{D}\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to L_+(\Omega,\Sigma,\mu)$ — размерностная функция на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ [4].

Для произвольных чисел $\varepsilon,\delta > 0$ и множества $B \in \Sigma$ с $\mu(B) < \infty$ положим

$$V(B,\varepsilon,\delta) = \Big\{T \in LS(\mathcal{M})\colon \text{существуют такие } \ P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}),$$

$$Z \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M})), \ \text{ что } \ ZP^{\perp} \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{M}), \ \ TP \in \mathcal{M},$$

$$\|TP\|_{\mathcal{M}} \leqslant \varepsilon, \ \ Z^{\perp} \in W(B,\varepsilon,\delta) \ \text{ и } \ \mathcal{D}(ZP^{\perp}) \leqslant \varepsilon Z\Big\},$$

где $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ — C^*-норма в $\mathcal{M}$.

В [9] показано, что система множеств

$$\Big\{\{T + V(B,\,\varepsilon,\,\delta)\}\colon \ T \in LS(\mathcal{M}), \ \ \varepsilon,\ \delta > 0, \ \ B \in \Sigma, \ \ \mu(B) < \infty\Big\} \qquad (1)$$

определяет в $LS(\mathcal{M})$ хаусдорфову векторную топологию $t(\mathcal{M})$, в которой множества (1) образуют базу окрестностей оператора $T \in LS(\mathcal{M})$. При этом $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ является полной топологической $*$-алгеброй и топология $t(\mathcal{M})$ не зависит от выбора размерностной функции $\mathcal{D}$. Топология $t(\mathcal{M})$ называется *топологией сходимости локально по мере* [9]. Ясно, что $X \cdot V(B,\varepsilon,\delta) \subset V(B,\varepsilon,\delta)$ для любого $X \in \mathcal{M}$ с нормой $\|X\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$. Поскольку $V^*(B,\varepsilon,\delta) \subset V(B,2\varepsilon,\delta)$ (см., например, [7], § 3.5), то $V(B,\varepsilon,\delta) \cdot Y \subset V(B,4\varepsilon,\delta)$ для всех $Y \in \mathcal{M}$ с $\|Y\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$. Таким образом,

$$X \cdot V(B,\varepsilon,\delta) \cdot Y \subset V(B,4\varepsilon,\delta) \qquad (2)$$

для любых $\varepsilon, \delta > 0$, $B \in \Sigma$ с $\mu(B) < \infty$, $X, Y \in \mathcal{M}$ с $\|X\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$, $\|Y\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$.

Поскольку инволюция непрерывна в топологии $t(\mathcal{M})$, множество $LS_h(\mathcal{M})$ замкнуто в $\big(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M})\big)$. Конус $LS_+(\mathcal{M})$ положительных элементов также замкнут в $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ [9]. Поэтому для каждой возрастающей (или убывающей) сети $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset LS_h(\mathcal{M})$, сходящейся к T в топологии $t(\mathcal{M})$, T принадлежит $LS_h(\mathcal{M})$ и $T = \sup\limits_{\alpha \in A} T_\alpha$ $\Big($соответственно, $T = \inf\limits_{\alpha \in A} T_\alpha\Big)$ см. [12] (гл. V, § 4).

Обозначим через $t_h(\mathcal{M})$ топологию в $LS_h(\mathcal{M})$, индуцируемую топологией $t(\mathcal{M})$ из $LS(\mathcal{M})$.

Теорема 1. (i) $t_h(\mathcal{M}) \leqslant t_o(\mathcal{M})$ *в том и только в том случае, когда* $\mathcal{M}$ *имеет конечный тип.*

(ii) $t_h(\mathcal{M}) = t_o(\mathcal{M})$ *в том и только в том случае, когда* $\mathcal{M}$ — σ*-конечная алгебра конечного типа.*

Доказательство. (i) Пусть $t_h(\mathcal{M}) \leqslant t_o(\mathcal{M})$. Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ не имеет конечный тип, то в $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ найдется последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых попарно ортогональных и попарно эквивалентных проекторов. Выберем частичную изометрию U_n из $\mathcal{M}$, для которой $U_n^* U_n = P_1$, $U_n U_n^* = P_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $P_n \xrightarrow{(o)} 0$, то $P_n \xrightarrow{t_h(\mathcal{M})} 0$, и поэтому в силу (2) $P_1 = U_n^* P_n U_n \xrightarrow{t_h(\mathcal{M})} 0$, т. е. $P_1 = 0$, что не так.

