УДК 517.988.6

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

МЕТОД ЛОКАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В ТЕОРІЇ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Conditions for the existence of solutions of nonlinear differential equations in the space of functions bounded on the axis are obtained with the use of local linear approximation of these equations.

Получены условия существования решений нелинейных дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных на оси функций с использованием локальной линейной аппроксимации этих уравнений.

1. Основний об'єкт досліджень. Нехай E — скінченновимірний банаховий простір із нормою $\|\cdot\|_E$, X і Y — довільні банахові простори і $L(X, Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів A, що діють із простору X у простір Y, з нормою $\|A\|_{L(X,Y)} = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$. Позначимо через $C^0(\mathbb{R}, X)$ банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в X з нормою $\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, X)} = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_X$, а через $C^1(\mathbb{R}, X)$ банаховий простір функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, X)$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt} \in C^0(\mathbb{R}, X)$, з нормою $\|x\|_{C^1(\mathbb{R}, X)} = \left\{\|x\|_{C^0(\mathbb{R}, X)}, \left\|\dfrac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R}, X)}\right\}$.

Розглянемо диференціальні оператори $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$, що діють із простору $C^1(\mathbb{R}, E)$ у простір $C^0(\mathbb{R}, E)$ і визначаються формулами

$$(\mathcal{F}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + f(t, x(t)), \tag{1}$$

$$t \in \mathbb{R},$$

$$(\mathcal{G}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + g(x(t)), \tag{2}$$

де відображення $f\colon \mathbb{R} \times E \to E$ і $g\colon E \to E$ неперервні і для кожного числа $r > 0$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_E \le r} \|f(t, x)\|_E < +\infty. \tag{3}$$

Завдяки вимогам до відображень f і g оператори $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ є обмеженими. Нагадаємо, що оператор $C\colon X \to Y$ є обмеженим, якщо цей оператор кожну обмежену множину відображає в обмежену множину [1].

Метою цієї статті є з'ясування умов, за яких множини значень $R(\mathcal{F})$ і $R(\mathcal{G})$ операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ збігаються з $C^0(\mathbb{R}, E)$. Зазначимо, що така задача для нелінійних диференціальних рівнянь є складною (див., наприклад, [1 – 6]). Тому ми обмежимося розглядом лише достатніх умов, що забезпечують виконання співвідношень $R(\mathcal{F}) = C^0(\mathbb{R}, E)$ і $R(\mathcal{G}) = C^0(\mathbb{R}, E)$ і в деяких окремих випадках збігаються з необхідними умовами виконання цих співвідношень.

В основу досліджень операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{G}$ в цій статті покладено метод, що використовує локальну лінійну апроксимацію цих операторів.

2. Формулювання основних тверджень. Позначимо через $\mathcal{D}$ множину елементів $A = A(t)$ простору $C^0\big(\mathbb{R}, L(E, E)\big)$, для кожного з яких оператор $\mathcal{L}_A : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається формулою

$$(\mathcal{L}_A x)(t) \;=\; \frac{dx(t)}{dt} + A(x)\,x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

має неперервний обернений оператор $\mathcal{L}_A^{-1} : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^1(\mathbb{R}, E)$. Через $\mathcal{E}$ позначимо множину операторів $B \in L(E, E)$, для кожного з яких спектр $\sigma(B)$ не має спільних точок з множиною $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$. Для кожного такого оператора оператор $\mathcal{L}_B : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається формулою

$$(\mathcal{L}_B x)(t) \;=\; \frac{dx(t)}{dt} + Bx(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

має неперервний обернений оператор $\mathcal{L}_B^{-1}$ [7].

Основними в статті є наступні два твердження.

Теорема 1. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $A \in \mathcal{D}$, що*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_E \le r} \|f(t, x) - A(t)\,x\|_E \;\le\; \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_A^{-1}\right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R}, E),\, C^0(\mathbb{R}, E)\right)}} - H. \tag{6}$$

Тоді для кожного $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ рівняння

$$\mathcal{F}x \;=\; h \tag{7}$$

має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Окремим випадком цієї теореми є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $B \in \mathcal{E}$, що*

$$\max_{\|x\|_E \le r} \|g(x) - Bx\|_E \;\le\; \frac{r}{\left\|\mathcal{L}_B^{-1}\right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R}, E),\, C^0(\mathbb{R}, E)\right)}} - H. \tag{8}$$

Тоді для кожного $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$ рівняння

$$\mathcal{G}x \;=\; h \tag{9}$$

має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, E)$.

Ці теореми покладено в основу методу, за допомогою якого з'ясовуються умови існування обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. Ми доведемо ці твердження, використавши ряд допоміжних результатів.

3. Основні допоміжні твердження. Наведемо низку результатів про c-неперервні та c-цілком неперервні оператори, необхідні для доведення теорем 1 і 2.

3.1. Локально збіжні послідовності. Послідовність $x_k \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, називатимемо *локально збіжною* до $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0(\mathbb{R},\, E)} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \| x_k \|_{C^0(\mathbb{R},\, E)} < +\infty$ і $\lim\limits_{k \to \infty} \max\limits_{|t| \le T} \| x_k(t) - x(t) \|_E = 0$ для кожного числа $T > 0$. Аналогічно, послідовність $y_k \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, називатимемо *локально збіжною* до $y \in C^1(\mathbb{R}, E)$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$y_k \xrightarrow{\text{loc.},\, C^1(\mathbb{R},\, E)} y \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо $y_k \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0(\mathbb{R},\, E)} y$ і $\dfrac{dy_k}{dt} \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0(\mathbb{R},\, E)} \dfrac{dy}{dt}$ при $k \to \infty$.

