УДК 531.36;531.011

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОДНУ НЕТИПОВУ СХЕМУ ЗАСТОСУВАННЯ ДРУГОГО МЕТОДУ ЛЯПУНОВА

We apply Lyapunov's second method to the analysis of stability of triangular libration points in the spatial (three-dimensional) circular restricted three-body problem. We prove the instability of triangular libration points.

Второй метод Ляпунова применен к исследованию устойчивости треугольных точек либрации в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел. Доказана неустойчивость треугольных точек либрации.

1. Вступ. Питання про стійкість лагранжевих трикутних кругових орбіт у рамках лінійного наближення розглядали в 19-му столітті M. Gascheau [1], потім E. J. Routh [2]. Правда, згідно з деякими джерелами (див., наприклад, [3]) відома умова стійкості розглядуваних орбіт $27\mu(1-\mu) < 1$ належить Лагранжу. Однак у нелінійній постановці проблема стійкості трикутних кругових орбіт тривалий час залишалася відкритою. Лише у другій половині минулого століття отримано вичерпні результати у випадку плоскої обмеженої кругової задачі. Завдяки застосуванню КАМ-теорії [4 – 6] проблема стійкості трикутних точок лібрації в розглядуваному випадку знайшла своє завершення у працях А. М. Леонтовича [7], A. Deprit і A. Deprit-Bartholomé [8], А. П. Маркєєва [9], А. Г. Сокольського [10]. Що ж стосується стійкості у просторовій круговій задачі, то тут застосування КАМ-теорії виявилось не таким успішним.

Нижче, при розгляді стійкості трикутних кругових рухів у просторовій обмеженій задачі, ми черпаємо ресурс для дослідження стійкості у самій задачі і, враховуючи її специфіку, ефективно реалізовуємо ідеологію другого методу Ляпунова.

При описі руху малої частки в рамках обмеженої кругової задачі зазвичай використовують систему координат, що обертається [11, 12]. У цій системі відліку рівняння руху набирають вигляду [11]

$$x'' - 2y' = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad y'' + 2x' = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad z'' = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1}$$

Тут

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|} + \frac{\mu}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|}, \quad 0 < \mu \le \frac{1}{2}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\rho}_{13}^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2, \quad \boldsymbol{\rho}_{23}^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2, \tag{3}$$

$$(x, y, z)^T = \mathbf{r}, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}, z)^T = \boldsymbol{\rho}_3, \quad \mathbf{r}^2 = \boldsymbol{\rho}_3^2,$$

причому (x, y, z) — координати малої частки відносно системи координат, що обертається, $(\tilde{x}, \tilde{y}, z)$ — її координати відносно інерційної системи координат.

Для системи (1) існує інтеграл Якобі

$$2T - 2U = 2h, \quad 2T = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad h = \text{cont}. \tag{4}$$

Далі зручно записати рівності (3) у вигляді

$$\boldsymbol{\rho}_{13}^2 = -2\mu x + \mu^2 + \mathbf{r}^2, \quad \boldsymbol{\rho}_{23}^2 = 2(1-\mu)x + (1-\mu)^2 + \mathbf{r}^2, \tag{5}$$

звідки отримуємо

$$\mathbf{r}^2 \;=\; \boldsymbol{\rho}_3^2 \;=\; -\mu(1-\mu) + (1-\mu)\,\boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \mu\boldsymbol{\rho}_{23}^2. \tag{6}$$

У зв'язку з (6) зауважимо також, що має місце рівність

$$\boldsymbol{\rho}_3'^2 \;=\; -\mu(1-\mu) + (1-\mu)\,\boldsymbol{\rho}_{13}'^2 + \mu\boldsymbol{\rho}_{23}'^2. \tag{7}$$

Система (1) – (3), як відомо, має рівноважні розв'язки, які називають точками лібрації або точками Лагранжа. В подальшому обмежимося розглядом стійкості лише трикутних точок лібрації L_4 і L_5.