Обратно, пусть $\mathcal{M}$ — алгебра конечного типа, $\Phi\colon \mathcal{M} \mapsto \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ — центрозначный след на $\mathcal{M}$ [11] (гл. V, § 2). Сужение $\mathcal{D}$ следа Φ на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ является размерностной функцией на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Если $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset LS_h(\mathcal{M})$ и $T_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$, то найдется такая сеть $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ из $LS_h(\mathcal{M})$, что $S_\alpha \downarrow 0$ и $-S_\alpha \leqslant T_\alpha \leqslant S_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Зафиксируем $\alpha_0 \in A$ и для $\alpha \geqslant \alpha_0$ положим $X = (I + S_{\alpha_0})^{-1/2}$, $X_\alpha = X T_\alpha X$, $Y_\alpha = X S_\alpha X$. Ясно, что $-I \leqslant -\Phi(Y_\alpha) \leqslant \Phi(X_\alpha) \leqslant \Phi(Y_\alpha) \leqslant I$ и $\Phi(Y_\alpha) \downarrow 0$.

Пусть $E_\lambda^{\perp}(Y_\alpha)$ — спектральный проектор для Y_α, соответствующий интервалу $(\lambda, +\infty)$. Из неравенства $\mathcal{D}(E_\lambda^{\perp}(Y_\alpha)) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\Phi(Y_\alpha)$ следует, что $\mathcal{D}(E_\lambda^{\perp}(Y_\alpha)) \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{Z}_h(\mathcal{M})$ и потому $\mathcal{D}(E_\lambda^{\perp}(Y_\alpha)) \xrightarrow{t(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))} 0$ для всех $\lambda > 0$. Следовательно, $Y_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$.

Аналогично, для $Z_\alpha = X_\alpha + Y_\alpha$, используя неравенство $0 \leqslant Z_\alpha \leqslant 2Y_\alpha$, получаем, что $Z_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$. Следовательно, $X_\alpha = Z_\alpha - Y_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$, и потому $T_\alpha = X^{-1}X_\alpha X^{-1} \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$. Следовательно, $t_h(\mathcal{M}) \leqslant t_o(\mathcal{M})$.

(ii). Если $t_o(\mathcal{M}) = t_h(\mathcal{M})$, то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет конечный тип (см. (i)). Пусть $\{Z_j\}_{j\in\Delta}$ — семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов из $\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, для которых $\sup\limits_{j\in\Delta} Z_j = I$ и $\mu(Z_j) < \infty$ (как и ранее, мы отождествляем коммутативную алгебру фон Неймана $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ с $L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$). Обозначим через E $*$-подалгебру в $L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех тех функций f, для которых $fZ_j = \lambda_j Z_j$ для некоторых $\lambda_j \in \mathbf{C}$, $j \in \Delta$. Ясно, что E $*$-изоморфно $*$-алгебре $\mathbf{C}^\Delta = \{\{\lambda_j\}_{j\in\Delta} \colon \lambda_j \in \mathbf{C}\}$, а E_h изоморфно алгебре $\mathbf{R}^\Delta = \big\{\{r_j\}_{j\in\Delta} \colon r_j \in \mathbf{R}\big\}$, при этом топология $t(\mathcal{M})$ индуцирует на $E_h = \mathbf{R}^\Delta$ топологию t покоординатной сходимости.

Поскольку любая сеть $\{S_\alpha\} \subset E_h$, (o)-сходящаяся к S в $LS_h(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))$, будет ($o$)-сходиться к S в E_h, то (o)-топология $t_o(\mathcal{M})$ индуцирует в E_h (o)-топологию $t_o(E_h)$, и поэтому топология t совпадает с (o)-топологией $t_o(E_h)$.

Следовательно, множество Δ не более чем счетно (см. [2], гл. V, § 6), т. е. $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ — σ-конечная алгебра фон Неймана. Так как алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет конечный тип, $\mathcal{M}$ также σ-конечна [4].