Розглянемо функцію $p_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ і лінійний неперервний оператор $\mathcal{P}_n$: $C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначаються рівностями

$$p_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |t| \le n, \\ \cos^2\big(|t| - n\big), & \text{якщо} \quad n < |t| < n + \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{якщо} \quad |t| \ge n + \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

і

$$(\mathcal{P}_n x)(t) = p_n(t)\, x(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Очевидно, що $\mathcal{P}_n C^1(\mathbb{R}, E) \subset C^1(\mathbb{R}, E)$ і

$$\| \mathcal{P}_n \|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)} = 1 \tag{11}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Важливою для подальшого є наступна лема.

Лема 1. *Для кожної обмеженої послідовності* $(x_m)_{m \ge 1}$ *елементів простору* $C^0(\mathbb{R}, E)$, *для якої множини* $\{\mathcal{P}_n x_m : m \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$, *передкомпактні, існують такі строго зростаюча послідовність* $(m_k)_{k \ge 1}$ *натуральних чисел і елемент* $x \in C^0(\mathbb{R}, E)$, *що*

$$x_{m_k} \xrightarrow{\text{loc.},\, C^0(\mathbb{R},\, E)} x \quad \textit{при} \quad k \to \infty \tag{12}$$

і

$$\| x \|_{C^0(\mathbb{R},\, E)} \le \sup_{m \in \mathbb{N}} \| x_m \|_{C^0(\mathbb{R},\, E)}. \tag{13}$$

Доведення. На підставі умов леми існують такі підпослідовності

$$x_{m_{1,1}},\ x_{m_{1,2}},\ \ldots,\ x_{m_{1,p}},\ \ldots,$$

$$x_{m_{2,1}},\ x_{m_{2,2}},\ \ldots,\ x_{m_{2,p}},\ \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{m_{n,1}},\ x_{m_{n,2}},\ \ldots,\ x_{m_{n,p}},\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

послідовності $(x_m)_{m\ge 1}$, що:

1) послідовності чисел $m_{l,p}$, $p\in\mathbb{N}$, є строго зростаючими для кожного $l\in\mathbb{N}$ і

$$\{m_{1,p}: p\in\mathbb{N}\} \supset \{m_{2,p}: p\in\mathbb{N}\} \supset \ldots \supset \{m_{n,p}: p\in\mathbb{N}\} \supset \ldots;$$

2) для кожного $n\in\mathbb{N}$ послідовність функцій $x_{m_{n,p}}$, $p\in\mathbb{N}$, є рівномірно збіжною на відрізку $[-n, n]$.

Тоді діагональна послідовність

$$x_{m_{1,1}},\ x_{m_{2,2}},\ \ldots,\ x_{m_{p,p}},\ \ldots$$

буде рівномірно збіжною на кожному відрізку $[a, b]\subset\mathbb{R}$, а тому функція

$$x(t) = \lim_{h\to\infty} x_{m_{p,p}}(t), \qquad t\in\mathbb{R},$$

буде неперервною і, очевидно, виконується нерівність (13). Звідси також випливає, що виконується співвідношення (12).

Лему 1 доведено.

3.2. c-Неперервні та c-цілком неперервні оператори. Оператор $\mathcal{H}$: $C^i(\mathbb{R}, E)\to C^j(\mathbb{R}, E)$, $i, j\in\{0, 1\}$, називається *c-неперервним*, якщо для довільних $x\in C^i(\mathbb{R}, E)$ і $x_k\in C^i(\mathbb{R}, E)$, $k\in\mathbb{N}$, для яких

$$x_k \xrightarrow{\text{loc.}, C^i(\mathbb{R}, E)} x \quad \text{при} \quad k\to\infty,$$

виконується співвідношення

$$\mathcal{H}x_k \xrightarrow{\text{loc.}, C^j(\mathbb{R}, E)} \mathcal{H}x \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Оператор $\mathcal{H}$: $C^i(\mathbb{R}, E)\to C^j(\mathbb{R}, E)$, $i, j\in\{0, 1\}$, називається *c-цілком неперервним*, якщо цей оператор є *c-неперервним* і для кожного $n\in\mathbb{N}$ оператор $\mathcal{P}_n\mathcal{H}$ є цілком неперервним.

Поняття c-неперервного оператора (на мові „ε, δ”) і c-цілком неперервного оператора введено до розгляду Е. Мухамадієвим [8, 9]. Вивчення цих понять було продовжено в [9 – 16]. Означення c-неперервного оператора, що використовує локально збіжні послідовності, запропоновано автором (див., наприклад, [17, 18]).

Прикладами c-неперервних операторів є оператори $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{L}_B$ і $\mathcal{P}_n$, що визначаються відповідно рівностями (1), (2), (4), (5) і (10). Прикладами c-цілком неперервних операторів є лінійні оператори $\mathcal{L}_A^{-1}$: $C^0(\mathbb{R}, E)\to C^0(\mathbb{R}, E)$, $A\in\mathcal{D}$, і $\mathcal{L}_B^{-1}$: $C^0(\mathbb{R}, E)\to C^0(\mathbb{R}, E)$, $A\in\mathcal{E}$, що на підставі критерію компактності Арцела [19] та означення c-цілком неперервного оператора випливає із наступного твердження.

