УДК 512.542

Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба (Гомел. ун-т, Беларусь)

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С S-КВАЗИНОРМАЛЬНЫМИ ТРЕТЬИМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

We study finite groups whose 3-maximal subgroups are permutable with the all Sylow subgroups.

Вивчаються скінченні групи, в яких 3-максимальні підгрупи є переставними зі всіма силовськими підгрупами.

1. Введение. Все группы в данной статье являются конечными.

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-*максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-, 4-максимальные подгруппы и т. д.

Легко заметить, что в несверхразрешимых группах одна и та же подгруппа может быть n- и m-максимальной одновременно для $n \neq m$. В связи с этим будем называть подгруппу H группы G *строго n-максимальной подгруппой* в G, если H является n-максимальной подгруппой в G, но не является n-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы G. Например, в группе $SL(2,3)$ единственная подгруппа порядка 2 является 2-максимальной подгруппой, но не является строго 2-максимальной подгруппой.

Связь между n-максимальными подгруппами (где $n > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранний результат в данном направлении получен Хуппертом в работе [1], который доказал, что *группа является сверхразрешимой, если все ее* 2-*максимальные подгруппы нормальны*. В этой же работе доказано, что в случае, *когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, коммутант G' группы G нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы G делится не более чем на два* (*необязательно различных*) *простых числа*.

Упомянутая выше работа стимулировала многие другие исследования в данном направлении. В частности, развивая результаты Хупперта, Янко [2] получил описание групп, в которых 4-максимальные подгруппы нормальны. Он доказал, что *если каждая* 4-*максимальная подгруппа разрешимой группы G является нормальной в G и порядок G делится по крайней мере на* 4 *различных простых числа, то G — сверхразрешимая группа*. Годом позже в работе [3] Янко изучил группы, у которых, кроме единичной, других 5-максимальных подгрупп не существует.

Среди ранних работ в данном направлении отметим также работу Аграваля [4], в которой доказано что *группа является сверхразрешимой, если каждая ее* 2-*максимальная подгруппа S-квазинормальна* (подгруппа H группы G называется *S-квазинормальной* или *S-перестановочной* в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G). Еще одним естественным развитием упомянутых выше результатов Хупперта и Янко является работа А. Манна [5], в которой автор анализировал строение групп, в которых каждая n-максимальная подгруппа субнормальна. Позднее М. Асааду [6] удалось усилить приведенные выше результаты Хупперта и Янко, рассматривая лишь строго n-максимальные подгруппы для $n = 2, 3, 4$.

В данной работе мы даем полное описание групп, в которых все 3-максимальные подгруппы S-квазинормальны. Базируясь на этом результате, мы также приводим решение восходящей к Хупперту задачи о полном описании групп, у которых 3-максимальные подгруппы нормальны, в классе ненильпотентных групп.

2. Предварительные результаты. Напомним некоторые свойства групп Шмидта, необходимые в дальнейшем изложении (см. [7], гл. VI).

Лемма 2.1. *Если G — группа Шмидта, то*:

1) $G = [P]\langle a\rangle$, *где* P, $\langle a\rangle$ *— силовские p-подгруппа и q-подгруппа группы G соответственно*;

2) *G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются подгруппы $P\langle a^q\rangle$ и $P'\langle a\rangle$*;

3) *если P неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p или экспоненту* 4 (*если* $p = 2$).

Сформулируем в виде леммы теорему 2.1 работы [8].

Лемма 2.2. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *G является сверхразрешимой группой Шмидта*;

2) *каждая* 2*-максимальная подгруппа группы G нормальна*;

3) *каждая строго* 2*-максимальная подгруппа группы G S-квазинормальна.*

В работах [9, 10] доказан следующий факт.

Лемма 2.3. *Если каждая вторая максимальная подгруппа неразрешимой группы G является нильпотентной, то G изоморфна одной из групп A_5 или* $SL(2, 5)$.

Напомним некоторые свойства S-квазинормальных подгрупп.

Лемма 2.4 [11]. *Пусть G — группа и $H \le K \le G$. Тогда*:

1. *Если H является S-перестановочной в G, то H является S-перестановочной в K.*

2. *Допустим, что H нормальна в G; K/H является S-перестановочной в G/H тогда и только тогда, когда K S-перестановочна в G.*

3. *Если H S-перестановочна в G, то H субнормальна в G.*

Следующая лемма доказывается непосредственной проверкой с использованием индукции по n.

Лемма 2.5. *Пусть E — n-максимальная подгруппа q-нильпотентной группы G. Тогда $|G : E| = q^\alpha s$, где $\alpha \le n$ и $(s, q) = 1$.*

Лемма 2.6. *Пусть T — подгруппа группы G и $Q = \langle a\rangle$ — циклическая q-подгруппа группы G. Если $T \cap Q^x = 1$ для любого $x \in G$ и группа G q-нильпотентна, то $|Q|$ делит $|G : T|$.*

Доказательство. Мы можем предполагать, что $T \ne G$. Покажем, используя индукцию по $|G : T|$, что $|Q|$ делит $|G : T|$. Пусть $T \le M$, где M — максимальная подгруппа в G.