Обратно, если $\mathcal{M}$ — σ-конечная алгебра конечного типа, то $t_h(\mathcal{M}) \leqslant t_o(\mathcal{M})$ и топология $t(\mathcal{M})$ метризуема [9]. Выберем базис $\{V_k\}_{k=1}^\infty$ окрестностей нуля в $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ так, чтобы $V_{k+1} + V_{k+1} \subset V_k$ при всех k. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset$ $\subset LS_h(\mathcal{M})$ и $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$. Используя соотношение (2) и полярное разложение $T_n =$ $= U_n|T_n|$, получаем, что $|T_n| \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$. Выберем подпоследовательность $|T_{n_k}| \in V_k$ и положим $S_k = \sum_{i=1}^k |T_{n_i}|$. Поскольку $S_m - S_{k+1} \in V_k$ при $m > k$, существует такой оператор $S \in LS_h(\mathcal{M})$, что $S_k \xrightarrow{t(\mathcal{M})} S$. Последовательность $R_k =$ $= S - \sum_{i=1}^k |T_{n_i}|$ убывает и $R_k \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$. Поэтому $R_k \downarrow 0$ и $-R_k \leqslant -|T_{n_k}| \leqslant T_{n_k} \leqslant$ $\leqslant |T_{n_k}| \leqslant R_k$, т. е. $T_{n_k} \xrightarrow{(o)} 0$. Это означает, что $t_o(\mathcal{M}) \leqslant t_h(\mathcal{M})$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** (i) *Если $\mathcal{M}$ — σ-конечная алгебра фон Неймана, не имеющая конечный тип, то $t_o(\mathcal{M}) < t_h(\mathcal{M})$.*

(ii) *Если $\mathcal{M}$ — не σ-конечная алгебра фон Неймана, имеющая конечный тип, то $t_h(\mathcal{M}) < t_o(\mathcal{M})$.*

Использовав следствие 1, легко построить пример алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, для которой топологии $t_o(\mathcal{M})$ и $t_h(\mathcal{M})$ не сравнимы. Действительно, если $\mathcal{M}_1$ — σ-конечная алгебра фон Неймана, не имеющая конечный тип, $\mathcal{M}_2$ — не σ-конечная алгебра фон Неймана конечного типа и $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, то топологии $t_o(\mathcal{M})$ и $t_h(\mathcal{M})$ не сравнимы.

Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Оператор $T \in$ $\in S(\mathcal{M})$ с областью определения $\mathfrak{D}(T)$ называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$.

Множество $S(\mathcal{M},\tau)$ всех τ-измеримых операторов образует $*$-подалгебру в $S(\mathcal{M})$, при этом $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M},\tau)$, а в случае конечного следа $S(\mathcal{M},\tau) = S(\mathcal{M})$.

Обозначим через $t(\mathcal{M},\tau)$ топологию в $S(\mathcal{M},\tau)$, индуцируемую топологией $t(\mathcal{M})$ из $LS(\mathcal{M})$. Наряду с топологией $t(\mathcal{M},\tau)$ в $*$-алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ рассматривается топология t_τ *сходимости по мере* [3], базу окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon,\delta)=\Big\{T\in S(\mathcal{M},\tau)\colon \text{существует такой проектор } P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}), \text{ что}$$
$$\tau(P^\perp)\leqslant\delta,\ \ TP\in\mathcal{M},\ \ \|TP\|_{\mathcal{M}}\leqslant\varepsilon\Big\},\ \ \varepsilon>0,\ \ \delta>0.$$

Пара $(S(\mathcal{M},\tau),t_\tau)$ является полной метризуемой топологической $*$-алгеброй. При этом $t(\mathcal{M},\tau)\leqslant t_\tau$, а в случае, когда τ — конечный след, топологии t_τ и $t(\mathcal{M},\tau)$ совпадают (см., например, [7], § 3.4, 3.5). Заметим, что из равенства $t_\tau=t(\mathcal{M},\tau)$ не следует, вообще говоря, конечность типа алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, а значит, конечность следа τ. Так, если $\mathcal{M}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim(\mathcal{H})=\infty$, $\tau=\mathrm{tr}$ — канонический след на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $LS(\mathcal{M})=S(\mathcal{M})=S(\mathcal{M},\tau)=\mathcal{M}$ и обе топологии t_τ и $t(\mathcal{M})$ совпадают с равномерной топологией в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана и $t_\tau=t(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(I)<\infty$. Действительно, если $\tau(I)=\infty$, то имеется последовательность $\{P_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{P}(\mathcal{M})$, для которой $P_n\downarrow 0$ и $\tau(P_n)=\infty$, т. е. $P_n\xrightarrow{t(\mathcal{M})}0$ (теорема 1), но $P_n\overset{t_\tau}{\not\longrightarrow}0$.