2. Про нестійкість трикутних точок лібрації L_4 і L_5. Трикутним точкам лібрації L_4 і L_5 системи (1) відповідають такі значення змінних x, y і z [11]:

$$x^0 \;=\; -\frac{1}{2} + \mu, \qquad (y^0)^2 \;=\; \frac{3}{4}, \qquad z^0 \;=\; 0. \tag{8}$$

Вводячи для збурень розглядуваного стаціонарного розв'язку системи (1) позначення

$$\xi \;=\; x - x^0, \qquad \eta \;=\; y - y^0, \qquad \zeta \;=\; z - z^0, \tag{9}$$

у малому його околі маємо

$$\begin{gathered}
\xi'' - 2\eta' \;=\; \frac{3}{4}\xi - \frac{3}{2}y^0(1-2\mu)\eta - \frac{3}{4}(1-2\mu)\zeta^2 + O(\xi^2+\eta^2) + O\big(\|\mathbf{u}\|^3\big),\\
\eta'' + 2\xi' \;=\; -\frac{3}{2}y^0(1-2\mu)\xi + \frac{9}{4}\eta + \frac{3}{2}y^0\zeta^2 + O(\xi^2+\eta^2) + O\big(\|\mathbf{u}\|^3\big),\\
\zeta'' \;=\; -\zeta + O(\mathbf{u}^2), \quad \mathbf{u} = (\xi, \eta, \zeta)^T.
\end{gathered} \tag{10}$$

Характеристичне рівняння, яке відповідає лінійному наближенню системи (10), має вигляд

$$(\lambda^2+1)\left[\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)\right] \;=\; 0.$$

Отже, при $27\mu(1-\mu) > 1$ рівняння

$$\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) \;=\; 0$$

має корені з дійсними частинами, що не дорівнюють нулю, і точки лібрації L_4 і L_5 є нестійкими. Тому далі вважатимемо, що $0 < 27\mu(1-\mu) \le 1$, і, отже, лінійному наближенню системи (10) відповідають чисто уявні корені характеристичного рівняння. Таким чином, маємо справу з критичним за Ляпуновим випадком дослідження стійкості.

З урахуванням рівностей (8), (9) на підставі рівностей (5) маємо

$$x_1 \;=\; -\xi + 2y^0\eta + \mathbf{u}^2, \qquad x_2 \;=\; \xi + 2y^0\eta + \mathbf{u}^2, \tag{11}$$

де

$$x_1 \;=\; \rho_{13}^2 - 1, \qquad x_2 \;=\; \rho_{23}^2 - 1.$$

Розв'язуючи рівності (11) відносно ξ і η, отримуємо

$$\xi \;=\; \frac{1}{2}(-x_1 + x_2), \tag{12}$$

$$\eta = \frac{1}{3} y^0 \left\{ (x_1 + x_2) - \frac{2}{3}\left(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2\right) - 2\zeta^2 + O\left[(\mathbf{x}^2 + \zeta^2)^{3/2}\right] \right\}, \quad (13)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

Розглянемо функцію

$$v = 2(T - U)\big|_p + 2\left[(x^0\eta' - y^0\xi') + (\xi\eta' - \eta\xi')\right] + $$
$$+ 2\left[2(x^0\xi + y^0\eta) + \xi^2 + \eta^2\right]. \quad (14)$$

Тут

$$2(T - U)\big|_p =$$
$$= \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \left[\frac{3}{4}\xi^2 - 3y^0(1 - 2\mu)\xi\eta + \frac{9}{4}\eta^2\right] + \zeta^2 + O\left(\|\mathbf{u}\|^3\right).$$

Інтерпретуватимемо далі функції x_1, x_2 і v як допоміжні. Як бачимо, перші дві залежать від $\mathbf{u}$, а функція v залежить як від $\mathbf{u}$, так і від $\mathbf{u}'$.