Теорема 3 [12]. *Нехай оператор* $D\in L\big(C^1(\mathbb{R}, E),\ C^0(\mathbb{R}, E)\big)$ *є c-цілком неперервним і оператор* $\dfrac{d}{dt} + D$: $C^1(\mathbb{R}, E)\to C^0(\mathbb{R}, E)$ *має неперервний обернений* $\left(\dfrac{d}{dt} + D\right)^{-1}$.

Тоді оператор $\left(\dfrac{d}{dt} + D\right)^{-1} : C^0(\mathbb{R}, E) \to C^1(\mathbb{R}, E)$ *є* *c-неперервним.*

Зауважимо, що не кожний неперервний оператор є c-неперервним оператором. Це підтверджується наступним прикладом оператора.

***Приклад* 1.** Розглянемо неперервний оператор $D\colon C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що визначається рівністю $(Dx)(t) = \|x\|_{C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$, і послідовність елементів $x_n(t) = 1 - p_n(t), n \geq 1$, простору $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Оператор D не є c-неперервним. Справді, $x_n \xrightarrow{\text{loc.}, C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} 0$ при $n \to \infty$. Однак співвідношення $Dx_n \xrightarrow{\text{loc.}, C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})} D0$ при $n \to \infty$ не виконується, оскільки $(Dx_n)(t) \equiv \equiv 1, n \geq 1$, і $(D0)(t) \equiv 0$.

3.3. Теорема про нерухому точку для c-цілком неперервних операторів.

Теорема 4. *Нехай* $\mathcal{B}$ *— замкнена куля з центром у точці* 0 *у банаховому просторі* $C^0(\mathbb{R}, E)$ *і оператор* $\mathfrak{A}: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *є* *c-цілком неперервним. Тоді* $\mathfrak{A}$ *має нерухому точку.*

Доведення. Розглянемо рівняння

$$x_m = \mathcal{P}_m \mathfrak{A} x_m, \tag{14}$$

де $\mathcal{P}_m$, $m \in \mathbb{N}$, — оператор, визначений рівністю (10). На підставі умов леми 1 та рівності (11) оператор $\mathcal{P}_m \mathfrak{A}$ є цілком неперервним і $\mathcal{P}_m \mathfrak{A} \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$. Тому за теоремою Шаудера про нерухому точку [20] рівняння (14) має розв'язок $x_m^* \in \mathcal{B}$, тобто

$$x_m^* = \mathcal{P}_m \mathfrak{A} x_m^*. \tag{15}$$

Оскільки для кожних $n \in \mathbb{N}$ і $m \geq n+2$

$$\mathcal{P}_m x_m^* = \mathcal{P}_n \mathcal{P}_m \mathfrak{A} x_m^* = \mathcal{P}_n \mathfrak{A} x_m^*,$$

$\left\{\mathcal{P}_n x_m^* : n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathcal{B}$ і оператор $\mathcal{P}_n \mathfrak{A}$ є цілком неперервним, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $\left\{\mathcal{P}_n x_m^* : m \in \mathbb{N}\right\}$ є передкомпактною. Тому на підставі леми 1 існують елемент $x^* \in \mathcal{B}$ і строго зростаюча послідовність натуральних чисел m_k, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$x_{m_k}^* \xrightarrow{\text{loc.}, C^0(\mathbb{R}, E)} x^* \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Покажемо, що

$$\mathfrak{A} x^* = x^*.$$

Використаємо очевидні рівності

$$x^* - \mathfrak{A} x^* = \left[\left(x^* - \mathfrak{A} x^*\right) - \left(x_{m_k}^* - \mathfrak{A} x_{m_k}^*\right)\right] +$$

$$+ \left[\left(x_{m_k}^* - \mathfrak{A} x_{m_k}^*\right) - \left(x_{m_k}^* - \mathcal{P}_{m_k} \mathfrak{A} x_{m_k}^*\right)\right] + \left(x_{m_k}^* - \mathcal{P}_{m_k} \mathfrak{A} x_{m_k}^*\right), \quad k \geq 1.$$

Оскільки на підставі c-неперервності оператора $\mathfrak{A}$ і рівності (15)

$$\left(x^* - \mathfrak{A} x^*\right) - \left(x_{m_k}^* - \mathfrak{A} x_{m_k}^*\right) \xrightarrow{\text{loc.}, C^0(\mathbb{R}, E)} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

$$\left(x^*_{m_k} - \mathfrak{A}x^*_{m_k}\right) - \left(x^*_{m_k} - \mathcal{P}_{m_k}\mathfrak{A}x^*_{m_k}\right) \xrightarrow{\text{loc.}, C^0(\mathbb{R}, E)} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

і

$$x^*_{m_k} - \mathcal{P}_{m_k}\mathfrak{A}x^*_{m_k} = 0, \qquad k \geq 1,$$

то

$$x^* - \mathfrak{A}x^* = 0.$$

Теорему 4 доведено.

4. Обґрунтування теорем 1 і 2. Розглянемо у просторі $C^0(\mathbb{R}, E)$ замкнену кулю $\mathcal{B}_R = \left\{x : \|x\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq R\right\}$ радіуса R з центром у точці 0.

Доведемо твердження, з якого випливатиме теорема 1.

Лема 2. *Нехай для деяких чисел* $H > 0$, $r > 0$ *і елемента* $A \in \mathcal{D}$ *справджується нерівність* (6) *і* $h \in \mathcal{B}_H$.

Тоді рівняння (7) *має хоча б один розв'язок* $x \in C^1(\mathbb{R}, E) \cap \mathcal{B}_r$.