Обозначим через $t_{o\tau}(\mathcal{M})$ (o)-топологию в $S_h(\mathcal{M},\tau)$, а через $t_{h\tau}$ сужение топологии t_τ на $S_h(\mathcal{M},\tau)$. Из соотношений $U^*(\varepsilon,\delta)\subset U(\varepsilon,2\delta)$, $TU(\varepsilon,\delta)\subset U(\varepsilon\|T\|_{\mathcal{M}},\delta)$, $T\in\mathcal{M}$, следует, что равенство $t_{o\tau}(\mathcal{M})=t_{h\tau}$ влечет конечность типа алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ (см. доказательство теоремы 1) и конечность следа τ. Используя метризуемость топологии t_τ и повторяя доказательство п. (ii) теоремы 1, получаем, что $t_{o\tau}(\mathcal{M})\leqslant t_{h\tau}$.

Наряду с топологией t_τ на $S(\mathcal{M},\tau)$ можно рассмотреть еще две хаусдорфовы векторные топологии, ассоциированные со следом τ [8]. Это топология $t_{\tau l}$ *τ-локальной сходимости по мере* и топология $t_{w\tau l}$ *слабой τ-локальной сходимости по мере*. Базис окрестностей нуля в топологии $t_{\tau l}$ (соответственно, в топологии $t_{w\tau l}$) образуют множества

$$U_\tau(\varepsilon,\delta,P)=\Big\{T\in S(\mathcal{M},\tau)\colon \text{существует такой проектор } Q\in\mathcal{P}(\mathcal{M}), \text{ что}$$
$$Q\leqslant P,\ \ \tau(P-Q)\leqslant\delta,\ \ TQ\in\mathcal{M},\ \ \|TQ\|_{\mathcal{M}}\leqslant\varepsilon\Big\}$$

$\Big($соответственно,

$$U_{w\tau}(\varepsilon,\delta,P)=\{T\in S(\mathcal{M},\tau):\ \ \text{существует такой проектор } Q\in\mathcal{P}(\mathcal{M}), \text{ что}$$
$$Q\leqslant P,\ \ \tau(P-Q)\leqslant\delta,\ \ QTQ\in\mathcal{M},\ \ \|QTQ\|_{\mathcal{M}}\leqslant\varepsilon\Big\}\Big),$$

где $\varepsilon>0,\ \delta>0,\ P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}),\ \tau(P)<\infty$.

Ясно, что

$$t_{w\tau l}\leqslant t_{\tau l}\leqslant t_\tau,$$

а в случае, когда $\tau(I)<\infty$, все три топологии $t_{w\tau l}$, $t_{\tau l}$ и t_τ совпадают.

Заметим, что для $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\tau = \mathrm{tr}$ топология $t_{\tau l}$ совпадает с сильной операторной топологией, а топология $t_{w\tau l}$ — со слабой операторной топологией.

Теорема 2. $t_{\tau l} \leqslant t(\mathcal{M}, \tau)$.

Доказательство. Если $\{T_\alpha\} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ и $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$, то $|T_\alpha|^2 \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$. Для $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ с $\tau(P) < \infty$ имеем, что $P|T_\alpha|^2 P \xrightarrow{t(P\mathcal{M}P)} 0$, и поэтому $P|T_\alpha|^2 P \xrightarrow{t_\tau} 0$, что влечет сходимость $|T_\alpha|^2 \xrightarrow{t_{w\tau l}} 0$ [8]. Следовательно, $T_\alpha \xrightarrow{t_{\tau l}} 0$.

