УДК 513.88, 512.552.4

М. В. Заводовский, Ю. С. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РОСТ ОБОБЩЕННЫХ АЛГЕБР ТЕМПЕРЛИ – ЛИБА, СВЯЗАННЫХ С ПРОСТЫМИ ГРАФАМИ

We prove that the generalized Temperley – Lieb algebras associated with simple graphs Γ have the linear growth if and only if the graph Γ coincides with one of the extended Dynkin graphs $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ or $\widetilde{E}_7$; the algebra $TL_{\Gamma,\tau}$ has exponent growth if and only if the graph Γ coincides with none of the graphs A_n, D_n, E_n, $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ or $\widetilde{E}_7$.

Доведено, що узагальнені алгебри Темперлі – Ліба, пов'язані з простими графами Γ, мають лінійний ріст тоді і тільки тоді, коли граф Γ збігається з одним із розширених графів Динкіна $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ або $\widetilde{E}_7$; алгебра $TL_{\Gamma,\tau}$ має експоненціальний ріст тоді і тільки тоді, коли граф Γ не збігається з жодним із графів A_n, D_n, E_n, $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ або $\widetilde{E}_7$.

Введение. Алгебры Темперли – Либа и их $*$-представления изучались в ряде работ (см., например, [1, 2]) в связи с моделями статистической физики. В [3] были введены обобщенные алгебры Темперли – Либа и среди них выделены конечномерные алгебры, связанные с графами A_n, D_n, E_n и др.

В настоящей статье изучается рост алгебр

$$TL_{\Gamma,\tau} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n \mid p_k^2 = p_k, \quad p_i p_j p_i = \tau p_i,$$
$$(i,j) \in E\Gamma, \quad p_i p_j = p_j p_i, \quad (i,j) \notin E\Gamma \Big\rangle,$$

связанных с простыми графами Γ ($\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ — связный неориентированный граф без кратных ребер и петель). Эти алгебры являются обобщенными алгебрами Темперли – Либа, связанными с простыми графами.

Основной результат работы: алгебра $TL_{\Gamma,\tau}$ имеет линейный рост тогда и только тогда, когда граф Γ совпадает с одним из расширенных графов Дынкина $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ или $\widetilde{E}_7$; алгебра $TL_{\Gamma,\tau}$ имеет экспоненциальный рост тогда и только тогда, когда граф Γ не совпадает ни с одним из графов A_n, D_n, E_n, $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ или $\widetilde{E}_7$.

1. Класс обобщенных алгебр Темперли – Либа, связанный с простыми графами. Приведем определение и простые свойства обобщенных алгебр Темперли – Либа, связанных с простыми графами.

1. Пусть $\Gamma = (V\Gamma, E\Gamma)$ — связный неориентированный граф без кратных ребер и петель $\big(|V\Gamma| = n\big)$, параметр $\tau \in \mathbb{C}$. Рассмотрим обобщенную алгебру Темперли – Либа: алгебру, порожденную образующими $p_1, \ldots, p_n$ и соотношениями

$$TL_{\Gamma,\tau} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n \mid p_k^2 = p_k, \quad p_i p_j p_i = \tau p_i,$$
$$(i,j) \in E\Gamma, \quad p_i p_j = p_j p_i, \quad (i,j) \notin E\Gamma \Big\rangle.$$

Рассмотрим некоторые свойства роста (понятие роста алгебры см., например, в [4]) обобщенных алгебр Темперли – Либа.

Утверждение 1. *Размерность или рост обобщенной алгебры Темперли – Либа $TL_{\Gamma,\tau}$ не зависит от τ.*

Доказательство. Напомним, что базисом Гребнера идеала I называется множество элементов этого идеала $G \subset I$ такое, что для любого $g \in I$ старшее слово g содержит в качестве подслова одно из старших слов элементов множества G. Базис Гребнера G называется минимальным, если никакое его собственное подмножество не является базисом Гребнера. Алгоритм построения минимального базиса Гребнера в идеале, порожденном конечным множеством элементов свободной алгебры, состоит из трех шагов: нормировки, редукции и композиции (см., например, [4]).

