УДК 512.55+512.64

Б. В. Забавський (Львів. нац. ун-т),
В. М. Петричкович (Ін-т прикл. проб. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО СТАБІЛЬНИЙ РАНГ КІЛЕЦЬ МАТРИЦЬ

We prove that an adequate ring with nonzero Jacobson radical is of stable range one. A class of matrices over an adequate ring having the stable range one is established.

Доказано, что адекватное кольцо с ненулевым радикалом Джекобсона имеет стабильный ранг один. Указан класс матриц над адекватным кольцом, имеющий стабильный ранг один.

Стабільний ранг є одним з основних інваріантів K-теорії. Це поняття, введене Х. Бассом [1], використовується в теорії кілець, зокрема в задачах діагональної редукції матриць [2, 3]. Важливим питанням є вивчення зв'язків стабільного рангу кільця $M(n, R)$ матриць порядку n над R і стабільного рангу кільця R. У роботах [4, 5] встановлено, що стабільний ранг r кільця матриць $M(n, R)$ дорівнює $1 + \left[(r-1)/n\right]$, де $[m]$ означає цілу частину числа m. Тому якщо стабільний ранг кільця R дорівнює 1 або 2, то стабільний ранг кільця матриць $M(n, R)$ дорівнює відповідно 1 або 2.

Серед кілець скінченного стабільного рангу слід виділити клас кілець елементарних дільників, який було введено І. Капланським [6]. Більшість відомих класів кілець елементарних дільників суттєво залежать від умов обриву зростаючих ланцюгів ідеалів. Перший приклад кільця елементарних дільників без умов обриву зростаючих ланцюгів ідеалів був наведений Веддербарном, а саме таким є кільце аналітичних функцій [7]. Цей приклад дозволив О. Хелмеру ввести новий клас кілець елементарних дільників, який отримав назву адекватних кілець [8]. Відомо [9], що стабільний ранг адекватного кільця не перевищує 2. У багатьох випадках він дорівнює 1.

У цій статті вказано умови, за яких адекватне кільце є стабільного рангу 1. На основі стандартної форми пари матриць щодо узагальненої еквівалентності у кільці $M(n, R)$ матриць порядку n над адекватним кільцем R виділено клас матриць стабільного рангу 1, коли кільце R може бути стабільного рангу більшого за 1.

Нехай R — адекватне кільце, тобто R — область цілісності, в якій кожний скінченнопороджений ідеал є головним і для кожного ненульового елемента $a \in R$ і кожного елемента $b \in R$ існують такі елементи $c, d \in R$, що $a = cd$, до того ж c є взаємно простим із b, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із b [8]. Рядок $\| a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n \|$ елементів кільця R називається унімодулярним (примітивним), якщо $a_1 R + a_2 R + \ldots + a_n R = R$. Стабільним рангом кільця R називається найменше натуральне число m таке, що для довільного унімодулярного рядка $\| a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_m \; a_{m+1} \|$ над кільцем R існують такі елементи $b_1, b_2, \ldots, b_m \in R$, що рядок $\| a_1 + a_{m+1} b_1 \; a_2 + a_{m+1} b_2 \; \ldots \; a_m + a_{m+1} b_m \|$ є унімодулярним. Якщо такого натурального числа не існує, то вважають, що стабільний ранг кільця дорівнює нескінченності [3, 4].

Теорема 1. *Нехай R — адекватне кільце таке, що його радикал Джекобсона є ненульовим. Тоді стабільний ранг кільця R дорівнює* 1.

Доведення. Нехай $a, b, c \in R$, до того ж $c \neq 0$ і $aR + bR + cR = R$. Тоді $c = rs$, де $rR + aR = R$ і $s_1R + aR \neq R$ для довільного s_1 такого, що $sR \subset s_1R \neq R$. Згідно з [9] $(a + br)R + cR = R$. Нехай $J(R)$ — ненульовий радикал Джекобсона адекватного кільця R і $a, b \in R$, до того ж $aR + bR = R$. Тоді, вибираючи довільне $c \in J(R)$, $c \neq 0$, бачимо, що існує такий елемент $r \in R$, що $(a + br)R + cR = R$, тобто $(a + br)u + cv = 1$. Оскільки $c \in J(R)$, то $(a + br)u = 1 - cv$ — оборотний елемент кільця R, тобто $(a + br)R = R$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що у цьому результаті обмеження відсутності дільників нуля у кільці R є несуттєвим.