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что всегда выполняются неравенства

$$t_{w\tau l} \leqslant t_{\tau l} \leqslant t(\mathcal{M}, \tau) \leqslant t_\tau.$$

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times L_\infty[0, \infty)$, $\tau((T, f)) = \mathrm{tr}\, T + \displaystyle\int_0^\infty f\, d\mu$, где $T \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$, $0 \leqslant f \in L_\infty[0, \infty)$, μ — линейная мера Лебега на $[0, \infty)$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, то

$$S(\mathcal{M}, \tau) = \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times S(L_\infty[0, \infty)).$$

В этом случае имеют место строгие неравенства

$$t_{w\tau l} < t_{\tau l} < t(\mathcal{M}, \tau) < t_\tau.$$

Для нахождения необходимых и достаточных условий совпадения топологии $t(\mathcal{M}, \tau)$ с топологиями $t_{\tau l}$ и $t_{w\tau l}$ используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, τ — точный, нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{M}$, $\sup\limits_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_\mathcal{M} \leqslant 1$. Тогда*:

(i) *если $\tau(I) < \infty$, то $T_\alpha \xrightarrow{t_\tau} 0 \Longleftrightarrow \tau(|T_\alpha|) \longrightarrow 0$;*

(ii) *если алгебра $\mathcal{M}$ имеет конечный тип, то $T_\alpha \xrightarrow{t_{\tau l}} 0 \Longleftrightarrow T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$.*

Доказательство. (i) Если $\tau(|T_\alpha|) \to 0$, то из неравенства

$$\tau\big(\{|T_\alpha| > \lambda\}\big) \leqslant \frac{1}{\lambda} \tau(|T_\alpha|), \quad \lambda > 0,$$

непосредственно следует, что $T_\alpha \xrightarrow{t_\tau} 0$ $\Big($здесь не требуется ограничения $\sup\limits_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_\mathcal{M} \leqslant 1\Big)$. Обратно, пусть $T_\alpha \xrightarrow{t_\tau} 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\alpha(\varepsilon)$ и $P_\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ для $\alpha \geqslant \alpha(\varepsilon)$, что $\tau(P_\alpha^\perp) \leqslant \varepsilon$, $T_\alpha P_\alpha \in \mathcal{M}$, $\|T_\alpha P_\alpha\|_\mathcal{M} \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $\||T_\alpha| P_\alpha\|_\mathcal{M} \leqslant \varepsilon$ и $\tau(|T_\alpha| P_\alpha) \leqslant \varepsilon \tau(I)$, и поэтому

$$\tau(|T_\alpha|) \leqslant \varepsilon \tau(I) + \tau\big(|T_\alpha| P_\alpha^\perp\big) \leqslant \varepsilon \tau(I) + \varepsilon \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_\mathcal{M},$$

т. е. $\tau(|T_\alpha|) \to 0$.

(ii) Если $T_\alpha \xrightarrow{t_{\tau l}} 0$, то $|T_\alpha| \xrightarrow{t_{w\tau l}} 0$ [8]. Пусть $\mathcal{P}_\tau(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})\colon \tau(P) < \infty\}$. Для каждого конечного подмножества $\beta = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{P}_\tau(\mathcal{M})$ положим $Q_\beta = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} P_i$. Обозначим через $B = \{\beta\}$ направленность всех конечных подмножеств из $\mathcal{P}_\tau(\mathcal{M})$, упорядоченную по включению. Ясно, что $Q_\beta \uparrow I$ и $Q_\beta \in \mathcal{P}_\tau(\mathcal{M})$ для всех $\beta \in B$.

Пусть $\Phi : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ — центрозначный след на $\mathcal{M}$, V, U — такие окрестности нуля в $(S(\mathcal{Z}(\mathcal{M})), t(\mathcal{Z}(\mathcal{M})))$, что $V + V \subset U$ и $XV \subset V$ для любого $X \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$

с $\|X\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$. Поскольку $\Phi(Q^{\perp}_{\beta}) \downarrow 0$, то найдется такое $\beta_0 \in B$, что $\Phi(Q^{\perp}_{\beta_0}) \in V$. В силу неравенств

$$0 \leqslant \Phi\big(Q^{\perp}_{\beta_0}|T_\alpha|Q^{\perp}_{\beta_0}\big) \leqslant \sup_{\alpha\in A}\|T_\alpha\|_{\mathcal{M}}\Phi(Q^{\perp}_{\beta_0}) \leqslant \Phi(Q^{\perp}_{\beta_0})$$

имеем, что $\Phi\big(Q^{\perp}_{\beta_0}|T_\alpha|Q^{\perp}_{\beta_0}\big) \in V$ для всех α.