Пусть Γ_n — связный неориентированный граф, $|V\Gamma_n| = n$. Достаточно показать, что старшие слова базиса Гребнера алгебры $TL_{\Gamma_n,\tau}$ не зависят от τ. Доказательство проведем по индукции. Базис алгебры $TL_{A_1,\tau}$ не зависит от τ. Предположим, что для алгебры $TL_{\Gamma_n,\tau}$ утверждение верно, т. е. старшие слова базиса Гребнера алгебры $TL_{\Gamma_n,\tau}$ не зависят от τ.

Пусть граф Γ_{n+1} получается из Γ_n добавлением новой вершины $n+1$, которая соединена с вершинами n_i при $i = 1,\ldots,m$. Тогда алгебра $TL_{\Gamma_{n+1},\tau}$ задается соотношениями алгебры $TL_{\Gamma_n,\tau}$ и соотношениями $p_{n_i}p_{n+1}p_{n_i} = \tau p_{n_i}$, $p_{n+1}p_{n_i}p_{n+1} = \tau p_{n+1}$ и $p_{n_j}p_{n+1} = p_{n+1}p_{n_j}$ для всех $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ и $i \neq j$. Слова $p_{n_i}p_{n+1}p_{n_i} - \tau p_{n_i}$, $p_{n+1}p_{n_i}p_{n+1} - \tau p_{n+1}$ и $p_{n_j}p_{n+1} - p_{n+1}p_{n_j}$ для всех $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ и $i \neq j$ содержатся в базисе Гребнера алгебры $TL_{\Gamma_{n+1},\tau}$. Старшие слова в этих базисных элементах не зависят от τ. Применив к этим словам алгоритм вычисления базиса Гребнера, получим, что старшие слова базиса Гребнера алгебры $TL_{\Gamma_{n+1}},\tau$, содержащие p_{n+1}, не будут зависеть от τ.

2. Связный граф $\Gamma_1 = (V\Gamma_1, E\Gamma_1)$ такой, что $V\Gamma_1 \subset V\Gamma$ и вершины x_i, $x_j \in V\Gamma_1$ соединены ребром $(x_i, x_j) \in E\Gamma$ тогда и только тогда, когда они соединены ребром $(x_i, x_j) \in E\Gamma$ в Γ, называется индуцированным подграфом графа Γ. Зафиксируем вершину x графа Γ ($x \in V\Gamma$). Индуцированный граф $\Gamma_1 = (V\Gamma_1, E\Gamma_1)$, множество вершин которого $V\Gamma_1 = V\Gamma \setminus \{x\}$, а множество ребер $E\Gamma_1$ получается из $E\Gamma$ удалением ребер, инцидентных вершине x, будем обозначать $\Gamma - x$ и называть графом, полученным из графа Γ удалением вершины.

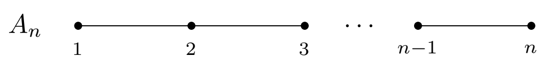
Алгебра $TL_{\Gamma_1,\tau}$, ассоциированная с индуцированным подграфом Γ_1 графа Γ является конечнопорожденной подалгеброй алгебры $TL_{\Gamma,\tau}$. Существует связь между ростом конечнопорожденной ассоциативной алгебры и ростом ее фактор-алгебры или ростом конечнопорожденной подалгебры: рост фактор-алгебры не превышает роста алгебры и рост конечнопорожденной подалгебры не превышает роста алгебры (см., например, [4]). Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть* Γ — *простой граф,* Γ_1 — *индуцированный подграф. Тогда рост алгебры* $TL_{\Gamma_1,\tau}$ *не превышает роста алгебры* $TL_{\Gamma,\tau}$. *В частности, рост алгебры* $TL_{\Gamma-x,\tau}$ *не превышает роста* $TL_{\Gamma,\tau}$.

2. Рост обобщенных алгебр Темперли – Либа, связанных с простыми графами (примеры). Приведем оценки роста алгебр $TL_{\Gamma,\tau}$ для определенных простых графов, которые будут использоваться при доказательстве основной теоремы.