Доведення. Запишемо рівняння (7) у вигляді

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = A(t)x - f(t, x) + h(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

і розглянемо c-неперервний оператор $\mathcal{W}\colon C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{W}x)(t) = A(t)x(t) - f\big(t, x(t)\big) + h(t).$$

Оскільки оператор $\mathcal{L}_A = \dfrac{d}{dt} + A(t)$, що діє з простору $C^1(\mathbb{R}, E)$ у простір $C^0(\mathbb{R}, E)$, має неперервний обернений $\mathcal{L}_A^{-1}$, то рівняння (16) можна записати у вигляді

$$x(t) = \left(\mathcal{L}_A^{-1}\mathcal{W}x\right)(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Оператор $\mathcal{L}_A^{-1}\colon C^0(\mathbb{R}, E) \to C^1(\mathbb{R}, E)$ на підставі теореми 3 є c-неперервним. Тому завдяки c-неперервності оператора $\mathcal{W}\colon C^0(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ оператор $\mathcal{L}_A^{-1}\mathcal{W}\colon C^0(\mathbb{R}, E) \to C^1(\mathbb{R}, E)$ також буде c-неперервним. Тоді на підставі критерію компактності Арцела [19] і визначення c-цілком неперервного оператора оператор $\mathcal{L}_A^{-1}\mathcal{W}\colon C^0(\mathbb{R}, E) \to C^1(\mathbb{R}, E)$ буде c-цілком неперервним. Також

$$\mathcal{L}_A^{-1}\mathcal{W}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r.$$

Справді, якщо $\|y\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq r$ і $\|h\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq H$, то згідно з нерівністю (6)

$$\left\|\mathcal{L}_A^{-1}\mathcal{W}y\right\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq \left\|\mathcal{L}_A^{-1}\right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E)\right)} \|\mathcal{W}y\|_{C^0(\mathbb{R}, E)} \leq$$

$$\leq \left\|\mathcal{L}_A^{-1}\right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R}, E), C^0(\mathbb{R}, E)\right)} \sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_E \leq r} \|A(t)x - f(t, x) + h(t)\|_E \leq$$

$$\leq \left(\left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)} \left(\sup_{t \in \mathbb{R},\, \|x\|_E \leq r} \|A(t)\,x - f(t,\, x)\|_E + \|h\|_{C^0(\mathbb{R},\, E)} \right) \right) \leq$$

$$\leq \left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)} \left(\frac{r}{\left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)}} - H + \|h\|_{C^0(\mathbb{R},\, E)} \right) \leq r\,.$$

Тому на підставі теореми 4 рівняння (17) має хоча б один розв’язок $x^* \in \mathcal{B}_r$. Завдяки рівносильності рівнянь (17) і (16)

$$\frac{dx^*(t)}{dt} + f\left(t,\, x^*(t)\right) \equiv h(t)\,.$$

Звідси та з (3) випливає, що $x^* \in C^1(\mathbb{R},\, E)$.

Лему 2 доведено.

Аналогічним чином доводиться така лема.

Лема 3. *Нехай для деяких чисел* $H > 0$, $r > 0$ *і елемента* $B \in \mathcal{E}$ *справджується нерівність* (8) *і* $h \in \mathcal{B}_H$.

Тоді рівняння (9) *має хоча б один розв’язок* $x \in C^1(\mathbb{R},\, E) \cap \mathcal{B}_r$.

Очевидно, що теореми 1 і 2 є наслідками лем 2 і 3.

Зауважимо, що виконання умов теорем 1 і 2 недостатньо для єдиності розв’язків рівнянь (7) і (9), що підтверджується наступним прикладом.

***Приклад* 2.** Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = h(t)\,, \tag{18}$$

де $h \in C^0(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$ і $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що визначається рівністю

$$f(x) = \begin{cases} kx, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 0, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ k(x-1), & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Тут $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Розглянемо диференціальний оператор $\mathcal{K}\colon C^1(\mathbb{R},\, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{K}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + kx(t)\,. \tag{19}$$

Цей оператор має неперервний обернений $\mathcal{K}^{-1}\colon C^1(\mathbb{R},\, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$, який можна подати у вигляді

$$(\mathcal{K}^{-1}y)(t) = -\frac{k}{|k|} \int\limits_{\{s\,:\,kt < ks\}} e^{k(t-s)}\, y(s)\, ds\,,$$

де $y \in C^0(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$.

Очевидно, що

$$\left\| \mathcal{K}^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, \mathbb{R}),\, C^0(\mathbb{R},\, \mathbb{R})\right)} = \frac{1}{|k|}\,. \tag{20}$$

Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Очевидно, що для кожного числа $r > 0$

$$\max_{|x| \le r} |f(x) - kx| \le |k| \tag{21}$$

і, отже, для числа

$$r = \frac{H + |k|}{|k|} \tag{22}$$

виконується нерівність

$$\max_{|x| \le r} |f(x) - kx| \le \frac{r}{\left\| \mathcal{K}^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right)}} - H, \tag{23}$$

аналогічна (8), що на підставі (20) і (22) збігається з (21). Тому за теоремою 1 рівняння (18) для кожної функції $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Таких розв'язків може бути нескінченно багато. Справді, якщо $h(t) \equiv 0$, то розв'язками цього рівняння є функції $x(t) \equiv c$, $c \in [0, 1]$.