Розглянемо похідні від функцій x_1, x_2 і v по векторному полю, що визначається системою рівнянь (10). Зокрема, розглядаючи другі похідні від функцій x_1, x_2 і першу похідну від функції v в силу системи (10), з урахуванням співвідношень (12), (13) маємо

$$x_1'' = 2v - (1 - \mu)x_1 - \frac{5}{2}\mu x_2 - \frac{4}{3}\mu y^0(x_1' + x_2') + \frac{8}{3}\mu y^0(\zeta^2)' + $$
$$+ O(\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}'^2) + O\left[(\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}'^2 + \zeta^2 + \zeta'^2)^{3/2}\right],$$

$$x_2'' = 2v - \frac{5}{2}(1 - \mu)x_1 - \mu x_2 + \frac{4}{3}(1 - \mu)y^0(x_1' + x_2') - \frac{8}{3}(1 - \mu)y^0(\zeta^2)' + $$
$$+ O(\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}'^2) + O\left[(\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}'^2 + \zeta^2 + \zeta'^2)^{3/2}\right], \quad (15)$$

$$v' = 3\mu(1 - \mu)y^0(x_1 - x_2) + O(\mathbf{x}^2) + O\left[(\mathbf{x}^2 + \zeta^2)^{3/2}\right].$$

Отже, для похідних від допоміжних функцій x_1, x_2 і v отримуємо три рівності, праві частини яких також містять дані допоміжні функції. Наша мета полягає в тому, щоб ефективно скористатися отриманими рівностями при дослідженні стійкості точок лібрації L_4 і L_5. Для реалізації поставленої мети розглянемо більш докладно інтеграл Якобі і необхідні його перетворення стосовно наших потреб. Однак спершу зробимо таке зауваження.

***Зауваження* 1.** Щоб зробити більш зрозумілим, з яких міркувань вибирається конструкція функції v, відмітимо, що диференціюючи двічі рівності (5), маємо

$$\rho_{13}^2{}'' = 2E_{13} + \frac{2}{\rho_{13}} + \mu\left[\frac{2}{\rho_{13}} + (\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2 - 1) + \frac{1}{\rho_{23}}\left(\frac{1 - \rho_{13}^2}{\rho_{23}^2} - 1\right)\right],$$
$$(16)$$
$$\rho_{23}^2{}'' = 2E_{23} + \frac{2}{\rho_{23}} + (1 - \mu)\left[\frac{2}{\rho_{23}} + (\rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 - 1) + \frac{1}{\rho_{13}}\left(\frac{1 - \rho_{23}^2}{\rho_{13}^2} - 1\right)\right],$$

де

$$E_{13} = 2T + 2(xy' - yx') - 2\mu y' + x^2 + y^2 - 2\mu x + \mu^2 - \frac{2}{\rho_{13}}, \tag{17}$$

$$E_{23} = 2T + 2(xy' - yx') + 2(1-\mu)y' + x^2 + y^2 +$$
$$+ 2(1-\mu)x + (1-\mu)^2 - \frac{2}{\rho_{23}}. \tag{18}$$

Множачи рівність (17) на $1-\mu$, рівність (18) на μ і додаючи їх, приходимо до рівності

$$-\mu(1-\mu) + (1-\mu)E_{13} + \mu E_{23} - 2(xy' - yx' + x^2 + y^2) = 2T - 2U. \tag{19}$$

Розв'язуючи рівність (19) відносно $2T$ і підставляючи отримане значення в рівності (17), (18), відповідно одержуємо

$$E_{13} = (1-\mu)E_{13} + \mu E_{23} + 2\mu\left(\frac{1}{\rho_{23}} - \frac{1}{\rho_{13}}\right) - 2\mu y' - \mu(\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2),$$

$$E_{23} = (1-\mu)E_{13} + \mu E_{23} + 2(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_{13}} - \frac{1}{\rho_{23}}\right) +$$
$$+ 2(1-\mu)y' + (1-\mu)(\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2).$$

Тепер бачимо, що якщо розглянути рівність (19) у збуреному русі, то прийдемо до рівності (14), і, таким чином,

$$v = \left[(1-\mu)E_{13} + \mu E_{23}\right] - \left[(1-\mu)E_{13} + \mu E_{23}\right]\Big|_{np}, \tag{20}$$

де доданок $\left[(1-\mu)E_{13} + \mu E_{23}\right]\Big|_{np}$ відповідає незбуреному рухові, причому

$$\left[(1-\mu)E_{13} + \mu E_{23}\right]\Big|_{np} = -1.$$

2.1. Про інтеграл Якобі в обмеженій задачі трьох тіл. Перш за все зауважимо, що для системи (10) інтеграл Якобі у збуреному русі має вигляд