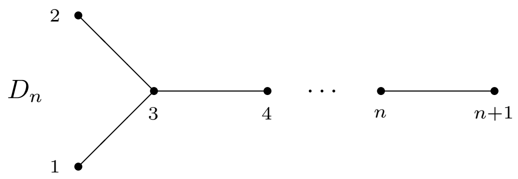
Алгебры, рассматриваемые в примерах 1 – 3, конечномерны.

1. Рассмотрим алгебру $TL_{A_n,\tau}$, ассоциированную с графом Дынкина A_n, $n \geq 2$:



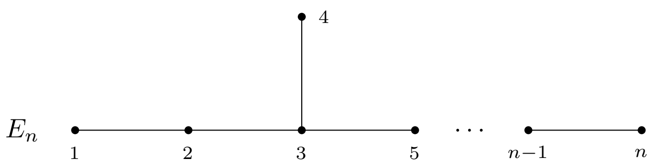
Алгебра $TL_{A_n,\tau}$ конечномерна, так как при $\tau = \dfrac{1}{4}$ является фактор-алгеброй конечномерной групповой алгебры группы Кокстера, связанной с графом A_n [5], $\dim TL_{A_n,\tau} = \dfrac{1}{n+2}\dbinom{2n+2}{n+1}$ (см., например, [2]).

2. Рассмотрим граф Дынкина D_n, $n \geq 4$:



Алгебра $TL_{D_n,\tau}$ конечномерна, так как при $\tau = \dfrac{1}{4}$ является фактор-алгеброй конечномерной групповой алгебры группы Кокстера, связанной с графом D_n [5], в частности $\dim TL_{D_4,\tau} = 48$, $\dim TL_{D_5,\tau} = 167$, $\dim TL_{D_6,\tau} = 593$, $\dim TL_{D_7,\tau} = 2144$, $\dim TL_{D_8,\tau} = 7864$, $\dim TL_{D_9,\tau} = 21171$ [6].

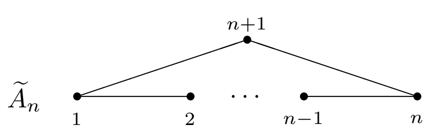
3. Рассмотрим граф E_n, $n \geq 6$:



Алгебра $TL_{E_n,\tau}$ при $n = 6, 7, 8$ конечномерна, так как при $\tau = \dfrac{1}{4}$ является фактор-алгеброй конечномерной групповой алгебры группы Кокстера, связанной с графом E_n [5]. Алгебры $TL_{E_n,\tau}$ при $n \geq 9$ (граф E_9 совпадает с расширенным графом Дынкина $\widetilde{E}_8$) также конечномерны [3]. В частности, $\dim TL_{E_6,\tau} = 662$, $\dim TL_{E_7,\tau} = 2670$, $\dim TL_{E_8,\tau} = 10846$, $\dim TL_{E_9,\tau} = 44199$, $\dim TL_{E_{10},\tau} = 180438$, $\dim TL_{E_{11},\tau} = 737762$, $\dim TL_{E_{12},\tau} = 3021000$, $\dim TL_{E_{13},\tau} = 12387990$, $\dim TL_{E_{14},\tau} = 50864885$ [6].

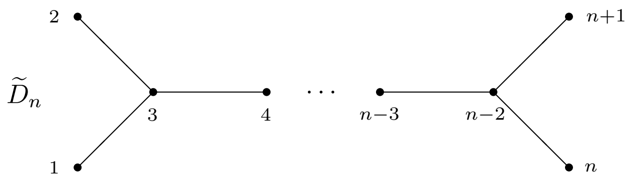
Алгебры рассматриваемые в примерах 4 – 6, имеют полиномиальный рост.