5. Достатні умови виконання нерівності (6). Далі розглянемо один клас нелінійних диференціальних рівнянь, до дослідження яких застосовна теорема 1. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що скінченновимірний банаховий простір E збігається з $\mathbb{R}^n$. У просторі $\mathbb{R}^n$ будемо розглядати норму $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, яку для елемента $x = (x_1, \ldots, x_n)$ визначимо рівністю

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \min_{1 \le k \le n} |x_k|.$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1)\,\omega_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) + h_1(t), \\
\frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_2)\,\omega_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) + h_2(t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_n)\,\omega_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) + h_n(t),
\end{aligned} \tag{24}$$

де $h_1, \ldots, h_n \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ і функції $g_1, \ldots, g_n$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ задовольняють умови, викладені в наступному твердженні, достатні для виконання для цієї системи рівнянь співвідношення (6).

Теорема 5. *Нехай*:

1) *функції* $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\omega_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, *неперервні*;

2) $R(g_i) = \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$;

3) $\lim\limits_{|t| \to +\infty} |g_i(t)| = +\infty$, $i = \overline{1, n}$;

4) $\inf\limits_{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = \overline{1, n}} \omega_i(t, x) > 0$ *і* $\sup\limits_{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = \overline{1, n}} \omega_i(t, x) < +\infty$.

Тоді для кожного числа $H > 0$ *існують такі числа* $r > 0$, $k > 0$ *і* $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ $\left(|k_1| = \ldots = |k_n| = k\right)$, *що для відображень* f: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *і* $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *які визначаються рівностями*

$$f(t,\, x) \;=\; \big(g_1(x_1)\,\omega_1(t,\, x),\, \ldots\,,\, g_n(x_n)\,\omega_n(t,\, x)\big) \tag{25}$$

і

$$Kx \;=\; (k_1x_1,\, \ldots\,,\, k_nx_n)\,, \tag{26}$$

виконується нерівність

$$\sup_{t\in\mathbb{R},\, \|x\|_{\mathbb{R}^n}\le r} \big\| f(t,\, x) - Kx \big\|_{\mathbb{R}^n} \;\le\; kr - H\,. \tag{27}$$

Ця теорема легко доводиться за допомогою наступного твердження.

Лема 4. *Нехай*:

1) *функція* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *неперервна*;

2) $R(g) = \mathbb{R}$;

3) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |g(x)| = +\infty.$

Тоді для кожних числа $H > 0$ *і відрізка* $[\alpha,\, \beta] \subset (0,\, +\infty)$ *існують такі числа* $r_0 > 0$ *і* $k_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *що*:

а) $\max\limits_{z\in[\alpha,\beta],\, |x|\le r_0} |zg(x) - k_0x| \;\le\; |k_0|\, r_0 - H$, *причому ця нерівність виконується, якщо* k_0 *замінити довільним числом* k, *для якого* $|k| > |k_0|$ *і* $kk_0 > 0$;

б) *для кожного числа* $r > r_0$ *існує число* $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *для якого* $|k| \ge |k_0|$, $kk_0 > 0$ *і* $\max\limits_{z\in[\alpha,\beta],\, |x|\le r} |zg(x) - kx| \le |k|\, r - H$.

***Доведення леми* 4.** Нехай b — таке додатне число, що

$$\alpha \min_{|x|\ge b} |g(x)| \;\ge\; H \tag{28}$$

(таке число існує на підставі умов леми), і, крім того,

$$M \;=\; \beta \max_{|x|\le b} |g(x)|\,.$$

Розглянемо таке число $k_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, для якого

$$|k_0|\, b \;\ge\; H \tag{29}$$

і

$$k_0\, xg(x) \;>\; 0, \quad \text{якщо} \quad |x| > b\,. \tag{30}$$

Далі виберемо довільне число $r_0 > b$, для якого

$$M + |k_0|\, b \;\le\; |k_0|\, r_0 - H \tag{31}$$

і

$$\beta |g(x)| \;\le\; |k_0|\, r_0, \quad \text{якщо} \quad b < |x| \le r\,. \tag{32}$$

Тоді якщо $b < |x| \le r_0$ і $z \in [\alpha,\, \beta]$, то

$$|zg(x) - k_0x| \;=\; \big|\, |zg(x)| - |k_0x| \,\big| \;\le\; |k_0|\, r_0 - H$$

(тут враховано співвідношення (28), (29), (30) і (32)). Якщо $|x| \le b$ і $z \in [\alpha,\, \beta]$, то завдяки (31)

$$|zg(x) - k_0 x| = |zg(x)| + |k_0 x| \leq M + |k_0| b \leq |k_0| r_0 - H .$$

Отже,

$$\max_{z \in [\alpha, \beta], |x| \leq r_0} |zg(x) - k_0 x| \leq |k_0| r_0 - H . \tag{33}$$

Очевидно, що співвідношення (29) – (32) справджуються, якщо k_0 замінити числом k, для якого $|k| > |k_0|$ і $kk_0 > 0$. Тому для кожного такого k виконується нерівність

$$\max_{z \in [\alpha, \beta], |x| \leq r_0} |zg(x) - kx| \leq |k| r_0 - H ,$$

аналогічна нерівності (33).

Далі доведемо другу частину твердження леми.

На підставі співвідношень (29) – (32) для кожного числа $r > r_0$ існує таке число $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, що $|k| \geq |k_0|$, $kk_0 > 0$ і виконуються співвідношення

$$|k| b \geq H ,$$

$$kxg(x) > 0, \quad \text{якщо} \quad |x| > b,$$

$$M + |k| b \leq |k| r - H$$

і

$$\beta |g(x)| \leq |k| r, \quad \text{якщо} \quad b < |x| \leq r .$$

За допомогою цих співвідношень аналогічним чином отримуємо

$$\max_{z \in [\alpha, \beta], |x| \leq r} |zg(x) - kx| \leq |k| r - H .$$

Лему 4 доведено.