Допустим, что для некоторого $x \in G$ имеет место $\langle a\rangle^x \le M$. Поскольку $(\langle a\rangle^x)^m \cap T = 1$ для всех $m \in M$, то, по индукции, $|\langle a\rangle^x| = |\langle a\rangle|$ делит $|M : T|$ и поэтому $|Q| = |\langle a\rangle|$ делит $|G : T|$.

Таким образом, $\langle a\rangle^x \nleq M$ для всех $x \in G$. Тогда M нормальна в G. Так как $(\langle a\rangle \cap M)^m \cap T = 1$ для всех $m \in M$, то, по индукции, $|\langle a\rangle \cap M|$ делит $|M : T|$. Это влечет, что $|\langle a\rangle \cap M|$ делит $|G : T|$. Поскольку $G/M = \langle a\rangle M/M \simeq \langle a\rangle/M \cap \langle a\rangle$, то $|\langle a\rangle : M \cap \langle a\rangle|$ делит $|G : T|$. Следовательно, $|Q| = |\langle a\rangle : M \cap \langle a\rangle||\langle a\rangle \cap M|$ делит $|G : T|$.

Лемма доказана.

3. Строение групп, у которых все 3-максимальные подгруппы S-квазинормальны. В дальнейшем p, q и r — простые (необязательно различные) числа. В следующих теоремах P, Q и R обозначают некоторые силовскую p-подгруппу, силовскую q-подгруппу и силовскую r-подгруппу группы G соответственно.

Через $M_\beta(q)$ обозначается q-группа $\langle a, b \mid a^{q^{\beta-1}} = b^q = 1, a^b = a^{1+q^{\beta-2}}\rangle$, где $\beta > 2$, и $\beta > 3$, если $q = 2$ (см. [12, с. 190]).

Теорема 3.1. *Каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S-квазинормальной в G в том и только в том случае, когда группа G либо нильпотентна, либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha+\beta+\gamma \leq 3$, либо G изоморфна $SL(2,3)$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов*:

1) *G — группа Шмидта*;

2) *$G = [P]Q$, где $|P| = p, |Q| = q^\beta$ $(\beta \geq 3)$; группа Q либо циклическая, либо является абелевой группой типа $(q^{\beta-1}, q)$, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$; $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$*;

3) *$G = [P]Q$, где P — циклическая группа порядка p^2, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$*;

4) *$G = [P_1 \times P_2]Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, P_1Q — группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта*;

5) *$G = ([P]Q)R$, где P и R — минимальные нормальные подгруппы группы G, $|P| = p$, $|R| = r$, Q — циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что G — ненильпотентная группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа является S-квазинормальной. Тогда в силу леммы 2.4 (3) в группе G каждая 3-максимальная подгруппа является субнормальной. На основании лемм 2.4 (1) и 2.2 каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является сверхразрешимой группой Шмидта. Таким образом, G — группа, в которой каждая 2-максимальная подгруппа нильпотентна.

Предположим вначале, что группа G неразрешима. Согласно лемме 2.3 G изоморфна одной из групп A_5 или $SL(2,5)$. Но поскольку в группе $A_5 \simeq SL(2,5)/Z(SL(2,5))$ имеется нетривиальная 3-максимальная подгруппа, то, в силу леммы 2.4 (2) (3), такой случай невозможен.

Таким образом, G — разрешимая группа и каждая собственная подгруппа H группы G является либо нильпотентной, либо группой Шмидта. Причем если H — группа Шмидта, то H максимальна в G. Поскольку в разрешимой группе индекс любой максимальной подгруппы является степенью простого числа и число различных простых делителей порядка группы Шмидта равно двум, то $\pi(G) \leq 3$.

В дальнейшем будем предполагать, что $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma > 3$.

I. Допустим вначале, что $G = [P]Q$ является группой Шмидта.

Предположим, что P — абелева группа. Пусть $|Q| > q$. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу P_1Q_2, где P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P и Q_2 — 2-максимальная подгруппа в Q. По условию $(P_1Q_2)Q = Q(P_1Q_2)$, и поэтому P_1Q является подгруппой в G. В силу леммы 2.1(2), Q является максимальной подгруппой в G и поэтому $P_1 = 1$. Следовательно, $|P| = p$ и G является сверхразрешимой группой типа 1.

Пусть теперь $|Q| = q$. В этом случае каждая 2-максимальная подгруппа P_2 из P является 3-максимальной подгруппой в G. Тогда, по условию, $P_2Q = QP_2$, и поэтому P_2Q является подгруппой в G. Снова вследствие максимальности Q в G получаем $P_2 = 1$. Следовательно, $|P| = p^2$ и поэтому $|G| = p^2q$, что противоречит исходному допущению о группе G.