Отождествим центр $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ с $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ и для $E \in \Sigma$ с $\mu(E) < \infty$ рассмотрим точный нормальный конечный след ν_E на $\chi_E\mathcal{M}$, задаваемый равенством $\nu_E(X) = \displaystyle\int_E \Phi(X)d\mu$. Так как $|T_\alpha| \xrightarrow{t_{w\tau l}} 0$, то $X_\alpha = Q_{\beta_0}|T_\alpha|Q_{\beta_0} \xrightarrow{\tau} 0$. Следовательно, $\chi_E X_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$, и потому $\chi_E X_\alpha \xrightarrow{\nu_E} 0$. Отсюда, в силу пункта (i) имеем $\displaystyle\int_E \Phi(X_\alpha)d\mu = \nu(\chi_E X_\alpha) \longrightarrow 0$. Следовательно, $\chi_E\Phi(X_\alpha) \xrightarrow{\mu} 0$ для любого $E \in \Sigma$ с $\mu(E) < \infty$, что влечет сходимость $\Phi(X_\alpha) \xrightarrow{t(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))} 0$. Поэтому найдется такое $\alpha(V)$, что $\Phi(X_\alpha) \in V$ при всех $\alpha \geqslant \alpha(V)$. Используя равенство $\Phi(XY) = \Phi(YX)$ для $X, Y \in \mathcal{M}$ [10] (п. 7.11), получаем

$$\Phi\big(|T_\alpha|\big) = \Phi\big(Q_{\beta_0}|T_\alpha|Q_{\beta_0}\big) + \Phi\big(Q^{\perp}_{\beta_0}|T_\alpha|Q^{\perp}_{\beta_0}\big) \in V + V \subset U$$

при $\alpha \geqslant \alpha(V)$, что влечет сходимость $\Phi\big(|T_\alpha|\big) \xrightarrow{t(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))} 0$. Следовательно, $\Phi\big(E^{\perp}_{\lambda}(|T_\alpha|)\big) \xrightarrow{t(\mathcal{Z}(\mathcal{M}))} 0$, и потому $E^{\perp}_{\lambda}(|T_\alpha|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ при всех $\lambda > 0$, что обеспечивает сходимость $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$.

Лемма доказана.

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $t_{w\tau l} = t(\mathcal{M},\tau)$;

(ii) $t_{\tau l} = t(\mathcal{M},\tau)$;

(iii) $\mathcal{M}$ *имеет конечный тип.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Если $t_{w\tau l} = t(\mathcal{M},\tau)$, то операция умножения в $\big(S(\mathcal{M},\tau), t_{w\tau l}\big)$ непрерывна по совокупности переменных. В этом случае, как показано [8] (теорема 4.1), $t_{\tau l} = t_{w\tau l}$ и $\mathcal{M}$ имеет конечный тип. Аналогично устанавливается импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Если $\mathcal{M}$ имеет конечный тип, то $t_{w\tau l} = t_{\tau l}$ [8], и поэтому из $\{T_\alpha\} \subset S(\mathcal{M},\tau)$, $T_\alpha \xrightarrow{t_{w\tau l}} 0$ следует, что $|T_\alpha| \xrightarrow{t_{w\tau l}} 0$. При $\lambda \geqslant 1$ имеем $0 \leqslant E^{\perp}_{\lambda}(|T_\alpha|) \leqslant |T_\alpha|$, откуда $E^{\perp}_{\lambda}(|T_\alpha|) \xrightarrow{t_{w\tau l}} 0$ [8] и $E^{\perp}_{\lambda}(|T_\alpha|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ для всех $\lambda \geqslant 1$ (лемма 1). Поскольку

$$E^{\perp}_{\lambda}\big(|T_\alpha|E^{\perp}_{1}(|T_\alpha|)\big) = \begin{cases} E^{\perp}_{1}\big(|T_\alpha|7), & 0 < \lambda < 1, \\ E^{\perp}_{\lambda}(|T_\alpha|), & \lambda \geqslant 1, \end{cases}$$

то $|T_\alpha|E^{\perp}_{1}(|T_\alpha|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$. Из неравенства $|T_\alpha|E_1(|T_\alpha|) \leqslant |T_\alpha|$ следует, что

$$|T_\alpha|E_1(|T_\alpha|) \xrightarrow{t_{w\tau l}} 0.$$

Поскольку $t_{w\tau l} = t_{\tau l}$, и $\big\||T_\alpha|E_1(|T_\alpha|)\big\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$, то $|T_\alpha|E_1(|T_\alpha|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ (лемма 1).