***Доведення теореми* 5.** Розглянемо довільне число $H > 0$. Завдяки лемі 4 для кожного $i = \overline{1, n}$ існують числа $r_i > 0$ і $k_i^* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для яких

$$\sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, |x_i| \leq r_i} \left| g_i(x_i) \omega_i(t, x) - k_i^* x_i \right| \leq$$

$$\leq \max_{z \in [\alpha, \beta], |x_i| \leq r_i} \left| z g_i(x_i) - k_i^* x_i \right| \leq \left| k_i^* \right| r_i - H ,$$

де $\alpha = \inf\limits_{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = \overline{1, n}} \omega_i(t, x)$ і $\beta = \sup\limits_{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = \overline{1, n}} \omega_i(t, x)$.

Нехай $r = \max\limits_{i = \overline{1, n}} r_i$. На підставі цієї ж леми існують числа $k > 0$ і $k_i \in \mathbb{R} \setminus \left(-\left| k_i^* \right|, \left| k_i^* \right| \right)$, $i = \overline{1, n}$, для яких $|k_1| = \ldots = |k_n| = k$ і

$$\sup_{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, |x_i| \leq r} | g_i(x_i) \omega_i(t, x) - k_i x_i | \leq$$

$$\leq \max_{z \in [\alpha, \beta], |x_i| \leq r} | z g_i(x_i) - k_i x_i | \leq kr - H , \quad i = \overline{1, n} .$$

Із цих нерівностей випливає, що

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \| x \|_{\mathbb{R}^n} \leq r} \| f(t, x) - Kx \|_{\mathbb{R}^n} \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{(t,\,x) \in \mathbb{R}^{n+1},\, |x_i| \leq r} \left| g_i(x_i)\,\omega_i(t,\,x) - k_i x_i \right| \;\leq\; kr - H\,.$$

Отже, нерівність (27) виконується.

Теорему 5 доведено.

Лінійний оператор K, що визначається рівністю (26), є елементом множини $\mathcal{E}$. Тому оператор $\mathcal{L}_K = \dfrac{d}{dt} + K$ має неперервний обернений $\mathcal{L}_K^{-1}$ [7]. Цей оператор можна записати у вигляді

$$\left(\mathcal{L}_K^{-1} h\right)(t) \;=\; \left(\mathcal{L}_K^{-1}(h_1, \ldots, h_n)\right)(t) \;=\; \left(z_1(t), \ldots, z_n(t)\right),$$

де $h = (h_1, \ldots, h_n) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ і

$$z_1(t) \;=\; -\frac{k_1}{|k_1|} \int\limits_{\{s:\, k_1 t < k_1 s\}} e^{k_1(t-s)}\, h_l(s)\, ds\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n(t) \;=\; -\frac{k_n}{|k_n|} \int\limits_{\{s:\, k_n t < k_n s\}} e^{k_n(t-s)}\, h_n(s)\, ds\,.$$

Оскільки

$$\left| \frac{k_l}{|k_l|} \int\limits_{\{s:\, k_l t < k_l s\}} e^{k_l(t-s)}\, h_l(s)\, ds \right| \;\leq$$

$$\leq \int\limits_{\{s:\, k_l t < k_l s\}} e^{k_l(t-s)}\, ds\, \| h_l \|_{C^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R})} \;=\; \frac{\| h_l \|_{C^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R})}}{h}, \qquad l = \overline{1, n}\,,$$

то

$$\left\| \mathcal{L}_K^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R}^n),\, C^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R}^n)\right)} \;=\; \frac{1}{k}\,.$$

Тому нерівність (27) можна подати у вигляді

$$\sup_{t \in \mathbb{R},\, \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq r} \| f(t,\,x) - Kx \|_{\mathbb{R}^n} \;\leq\; \frac{r}{\left\| \mathcal{L}_K^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R}^n),\, C^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R}^n)\right)}} - H\,. \tag{34}$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай виконано умови теореми* 5.

Тоді для кожного числа $H > 0$ *існують такі числа* $r > 0$, $k > 0$ *і* $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ $\left(|k_1| = \ldots = |k_n| = k\right)$, *що для відображень* $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *і* $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *що визначаються рівностями* (25) *і* (26), *виконується нерівність* (34).

З теорем 1 і 6 випливає наступне твердження про існування обмежених розв'язків системи диференціальних рівнянь (24).

Теорема 7. *Нехай виконано умови теореми* 5.

Тоді для довільних $h_1, \ldots, h_n \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *система диференціальних рівнянь* (24) *має хоча б один розв'язок* $x_1, \ldots, x_n \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

6. Необхідні умови виконання нерівності (8) у випадку $E = \mathbb{R}$. Розглянемо скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + f(x) = h(t), \tag{35}$$

де $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і $h \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Умови існування обмежених розв'язків цього рівняння і їх властивості вивчались автором у роботах [21 – 23]. Наведемо для рівняння (35) необхідні умови виконання нерівності (8).

Використаємо неперервний оператор $\mathcal{L}_f : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{L}_f x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + f\big(x(t)\big).$$

Важливим для подальшого є наступне твердження.

Теорема 8 [21]. *Диференціальний оператор* $\mathcal{L}_f : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *має обернений неперервний оператор тоді і тільки тоді, коли* $R(f) = \mathbb{R}$ *і функція* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є строго монотонною.*

З допомогою цієї теореми легко доводиться така теорема.