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \left[\frac{3}{4}\xi^2 - 3y^0(1-2\mu)\xi\eta + \frac{9}{4}\eta^2\right] + \zeta^2 + O\left(\|\mathbf{u}\|^3\right) = 2h^*, \tag{21}$$

де $2h^* = 2h + 3 - \mu(1-\mu)$. У зв'язку з рівністю (21) корисно розглянути множину

$$\Omega = \left\{\mathbf{w} \in s_\varepsilon = \left\{\mathbf{w} \in R^6, \|\mathbf{w}\| < \varepsilon\right\}: \ \psi(\mathbf{w}) = 2h^* \le 0\right\},$$

де $\mathbf{w} = (\xi, \xi', \eta, \eta', \zeta, \zeta')^T$, а $\psi(\mathbf{w})$ означає ліву частину рівності (21). Якраз розгляд руху системи (10) на множині Ω у подальшому виявиться істотним для дослідження стійкості точок лібрації L_4 і L_5.

Тепер виразимо інтеграл Якобі (21) через змінні, які входять в систему (15). Використовуючи для цієї мети рівності (12) і (13), отримуємо

$$\frac{1}{3}(x_1'^2 + x_2'^2 - x_1'x_2') + \zeta'^2 - \frac{3}{4}\left[(1-\mu)x_1^2 + \mu x_2^2\right] +$$
$$+ \zeta^2 + O\left[(\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}'^2 + \zeta^2 + \zeta'^2)^{3/2}\right] = 2h^*. \tag{22}$$

Образом множини Ω у змінних $(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \zeta, \zeta')^T$ є множина

$$\Omega^* = \left\{\mathbf{w}^* \in s_\varepsilon = \left\{\mathbf{w}^* \in R^6, \left\|\mathbf{w}^*\right\| < \varepsilon\right\} : \ \psi^*(\mathbf{w}^*) = 2h^* \le 0\right\}.$$

Тут $\mathbf{w}^* = (\mathbf{x}, \mathbf{x}', \zeta, \zeta')^T$, а $\psi^*(\mathbf{w}^*)$ означає ліву частину рівності (22).

З визначення множини Ω^* випливає, що

$$\zeta'^2 + \zeta^2 \le \frac{3}{4}\left[(1-\mu)x_1^2 + \mu x_2^2\right] + O\left(\|\mathbf{x}\|^3\right) \quad \forall\, \mathbf{w}^* \in \Omega^* \tag{23}$$

і, таким чином, нарізно для кожної з величин ζ'^2 і ζ^2 також справедлива дана оцінка.

На підставі (14) маємо також рівність

$$v - 2\left[(x^0\eta' - y^0\xi') + (\xi\eta' - \eta\xi')\right] - 2\left[2(x^0\xi + y^0\eta) + \xi^2 + \eta^2\right] = 2h^*, \tag{24}$$

в яку замість ξ і η потрібно підставити величини, що визначаються правими частинами рівностей (12), (13).

Таким чином, розглядаючи множини Ω і Ω^*, можемо стверджувати, що як тільки рухові системи відповідає недодатне значення сталої інтеграла Якобі $2h^*$, то автоматично одержуємо підстави для використання оцінки (23).

2.2. Про існування асимптотичних рухів. Отримана вище система рівностей (15) дозволяє при $2h^* \le 0$ прийти до деякої допоміжної системи рівнянь, на підставі якої досить просто вдається довести існування траєкторій, що є асимптотичними до розглядуваних точок лібрації L_4 і L_5.

Обмежуючись розглядом рухів системи (10), які належать множині Ω, на підставі рівностей (15), враховуючи оцінку (23), приходимо до системи рівнянь

$$x_1'' = 2v - (1-\mu)x_1 - \frac{5}{2}\mu x_2 - \frac{4}{3}\mu y^0(x_1' + x_2') + O(\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}'^2),$$

$$x_2'' = 2v - \frac{5}{2}(1-\mu)x_1 - \mu x_2 + \frac{4}{3}(1-\mu)y^0(x_1' + x_2') + O(\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}'^2), \tag{25}$$

$$v' = 3\mu(1-\mu)y^0(x_1 - x_2) + O(\mathbf{x}^2).$$

Рівняння (25) утворюють замкнену систему, що зв'язує змінні $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ і v. Хоча деякі нелінійні доданки у цих рівняннях ми лише оцінюємо, не маючи їх точних виразів, проте структура даних рівнянь не перешкоджає отриманню висновків конструктивного характеру.