Таким образом, $|T_\alpha| = |T_\alpha|E_1(|T_\alpha|) + |T_\alpha|E^{\perp}_{1}(|T_\alpha|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$, и потому $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$, т. е. $t(\mathcal{M},\tau) \leqslant t_{w\tau l}$. Из теоремы 2 вытекает равенство $t_{w\tau l} = t(\mathcal{M},\tau)$.

Теорема доказана.

Обозначим через $t_{h\tau l}$ (соответственно, $t_{hw\tau l}$) топологию в $S_h(\mathcal{M},\tau)$, индуцируемую топологией $t_{\tau l}$ (соответственно, топологией $t_{w\tau l}$) из $S(\mathcal{M},\tau)$.

Теорема 4. $t_{hw\tau l} \leqslant t_{h\tau l} \leqslant t_{o\tau}(\mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset S_h(\mathcal{M},\tau)$, $T_\alpha \downarrow 0$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\tau(P) < \infty$. Поскольку $(PT_\alpha P) \downarrow 0$, то $PT_\alpha P \xrightarrow{t_{h\tau}} 0$ и потому $T_\alpha \xrightarrow{t_{w\tau l}} 0$ [8]. Если $0 \leqslant S_\alpha \leqslant T_\alpha$, $S_\alpha \in S_h(\mathcal{M},\tau)$, то $S_\alpha \xrightarrow{t_{w\tau l}} 0$, и в силу [8] $\sqrt{S_\alpha} \xrightarrow{t_{\tau l}} 0$.

Пусть $\mu_t(T) = \inf\left\{\|TP\|_{\mathcal{M}} \colon P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}),\, \tau(P^\perp) \leqslant t\right\}$, $t > 0$, — невозрастающая перестановка оператора T. Зафиксируем $\alpha_0 \in A$. Для каждого $\alpha \geqslant \alpha_0$ имеем $\mu_t(\sqrt{S_\alpha}) = \sqrt{\mu_t(S_\alpha)} \leqslant \sqrt{\mu_t(T_\alpha)} \leqslant \sqrt{\mu_t(T_{\alpha_0})}$, в частности, $\sup\limits_{\alpha\geqslant\alpha_0} \mu_t(\sqrt{S_\alpha}) \leqslant \sqrt{\mu_t(T_{\alpha_0})} < \infty$ для всех $t > 0$. Следовательно, сеть $\{\sqrt{S_\alpha}\}_{\alpha\geqslant\alpha_0}$ t_τ-ограничена, и поэтому $S_\alpha \xrightarrow{t_{\tau l}} 0$ [8]. Повторяя теперь конец доказательства п. (i) теоремы 1, получаем, что $t_{h\tau l} \leqslant t_{o\tau}(\mathcal{M})$.

Теорема доказана.

В случае $\tau(I) < \infty$ имеют место равенства $t_{hw\tau l} = t_{h\tau l} = t_{o\tau}(\mathcal{M}) = t_{h\tau}$. Если же $\tau(I) = \infty$, то равенство $t_{h\tau l} = t_{o\tau}(\mathcal{M})$ неверно даже в коммутативном случае.

Действительно, пусть $\mathcal{M}$ — σ-конечная коммутативная алгебра фон Неймана, $\tau(I) = \infty$, $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $P_nP_m = 0$ при $n \neq m$, $\tau(P_n) \geqslant 1$, $\sup\limits_{n\geqslant1} P_n = I$. Ясно, что $T_n = nP_n \xrightarrow{(o)} 0$ в $S_h(\mathcal{M},\tau)$, и поэтому $T_n \xrightarrow{t_{\tau l}} 0$ (теорема 4). Если $T_n \xrightarrow{t_{o\tau}(\mathcal{M})} 0$, то существует подпоследовательность $T_{n_k} \xrightarrow{(o)} 0$ [1] (гл. VI, § 4), в частности найдется такой оператор $S \in S_h(\mathcal{M},\tau)$, что $n_kP_{n_k} \leqslant S$ для любого $k = 1,2,\ldots$. Следовательно, $0 \leqslant P_{n_k} \leqslant (n_k)^{-1}S \xrightarrow{t_\tau} 0$, что противоречит неравенству $\tau(P_{n_k}) \geqslant 1$.