Кожна матриця $A \in M(n, R)$ над адекватним кільцем R має властивість канонічної діагональної редукції, тобто існують такі оборотні матриці $U, V \in GL(n, R)$, що

$$UAV = D^A = \operatorname{diag}\left(\mu_1^A, \mu_2^A, \ldots, \mu_r^A, 0, \ldots, 0\right),$$

де $\mu_r^A \neq 0$ і $\mu_i^A \,\big|\, \mu_{i+1}^A, i = 1, 2, \ldots, r-1$. Матрицю D^A називають канонічною діагональною формою або нормальною формою Сміта матриці $A \in M(n, R)$.

Пари матриць (A_1, A_2) і (B_1, B_2), $A_i, B_i \in M(n, R), i = 1, 2,$ називаються узагальнено еквівалентними, якщо $A_i = UB_iV_i, i = 1, 2,$ для деяких матриць U, V_1, $V_2 \in GL(n, R)$ [10]. Вивчення такого типу еквівалентностей пар матриць потребують багато задач. Канонічні форми щодо такої еквівалентності побудовані лише для пар матриць над полями [11, 12]. У роботі [13] щодо узагальненої еквівалентності встановлено стандартну форму (D^A, $T^B = TD^B$) пари матриць (A, B), $A, B \in M(n, R)$, або її відповідну стандартну пару, де $T = \left\| t_{ij} \right\|_1^n$ — нижня унітрикутна матриця, тобто $t_{ij} = 0$, якщо $i < j$ і t_{ij}, $i > j$, належать повній системі лишків за модулем $\delta_{ij} = \left(\dfrac{\mu_i^A}{\mu_j^A}, \dfrac{\mu_i^B}{\mu_j^B} \right)$ у випадку, коли R — адекватне кільце.

Набір матриць $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, $A_i \in M(n, R), i = 1, 2, \ldots, k,$ називаємо простим (примітивним), якщо $A_1V_1 + A_2V_2 + \ldots + A_kV_k = I$ для деяких матриць $V_i \in M(n, R)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, I — одинична матриця.

Через $M'(2, R)$ позначатимемо клас матриць $\left\| a_{ij} \right\|_1^2$ другого порядку таких, що $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = 1$.

Лема 1. *Нехай пара матриць (A, B), $A, B \in M'(2, R)$, є простою. Тоді пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до стандартної пари $(D^A$, $T^B)$ одного із таких виглядів*:

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & \psi \end{Vmatrix} \right), \quad \textit{якщо} \quad \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2, \tag{1}$$

де

$$t = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } (\varphi, \psi) = 1, \\ 1, & \textit{якщо } (\varphi, \psi) \neq 1; \end{cases}$$

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & \psi \end{Vmatrix} \right), \quad \textit{якщо} \quad \operatorname{rang} A = 1, \ \operatorname{rang} B = 2, \tag{2}$$

де

$$t = \begin{cases} 0, & \textit{якщо } \psi \in U(R), \\ 1, & \textit{якщо } \psi \notin U(R), \end{cases}$$

$U(R)$ — *група одиниць кільця* R;

$$\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \right), \quad \textit{якщо} \quad \operatorname{rang} A = 1, \quad \operatorname{rang} B = 1. \tag{3}$$

Доведення. Нехай (A, B) — проста пара і $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 2$. Тоді на основі теореми 1 із роботи [13] пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до стандартної пари (D^A, T^B) вигляду $\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & \psi \end{Vmatrix} \right)$. Спільні ліві дільники матриць D^A і T^B, з точністю до правої асоційовності, мають вигляд $D_i = \operatorname{diag}(1, d_i)$, де $d_i \mid \varphi$ і $d_i \mid (t, \psi)$, тому що в цьому випадку згідно із результатами роботи [14] дільники із заданою канонічною діагональною формою матриць D^A і T^B з точністю до правої асоційовності визначаються однозначно. Із того, що пара матриць (A, B) є простою, випливає, що і її відповідна стандартна пара (D^A, T^B) є простою. Це означає, що ліві спільні дільники матриць D^A і T^B є тривіальними. Тому $d_i = 1$ і $(\varphi, (t, \psi)) = 1$. Тоді на основі теореми 3 із роботи [13] стандартна форма пари матриць (A, B) має вигляд (1).

У випадках, коли пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пар матриць виглядів (2) або (3), при доведенні леми міркуємо аналогічно.

Лему доведено.