Характеристичне рівняння, яке відповідає лінійному наближенню системи (25), має вигляд

$$\left[\lambda - \frac{4}{3}y^0(1-2\mu)\right]\left[\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu)\right] = 0. \tag{26}$$

Як бачимо, рівняння (26) має дійсний корінь. Згідно з теоремою Ляпунова [14] (див. також [15]) звідси можемо зробити висновок, що існує траєкторія системи (25), яка входить у точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$, $v = 0$ при $t \to -\infty$ або $t \to \infty$, в залежності від знаку y^0 або в залежності від того, розглядається точка L_4 чи L_5. Оскільки розглядувані допоміжні функції x_1, x_2 і v залежать від фазових змінних системи (10), причому при $2h^* \le 0$ на підставі співвідношень (12), (13) має місце рівність

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2) + O\left(\|\mathbf{x}\|^3\right),$$

то, враховуючи зворотність вихідної системи

$$\boldsymbol{\rho}_1'' = \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \qquad \boldsymbol{\rho}_2'' = -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3},$$

$$\boldsymbol{\rho}_3'' = -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}$$

в рамках моделі обмеженої задачі трьох тіл, робимо висновок про нестійкість точок лібрації L_4 і L_5. Отже, справедлива така теорема.

Теорема. *Існують траєкторії системи* (10), *які асимптотично притягуються до точок лібрації* L_4 *й* L_5 *при* $t \to -\infty$ *і* $t \to \infty$, *незалежно від значення параметра* μ, $0 < \mu \le 1/2$. *Як наслідок, точки лібрації* L_4 *і* L_5 *нестійкі за Ляпуновим*.

Одержаний висновок узгоджується з раніше відомим [13].

***Зауваження* 2.** В рамках запропонованого підходу допоміжні функції x_1, x_2 і v не є функціями Ляпунова у їх стандартному сенсі. Разом з тим допоміжна система (25), що зв'язує ці функції на множині недодатного рівня інтеграла Якобі, дозволяє зробити висновок про характер поведінки розв'язку в околі розглядуваних положень рівноваги досліджуваної системи. Якщо врахувати, що остання належить до категорії критичних за Ляпуновим систем, то розглянута реалізація ідеології другого методу Ляпунова свідчить про невичерпані можливості даного методу. І тут не так істотно, що з його допомогою підтверджується раніше отриманий результат, скільки важливо те, що другий метод працює в ситуації, де здавалося б важко розраховувати на ефективне його застосування.

***Зауваження* 3.** Хотілося б звернути увагу на такий факт. Змінна ζ входить у перші два рівняння системи (10) нелінійним чином, тобто в лінійному наближенні система (10) розпадається на дві підсистеми. Отже, в цьому випадку можна говорити, що по змінній ζ в системі (10) зв'язок є слабким. Саме властивість слабкого зв'язку по ζ в системі (10) поряд зі структурою інтеграла Якобі в формі (22) ми істотно використовуємо в нашому дослідженні. Зокрема, розглядаючи рух системи (10) на множині недодатного рівня інтеграла Якобі, приходимо до допоміжної системи (25), в якій слабкий зв'язок по змінній ζ заміщується сильнішим зв'язком по змінній v. Якраз завдяки переходу від системи (10) зі слабким зв'язком по ζ до системи (25) з сильнішим зв'язком по v нам вдалося питання про стійкість вихідної негрубої системи звести до розгляду грубої допоміжної системи, радикально спростивши тим самим дослідження стійкості.

3. Висновки. Встановлений факт нестійкості точок лібрації L_4 і L_5, та ще на підставі аналізу лише лінійного наближення деякої допоміжної системи, виглядає дещо несподіваним.