Теорема 9. *Нехай диференціальний оператор* $\mathcal{L}_f : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *має обернений неперервний оператор.*

Тоді для кожного числа $H > 0$ *існують такі числа* $r > 0$ *і* $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *що для* $f(x)$ *виконується нерівність* (23), *де* $\mathcal{K}$ — *оператор, що визначається рівністю* (19).

Справді, на підставі теореми 8 та умов теореми 9 функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є строго монотонною і $R(f) = \mathbb{R}$. Тому на підставі теореми 6 справджується теорема 9.

7. Випадок лінійних диференціальних рівнянь. Зафіксуємо довільний елемент $Q = Q(t)$ простору $C^0\big(\mathbb{R}, L(E, E)\big)$. Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + Q(t)\,x = h(t),$$

де $h \in C^0(\mathbb{R}, E)$, та диференціальний оператор $\mathcal{L}_Q : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{L}_Q x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + Q(t)\,x(t).$$

Справджується наступне твердження.

Теорема 10. *Для кожного числа* $H > 0$ *існують такі число* $r > 0$ *і елемент* $A \in \mathcal{D}$, *що*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_{E \le r}} \big\| Q(t)\,x - A(t)\,x \big\|_E \le \frac{r}{\big\| \mathcal{L}_A^{-1} \big\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)}} - H \tag{36}$$

тоді і тільки тоді, коли диференціальний оператор $\mathcal{L}_Q$ *має обернений неперервний оператор.*

Очевидно, що нерівність (36) рівносильна нерівності

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \| Q(t) - A(t) \|_{L(E,E)} \leq \frac{1}{\left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},E),\, C^0(\mathbb{R},E)\right)}} - \frac{H}{r}. \tag{37}$$

***Доведення теореми* 10.** *Необхідність.* Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і елемент $A \in \mathcal{D}$, що виконується нерівність (36). Тоді за теоремою 1 для оператора $\mathcal{L}_Q : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ виконується співвідношення

$$R(\mathcal{L}_Q) = C^0(\mathbb{R}, E). \tag{38}$$

Покажемо, що

$$\ker \mathcal{L}_Q = \{0\}, \tag{39}$$

тобто рівняння

$$\frac{dx}{dt} + Q(t)\, x = 0 \tag{40}$$

має лише нульовий обмежений розв'язок. Запишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{dx}{dt} + A(t)\, x = \big(A(t) - Q(t)\big)\, x.$$

Оскільки оператор $\mathcal{L}_A : C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{L}_A x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + A(t)\, x(t),$$

має неперервний обернений, то у просторі $C^0(\mathbb{R}, E)$ рівняння (40) рівносильне рівнянню

$$x(t) = \left(\mathcal{L}_A^{-1} z\right)(t), \tag{41}$$

де $z(t) = \big(A(t) - Q(t)\big)\, x(t)$.

Нехай $x^*(t)$ — обмежений розв'язок рівняння (41), тобто

$$x^*(t) \equiv \left(\mathcal{L}_A^{-1} z^*\right)(t), \tag{42}$$

де $z^*(t) = \big(A(t) - Q(t)\big)\, x^*(t)$. На підставі (37) і (42)

$$\begin{aligned}
\| x^* \|_{C^0(\mathbb{R},E)} &= \left\| \mathcal{L}_A^{-1} z^* \right\|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},E),\, C^0(\mathbb{R},E)\right)} \| z^* \|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \\
&\leq \left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},E),\, C^0(\mathbb{R},E)\right)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \| Q(t) - A(t) \|_{L(E,E)} \| x^* \|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \\
&\leq \left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},E),\, C^0(\mathbb{R},E)\right)} \left(\frac{1}{\left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},E),\, C^0(\mathbb{R},E)\right)}} - \frac{H}{r} \right) \| x^* \|_{C^0(\mathbb{R},E)} \leq \\
&\leq \left(1 - \frac{H}{r} \left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},E),\, C^0(\mathbb{R},E)\right)} \right) \| x^* \|_{C^0(\mathbb{R},E)}.
\end{aligned}$$

Звідси та з того, що

$$0 \;\le\; 1 - \frac{H}{r} \left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)} \;\le\; 1,$$

випливає рівність

$$\left\| x^* \right\|_{C^0(\mathbb{R},\, E)} \;=\; 0,$$

тобто співвідношення (39) виконується. Отже, з рівності (38) і з теореми Банаха про обернений оператор [19] випливає, що оператор $\mathcal{L}_Q$ має неперервний обернений.

Достатність. Нехай оператор $\mathcal{L}_Q\colon\ C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ має неперервний обернений. Тоді Q є елементом множини $\mathcal{D}$. Зафіксуємо довільне число $H > 0$ і виберемо число $r > 0$ так, щоб

$$\frac{r}{\left\| \mathcal{L}_Q^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)}} - H \;>\; 0.$$

Поклавши $A = Q$, отримаємо нерівність (36).

Теорему 10 доведено.

***Наслідок* 1.** *Диференціальний оператор* $\mathcal{L}_Q\colon\ C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ *має обернений неперервний оператор тоді і тільки тоді*, *коли існує елемент* $A \in \mathcal{D}$, *для якого*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| Q(t) - A(t) \right\|_{L(E,\, E)} \;<\; \frac{1}{\left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)}}. \tag{43}$$

***Доведення*.** Нехай для деякого елемента $A \in \mathcal{D}$ виконується нерівність (43). Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Виберемо число $r > 0$ так, щоб

$$\frac{1}{\left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)}} \;-\; \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| Q(t) - A(t) \right\|_{L(E,\, E)} \;>\; \frac{H}{r}.$$

Тоді справджуватимуться нерівність (37) і, отже, нерівність (36). Тому за теоремою 10 оператор $\mathcal{L}_Q\colon\ C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ має обернений неперервний оператор.