***Замечание* 1.** Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim(\mathcal{H}) = \infty$, $\tau = tr$, то верны строгие неравенства
$$t_{hw\tau l} < t_{h\tau l} < t_{o\tau}(\mathcal{M}) < t_{h\tau}.$$

Действительно, равенство $t_{hw\tau l} = t_{h\tau l}$ невозможно, так как в этом случае $t_{h\tau l} = t_{\tau l}$, что неверно при $\dim\mathcal{H} = \infty$. Равенство $t_{o\tau}(\mathcal{M}) = t_{h\tau}$ влечет конечность следа τ, что не так.

Предположим, что $t_{h\tau l} = t_{o\tau}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Пусть $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность попарно ортогональных одномерных проекторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P = \sup\limits_{n\geqslant1} P_n$, $\mathcal{A} = P\,\mathcal{B}(\mathcal{H})P = \mathcal{B}(P(\mathcal{H}))$. Если $\{S_\alpha\} \subset \mathcal{A}_h$ и $S_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{B}_h(\mathcal{H})$, то существует такая сеть $\{T_\alpha\} \subset \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$, что $-T_\alpha \leqslant S_\alpha \leqslant T_\alpha$ и $T_\alpha \downarrow 0$. Поскольку $-P\,T_\alpha P \leqslant P\,S_\alpha P = S_\alpha \leqslant P\,T_\alpha P$ и $P\,T_\alpha P \downarrow 0$, то $S_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{A}_h$. Это означает, что (o)-топология $t_{o\tau}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ индуцирует в $\mathcal{A}_h$ (o)-топологию $t_{o\tau}(\mathcal{A})$. Ясно, что сильная операторная топология $t_{\tau l}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ индуцирует в $\mathcal{A} = \mathcal{B}(P(\mathcal{H}))$ сильную операторную топологию. Поэтому из равенства $t_{h\tau l} = t_{o\tau}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ следует равенство топологии $t_{o\tau}(\mathcal{A})$ и сильной операторной топологии в $\mathcal{A}_h$. Таким образом, строгое неравенство $t_{h\tau l} < t_{o\tau}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ достаточно установить для сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. В этом случае топология $t_{\tau l}$ метризуема на любом ограниченном по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ подмножестве из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ [11] (гл. II, § 2). Поэтому из сходимости $T_\alpha \downarrow 0$ вытекает существование такой последовательности индексов $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$, что $T_{\alpha_n} \downarrow 0$. Следовательно, для любой сети $S_\alpha \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{B}_h(\mathcal{H})$

существует последовательность индексов $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$, для которой $S_{\alpha_n} \xrightarrow{(o)} 0$. Это означает, что множество $F \subset \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$ замкнуто в (o)-топологии $t_{o\tau}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ в том и только в том случае, когда F содержит (o)-пределы всех (o)-сходящихся последовательностей элементов из F.

Положим $F = \{nP_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку любая подпоследовательность $\{n_k P_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ не ограничена в $\mathcal{B}_h(\mathcal{H})$, то множество F замкнуто в (o)-топологии $t_{o\tau}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$. В то же время точка $T = 0$ принадлежит замыканию множества F в топологии $t_{\tau l}$ [11] (гл. II, § 2). Следовательно, $t_{h\tau l} < t_{o\tau}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматиз, 1961. – 408 с.
2. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Д., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры. – Ташкент: ФАН, 1983. – 303 с.
3. *Nelson E.* Notes on non commutative integration // J. Funct. Anal. – 1974. – № 15. – P. 103 – 116.
4. *Segal I. E.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math. – 1953. – № 57. – P. 401 – 457.
5. *Dixon P. G.* Unbounded operator algebras // Proc. London Math. Soc. – 1973. – **23**. – № 3. – P. 53 – 59.
6. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Абстрактная характеризация EW^*-алгебр // Функцион. анализ и его прил. – 1991. – **25**, вып. 1. – С. 76 – 78.
7. *Муратов М. А., Чилин И. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2007. – 389 с.
8. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2006. – **255**. – С. 1 – 14.
9. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1974. – **74**. – P. 257 – 268.
10. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann algebras. – England Abacus Press, 1975. – 478 p.
11. *Takesaki M.* Theory of operator algebras I. – New York: Springer, 1979. – 415 p.
12. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 360 с.

Получено 22.05.09