Як можна було переконатися, можливість переходу від системи рівностей (15) до допоміжної системи (25) істотно пов'язана зі структурою інтеграла Якобі. Саме на базі інтеграла Якобі в формі (22) дослідження стійкості вдалося звести до системи меншої розмірності, лінійне наближення якої дозволяє встановити існування асимптотичних розв'язків і, як наслідок, довести нестійкість розглядуваних точок лібрації. Таким чином, дослідження системи, яка відповідає критичному за Ляпуновим випадку, вдалося звести до випадку грубої системи. В деякому сенсі маємо унікальну ситуацію, що, мабуть, відображає специфіку просторової обмеженої задачі трьох тіл.

Зазвичай, коли мова йде про нестійкість систем, що мають вигляд (10), це пов'язують з виконанням деяких резонансних рівностей, які задовольняють власні частоти лінійного наближення системи. В досліджуваному ж випадку нестійкість точок лібрації L_4 і L_5 вдалося довести незалежно від того, раціонально залежні чи ні власні частоти лінійного наближення системи (10). Таким чином, у випадку просторової обмеженої задачі трьох тіл маємо ситуацію, коли формальній стійкості системи (стійкість за Біркгофом [16]) відповідає нестійкість за Ляпуновим (пор. з [17]). Це, мабуть, одна із найбільш яскравих і нетривіальних властивостей досліджуваної системи.

Якщо не виходити за рамки стандартних підходів і обмежити дослідження стійкості точок лібрації системою рівнянь (10), то неодмінно виникає необхідність в такому її аналізі, який би враховував нелінійні доданки в її правій частині. При цьому залишається відкритим питання, до якого порядку включно належить враховувати нелінійності, щоб зробити висновок про стійкість (нестійкість). Запропонований же підхід, що ґрунтується на конструкції деякої допоміжної системи нижчої розмірності, дозволяє зробити відповідний висновок на підставі її лінійного наближення. Тим самим можемо стверджувати, що лінійне наближення допоміжної системи (25) відображає принаймні деякі з тих властивостей розв'язків вихідної системи, які в самій вихідній системі можна виявити, використавши лише нелінійний аналіз. Правда, необхідно мати на увазі, що допоміжна система (25) є наближеною, а тому, враховуючи консервативність вихідної системи, на ефективність запропонованого підходу можна розраховувати лише тоді, коли мова йде про нестійкість.

1. *Gascheau M.* Exsamen d'une classe d'èquations differentielles et application à un cas particulier du probléme des trois corps // Comptes Rend. – 1843. – **16**. – P. 393 – 394.
2. *Routh E. J.* On Laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion // Proc. London Math. Soc. – 1874. – **6**. – P. 86 – 97.
3. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. – М.: УРСС, 2002. – 414 с.
4. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. – 1954. – **98**, № 4. – С. 527 – 530.
5. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, вып. 5. – С. 13 – 40.
6. *Moser J.* On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. II Math.-phys. Kl. – 1962. – **1**. – P. 1 – 20.
7. *Леонтович А. М.* Об устойчивости лагранжевых периодических решений в ограниченной задаче трех тел // Докл. АН СССР. – 1962. – **143**, № 3. – С. 525 – 528.
8. *Deprit A., Deprit-Bartholomé A.* Stability of the triangular Lagrangian points // Astron. J. – 1967. – **72**, № 2. – P. 173 – 179.
9. *Маркеев А. П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
10. *Сокольский А. Г.* Доказательство устойчивости лагранжевых решений при критическом соотношении масс // Письма в Астрон. журн. – 1978. – **4**, № 3. – С. 148 – 152.
11. *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. – М.: Наука, 1982. – 656 с.
12. *Рой А. Е.* Движение по орбитам. – М.: Мир, 1981. – 544 с.
13. *Sosnitskii S. P.* On the stability of triangular Lagrangian points in the restricted three-body problem // Astron. J. – 2008. – **135**, № 1. – P. 187 – 195.
14. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – С. 7 – 263.
15. *Немыцкий В. В., Степанов В В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. – 550 с.
16. *Birkhoff G. D.* Dynamical systems // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. – 1927. – **9**. – 296 p.
17. *Douady R., Le Galvez P.* Example de point fixe elliptique non topologiquement stable en dimension 4 // C. r. Acad.sci. A. – 1983. – **296**, № 21. – P. 895 – 898.

Одержано 05.05.09