Навпаки, якщо оператор $\mathcal{L}_Q\colon\ C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$ має обернений неперервний оператор, то за теоремою 10 для кожного числа $H > 0$ існують число $r > 0$ і елемент $A \in \mathcal{D}$, для яких виконуватимуться нерівність (36) і, отже, нерівність (37). Із (37) випливає (43).

Наслідок 1 доведено.

***Наслідок* 2.** *Диференціальний оператор* $\mathcal{L}\colon\ C^1(\mathbb{R}, E) \to C^0(\mathbb{R}, E)$, *що визначається рівністю*

$$(\mathcal{L}x)(t) \;=\; \frac{dx(t)}{dt} + A\,x(t),$$

де $A \in L(E, E)$, *має обернений неперервний оператор тоді і тільки тоді*, *коли існує елемент* $B \in \mathcal{E}$, *для якого*

$$\|A - B\|_{L(E,\, E)} \;<\; \frac{1}{\left\| \mathcal{L}_B^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)}}.$$

У цьому твердженні $\mathcal{L}_B^{-1}$ — оператор, що визначається рівністю (5).

8. Малі на нескінченності збурення лінійних диференціальних рівнянь. Наведемо ще одне твердження, яке можна отримати за допомогою теореми 1.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} + A(t)\,x + f(t,\, x) \;=\; h(t), \tag{44}$$

де $A = A(t)$ — елемент простору $C^0\big(\mathbb{R},\, L(E,\, E)\big)$, $h \in C^0(\mathbb{R},\, E)$ і $f\colon \mathbb{R} \times E \to E$ — неперервне відображення, що задовольняє співвідношення (3).

Будемо вимагати, щоб лінійний оператор $\mathcal{L}_A\colon C^1(\mathbb{R},\, E) \to C^0(\mathbb{R},\, E)$, що визначається формулою (4), мав неперервний обернений оператор $\mathcal{L}_A^{-1}$.

Позначимо через Ω множину неперервних відображень $f\colon \mathbb{R} \times E \to E$, для кожного з яких виконується співвідношення

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\sup\limits_{t \in \mathbb{R},\, \|x\|_E \le r} \|f(t,\, x)\|_E}{r} \;<\; \frac{1}{\left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)}}.$$

Очевидно, що неперервне відображення $f\colon \mathbb{R} \times E \to E$, для якого

$$\sup_{(t,\, x) \in \mathbb{R} \times E} \|f(t,\, x)\|_E \;<\; +\infty,$$

є елементом множини Ω.

Окремим випадком теореми 1 є наступне твердження.

Теорема 11. *Нехай оператор* $\mathcal{L}_A\colon C^1(\mathbb{R},\, E) \to C^0(\mathbb{R},\, E)$ *має неперервний обернений і* $f \in \Omega$.

Тоді диференціальне рівняння (44) *для кожної функції* $h \in C^0(\mathbb{R},\, E)$ *має хоча б один розв'язок* $x \in C^1(\mathbb{R},\, E)$.

Справді, завдяки умовам теореми для кожного числа $H > 0$ існує таке число $r > 0$, що виконується співвідношення

$$\sup_{t \in \mathbb{R},\, \|x\|_E \le r} \|f(t,\, x)\|_E \;\le\; \frac{r}{\left\| \mathcal{L}_A^{-1} \right\|_{L\left(C^0(\mathbb{R},\, E),\, C^0(\mathbb{R},\, E)\right)}} - H,$$

аналогічне нерівності (6). Тому на підставі теореми 1 справджується теорема 11.

Зауважимо, що більш загальне твердження, ніж теорема 11, міститься в [24].

1. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
3. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.
4. *Трубников Ю. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. – Минск: Наука и техника, 1986. – 200 с.

5. *Перов А. И., Коструб И. Д.* Метод направляющих функций в задаче о нелинейных почти-периодических колебаниях // Вестн. Воронеж. ун-та. Физика, математика. – 2002. – № 1. – С. 163 – 171.
6. *Мухамадиев Э., Нажмиддинов Х., Садовский Б. Н.* Применение принципа Шаудера – Тихонова в задаче об ограниченных решениях дифференциальных уравнений // Функц. анализ и его прил. – 1972. – **6**, вып. 3. – С. 83 – 84.
7. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.
8. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
9. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Там же. – 1981. – **30**, № 3. – С. 443 – 460.
10. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116** (**158**), № 4 (12). – С. 483 – 501.
11. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 34 – 37.
12. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130** (**172**), № 1 (5). – С. 86 – 104.
13. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
14. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201 – 205.
15. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. – 168 с.
16. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис.… д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1993. – 255 с.
17. *Слюсарчук В. Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. – Душанбе, 1987. – С. 102 – 103.
18. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1991. – Вып. 15 (49). – С. 32 – 35.
19. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
20. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.
21. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 4. – С. 523 – 539.
22. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1999. – **54**, вып. 4 (328). – С. 181 – 182.
23. *Slyusarchuk V. E.* Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **4**, № 1 – 3. – P. 333 – 341.
24. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 660 – 662.

Одержано 12.02.09