Зауважимо, що у випадку, коли $\operatorname{rang} A = 0$, тобто $A = 0$ — нульова матриця і пара матриць (A, B) є простою, очевидно, що B — оборотна матриця і стандартною парою для (A, B) є пара $(0, I)$.

Теорема 2. *Нехай пара матриць* (A, B), A, $B \in M'(2, R)$, *є простою, тобто*

$$AU + BV = I, \quad U, V \in M(2, R). \tag{4}$$

Тоді існує матриця $P \in M(2, R)$ *така, що*

$$AP + B = Q, \tag{5}$$

де Q — *оборотна матриця із* $GL(2, R)$.

Доведення. Зрозуміло, що кожна пара матриць (A_1, B_1), яка узагальнено еквівалентна до простої пари (A, B), є простою, тобто для неї справджується співвідношення вигляду (4). Тому достатньо показати, що із співвідношення (4) випливає (5) для пари матриць (D^A, T^B) у стандартній формі.

Нехай пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до стандартної пари вигляду (1). Тоді із співвідношення (5) матимемо $D^A P + T^B = Q$ або

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ t & \psi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

де

$$q_1q_4 - q_2q_3 = 1. \tag{7}$$

Із співвідношення (6) одержуємо рівності

$$q_1 = p_1 + 1, \quad q_2 = p_2, \quad q_3 = \varphi p_3 + t, \quad q_4 = \varphi p_4 + \psi. \tag{8}$$

Тоді із рівностей (7) і (8) отримуємо

$$(p_1 + 1)(\varphi p_4 + \psi) - p_2(\varphi p_3 + t) = 1$$

або

$$\varphi(p_1p_4 + p_4 - p_2p_3) + \psi(p_1 + 1) - tp_2 = 1. \tag{9}$$

Нехай у стандартній парі матриць (1) $t = 0$. Тоді $(\varphi, \psi) = 1$ і діофантове рівняння

$$\varphi(p_1p_4 + p_4 - p_2p_3) + \psi(p_1 + 1) = 1$$

відносно p_i, $i = 1, \ldots, 4$, має розв'язки над R.

Нехай тепер $t = 1$. Тоді $(\varphi, \psi) \neq 1$. Покладемо у (9) $p_2 = -1$. Тоді із цього співвідношення одержимо рівняння

$$\varphi(p_1p_4 + p_4 + p_3) + \psi(p_1 + 1) = 0,$$

яке має розв'язки p_i, $i = 1, \ldots, 4$, над R.

Отже, існує матриця P така, що $D^AP + T^B = Q$ — оборотна матриця.

Доведення теореми у випадках, коли пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пар матриць виглядів (2) або (3), проводиться аналогічно.

Теорему доведено.

1. *Bass H.* *K*-theory and stable algebra // Publ. Math. – 1964. – **22**. – P. 5 – 60.
2. *Zabavsky B. V.* Diagonalizability theorem for matrices over ring with finite stable range // Algebra and Discrete Math. – 2005. – № 1. – P. 134 – 148.
3. *Zabavsky B. V.* Diagonalization of matrices over ring with finite stable range // Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Math. – 2003. – **61**. – P. 206 – 211.
4. *Васерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 2. – С. 17 – 27.
5. *Vaserstein L. N.* Bass's first stable range condition // J. Pure and Appl. Algebra. – 1984. – **34**. – P. 319 – 330.
6. *Kaplansky I.* Elementary divisor ring and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464 – 491.
7. *Wedderburn J. H. M.* On matrices whose coefficients are functions of single variable // Ibid. – 1915. – **169**, № 2. – P. 328 – 332.
8. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 225 – 236.
9. *Забавський Б. В., Комарницький М. Я.* Теорема коенового типу для адекватності та кільця елементарних дільників // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2008. – **49**, № 4. – С. 94 – 98.
10. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, № 2. – P. 179 – 188.
11. *Dlab V., Ringel C. M.* Canonical forms of pairs of complex matrices // Linear Algebra and Appl. – 1991. – **147**. – P. 387 – 410.
12. *Gaiduk T. N., Sergeichuk V. V.* Generic canonical form of pairs of matrices with zeros // Ibid. – 2004. – **380**. – P. 241 – 251.
13. *Petrychkovych V.* Standard form of pairs of matrices with respect to generalized equivalence // Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mech.-Math. – 2003. – **61**. – P. 148 – 155.
14. *Петричкович В. М.* Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 96 – 100.

Одержано 18.03.09