4. Рассмотрим расширенный граф Дынкина $\widetilde{A}_n$, $n \geq 3$:



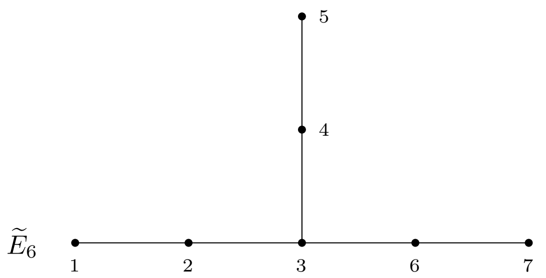
Групповая алгебра группы Кокстера, связанная с графом $\widetilde{A}_n$, бесконечномерна и имеет полиномиальный рост [5]. Тогда алгебра $TL_{\widetilde{A}_n,\tau}$ имеет не более чем полиномиальный рост, так как алгебра $TL_{\widetilde{A}_n,1/4}$ является фактор-алгеброй групповой алгебры группы Кокстера, связанной с графом $\widetilde{A}_n$. Поскольку граф роста (понятие графа роста и его связь с ростом соответствующей алгебры см., например, в [4]) алгебры $TL_{\widetilde{A}_n,\tau}$ не содержит двух циклов, соединенных путем, то она бесконечномерна и имеет линейный рост.

5. Рассмотрим алгебру $TL_{\widetilde{D}_n,\tau}$, ассоциированную с графом $\widetilde{D}_n$, $n \geq 4$:

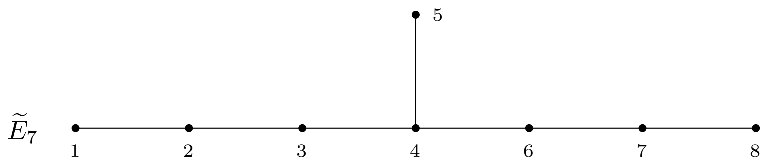


Групповая алгебра группы Кокстера, связанная с графом $\widetilde{D}_n$, бесконечномерна и имеет полиномиальный рост [5]. Тогда алгебра $TL_{\widetilde{D}_n,\tau}$ имеет не более чем полиномиальный рост, так как алгебра $TL_{\widetilde{D}_n,1/4}$ является фактор-алгеброй групповой алгебры группы Кокстера, связанной с графом $\widetilde{D}_n$. Поскольку граф роста алгебры $TL_{\widetilde{D}_n,\tau}$ не содержит двух циклов, соединенных путем, она бесконечномерна и имеет линейный рост.

6. Рассмотрим графы Дынкина $\widetilde{E}_6$ и $\widetilde{E}_7$:



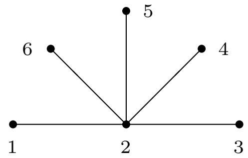
и



Групповые алгебры групп Кокстера, связанных с графами $\widetilde{E}_6$ и $\widetilde{E}_7$, бесконечномерны и имеют полиномиальный рост [5]. Тогда алгебры $TL_{\widetilde{E}_6,\tau}$ и $TL_{\widetilde{E}_7,\tau}$ имеют не более чем полиномиальный рост, так как алгебры $TL_{\widetilde{E}_6,1/4}$ и $TL_{\widetilde{E}_7,1/4}$ являются фактор-алгебрами групповых алгебр групп Кокстера, связанных с графами $\widetilde{E}_6$ и $\widetilde{E}_7$ соответственно. Поскольку графы роста алгебр $TL_{\widetilde{E}_6,\tau}$ и $TL_{\widetilde{E}_7,\tau}$ не содержат двух циклов, соединенных путем, они бесконечномерны и имеют линейный рост.

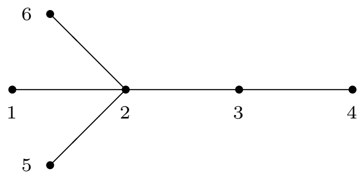
Если конечнопорожденная ассоциативная алгебра содержит свободную подалгебру, порожденную двумя образующими, то она имеет экспоненциальный рост. Отметим, что из экспоненциальности роста не следует наличие свободной подалгебры (см., например, [4]). Алгебры, рассматриваемые в примерах 7 – 12, имеют экспоненциальный рост.

7. Рассмотрим алгебру $TL_{K_{1,5},\tau}$, ассоциированную с графом $K_{1,5}$:

$K_{1,5}$


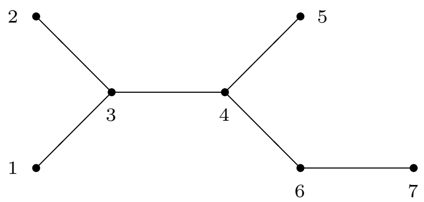
Алгебра $TL_{K_{1,5},\tau}$ имеет экспоненциальный рост, так как ее подалгебра, порожденная двумя образующими $q_1 = p_2p_3p_4p_2p_1p_5$ и $q_2 = p_2p_3p_4p_2p_1p_6$, свободна (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{K_{1,5},\tau}$).

8. Рассмотрим граф



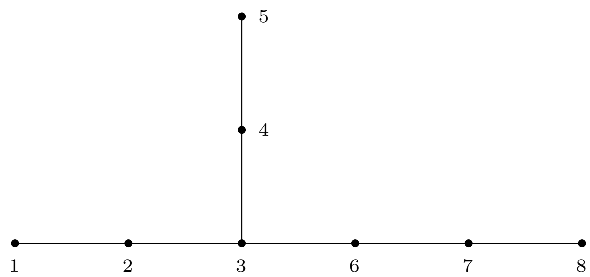
Соответствующая алгебра $TL_{\Gamma,\tau}$ имеет экспоненциальный рост, так как ее подалгебра, порожденная двумя образующими $q_1 = p_2p_1p_3p_2p_4p_3p_5p_2p_1p_6p_2p_3p_4 \times \times p_5p_2p_1p_3p_2p_5p_6$ и $q_2 = p_2p_1p_3p_2p_4p_3p_6p_2p_1p_5p_2p_3p_4p_6p_2p_1p_3p_2p_5p_6$, свободна (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{\Gamma,\tau}$).

9. Рассмотрим граф



Соответствующая алгебра $TL_{\Gamma,\tau}$ имеет экспоненциальный рост, так как ее подалгебра, порожденная двумя образующими $q_1 = p_7p_6p_4p_3p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_4p_3p_1p_2 \times \times p_3p_4p_5$ и $q_2 = p_6p_4p_3p_1p_2p_3p_4p_5$, свободна (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{\Gamma,\tau}$).

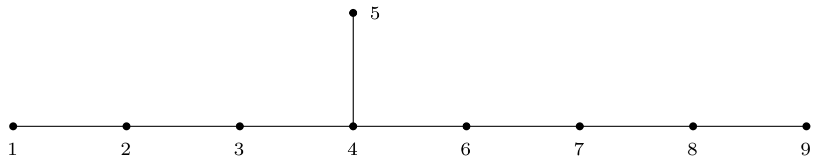
10. Рассмотрим граф



Соответствующая алгебра $TL_{\Gamma,\tau}$ имеет экспоненциальный рост, так как ее подалгебра, порожденная двумя образующими $q_1 = p_2p_4p_3p_6p_7p_5p_4p_3p_2p_1p_6p_3$ и

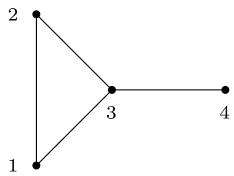
$q_2 = p_2p_4p_3p_6p_7p_8p_5p_4p_3p_2p_6p_3p_7p_6p_4p_3p_2p_1p_5p_4p_3p_2p_6p_3p_7p_6p_8p_7p_4p_3p_2p_1p_6p_3$, свободна (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{\Gamma,\tau}$).

11. Рассмотрим граф



Соответствующая алгебра $TL_{\Gamma,\tau}$ имеет экспоненциальный рост, так как ее подалгебра, порожденная двумя образующими $q_1 = p_4p_5p_6p_8p_4p_1p_2p_5p_7p_8p_4p_8p_9p_4 \times \times p_2p_3$ и $q_2 = r_1r_2$, где $r_1 = p_4p_5p_6p_7p_8p_9p_5p_4p_3p_5p_4p_6p_7p_8p_4p_1p_3p_7p_8p_9p_4p_2$ и $r_2 = p_5p_7p_9p_1p_5p_4p_2p_8p_4p_6p_7p_4p_5p_7p_9p_4p_1p_3p_5p_7p_8p_4p_2p_3p_4p_5p_6p_8p_4p_1p_2p_3$ свободна (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{\Gamma,\tau}$).

12. Рассмотрим граф $\widetilde{A}_3^1$



Соответствующая алгебра $TL_{\widetilde{A}_3^1,\tau}$ имеет экспоненциальный рост, так как ее подалгебра, порожденная двумя образующими $q_1 = p_2p_1p_3$ и $q_2 = p_2p_1p_3p_2p_1p_4p_3$, свободна (во всевозможных комбинациях элементов q_1 и q_2 не содержится ни одного старшего подслова элементов базиса Гребнера алгебры $TL_{\Gamma,\tau}$).

3. Основная теорема.

Теорема. *Пусть* Γ — *связный простой граф. Тогда*:

1) *алгебра* $TL_{\Gamma,\tau}$ *конечномерна тогда и только тогда, когда граф* Γ *совпадает с одним из графов* A_n, D_n *или* E_n;

2) *алгебра* $TL_{\Gamma,\tau}$ *имеет линейный рост тогда и только тогда, когда граф* Γ *совпадает с одним из графов* $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ *или* $\widetilde{E}_7$;

3) *алгебра* $TL_{\Gamma,\tau}$ *имеет экспоненциальный рост тогда и только тогда, когда граф* Γ *не совпадает ни с одним из графов* A_n, D_n, E_n, $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ *или* $\widetilde{E}_7$.

Доказательство. Если Γ — один из графов A_n, D_n или E_n, то алгебра TL_Γ конечномерна (примеры 1 – 3). Если же граф Γ не совпадает с A_n, D_n или E_n, то один из графов $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ или $\widetilde{E}_7$ (см. примеры 4 – 6) будет индуцированным подграфом Γ. Следовательно, алгебра $TL_{\Gamma,\tau}$ бесконечномерна.

Если граф Γ — один из графов $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ или $\widetilde{E}_7$, то алгебра TL_Γ имеет линейный рост (примеры 4 – 6). Если же алгебра TL_Γ бесконечномерна и имеет линейный рост, то граф Γ не совпадает ни с одним из графов A_n, D_n или E_n и не содержит ни один из графов из примеров 7 – 12 как индуцированный подграф, так как соответствующая алгебра имеет экспоненциальный рост. Тогда Γ совпадает с одним из графов $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ или $\widetilde{E}_7$.

Если граф Γ не совпадает ни с одним из графов A_n, D_n, E_n, $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ или $\widetilde{E}_7$, то он имеет экспоненциальный рост, так как он с необходимостью содержит как индуцированный подграф один из графов в примерах $7-12$. Если же алгебра TL_Γ бесконечномерна и имеет экспоненциальный рост, то граф Γ не может совпадать ни с одним из графов A_n, D_n или E_n и ни с одним из графов $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{D}_n$, $\widetilde{E}_6$ или $\widetilde{E}_7$.

Теорема доказана.

1. *Temperley H. N. V., Lieb E. H.* Relations between “percolations” and “colouring” problems and other graph theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem // J. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1971. – **322**. – P. 251 – 280.
2. *Jones V. F.* Index for subfactor // Invent. Math. – 1983. – **72**. – P. 1 – 15.
3. *Graham J. J.* Modular representations of Hecke algebras and related algebras. – Ph. D. thesis. – Univ. Sydney, 1995.
4. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Современные проблемы математики. Фундам. направления. – 1990. – **57**. – С. 5 – 177.
5. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Часть 2. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. – М.: Мир, 1972.
6. *Fan C. K.* Structure of a Hecke algebra quotient // J. AMS. – 1997. – **10**, № 1. – P. 139 – 167.
7. *Green R. M.* Cellular algebras arising from Hecke algebras of type H_n // Math. Z. – 1998. – **229**. – S. 365 – 383.
8. *Green R. M.* Generalized Temperley – Lieb algebras and decorated tangles // J. Knot Theory and Ramifications. – 1998. – **7**. – P. 155 – 171.

Получено 16.06.09