Предположим теперь, что P — неабелева группа. Пусть $|Q| > q$. В этом случае группа G имеет 3-максимальную подгруппу P_1Q_2, где P_1 — некоторая максимальная подгруппа в P и Q_2 — 2-максимальная подгруппа в Q. По условию $(P_1Q_2)Q = Q(P_1Q_2)$, и поэтому P_1Q является подгруппой в G. В силу леммы 2.1(2)(3) $\Phi(P)Q$ является максимальной подгруппой в G и поэтому $P_1 = \Phi(P)$. Следовательно, P является циклической группой, что противоречит неабелевости P.

Пусть теперь $|Q| = q$. Понятно, что каждая 2-максимальная подгруппа P_2 из P является 3-максимальной подгруппой в G. Тогда, по условию, $P_2Q = QP_2$, и поэтому P_2Q является подгруппой в G. Следовательно, $P_2\Phi(P)Q$ является подгруппой в G и поэтому, вследствие максимальности $\Phi(P)Q$ в G, получаем либо $P_2\Phi(P)Q = \Phi(P)Q$, либо $P_2\Phi(P)Q = G$. Понятно, что второй случай невозможен. Следовательно, $P_2\Phi(P)Q = \Phi(P)Q$ и поэтому $P_2 \leq \Phi(P)$. Если $P_2 < \Phi(P)$, то P является абелевой группой, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $P_2 = \Phi(P)$ и поэтому $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой в P. Группа P не является циклической, и поэтому, согласно теоремам 8.2 и 8.4 [13] (гл. III), $|\Phi(P)| = 2$ и P изоморфна группе кватернионов Q_8 порядка 8. Поскольку при этом $|P/\Phi(P)| = 4$, то $4 \equiv 1 \pmod{q}$. Это влечет $q = 3$ и поэтому группа G изоморфна группе $SL(2,3)$.

II. Предположим, что G не является группой Шмидта и $\pi(G) = \{p, q\}$.

Допустим вначале, что группа G имеет нормальную силовскую подгруппу P, т. е. $G = [P]Q$. Предположим, что группа G имеет пару подгрупп Шмидта вида $A = [P]Q_1$ и $B = [P_1]Q$ ($P_1 < P, Q_1 < Q$). Тогда A и B являются максимальными подгруппами в группе G. Так как в группе A каждая 2-максимальная подгруппа является S-квазинормальной, то по лемме 2.2 $|P| = p$. Аналогично можно показать, что $|P_1| = p$, что невозможно. Таким образом, либо все подгруппы Шмидта группы G содержат силовскую p-подгруппу из G, либо все они содержат силовскую q-подгруппу из G.

Если все подгруппы Шмидта группы G содержат P, то $|P| = p$ и $|Q| = q^\beta$, $\beta \geq 3$.

Пусть x — произвольный элемент из Q такой, что $|x| = q^{\beta-2}$. Тогда, поскольку $|Q| = q^\beta$, x содержится в некоторой максимальной подгруппе Q_1 группы Q. Ясно, что PQ_1 является максимальной подгруппой в G, и поэтому либо PQ_1 нильпотентна, либо PQ_1 — группа Шмидта с $|P| = p$ и $|Q_1| = q^{\beta-1}$. Очевидно, что в обоих случаях элемент x централизует группу P, и поэтому $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$.

Допустим, что Q — абелева группа. Если при этом группа Q циклическая, то G является сверхразрешимой группой типа 2.

Предположим, что Q — нециклическая группа. Пусть H — подгруппа Шмидта группы G. Тогда $|G : H| = q$ и $H = [P]Q_1$, где Q_1 — циклическая максимальная подгруппа в Q. По основной теореме о конечных абелевых группах $Q = Q_1 \times C_q$, где $|C_q| = q$. Ясно, что в этом случае G является сверхразрешимой группой типа 2.

Предположим теперь, что Q — неабелева группа. Тогда Q имеет две различные максимальные подгруппы Q_1 и Q_2. Поскольку группа G ненильпотентна, то по крайней одна из подгрупп PQ_1 или PQ_2 не является нильпотентной. Следовательно, эта подгруппа является группой Шмидта. Это означает, что все, кроме одной, максимальные подгруппы из Q являются циклическими.

Пусть теперь $q = 2$ и $\beta = 3$. Тогда по теореме 4.4 [12] (гл. V) Q изоморфна либо группе Q_8, либо диэдральной группе. В последнем случае $Q = [\langle a\rangle]\langle b\rangle$, где $|a| = 2^2, |b| = 2, a^b = a^{-1}$. Тогда Q имеет точно три максимальные подгруппы: $\langle a\rangle, \langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$, и поэтому подгруппы вида $\langle a^2\rangle, \langle b\rangle$ и $\langle ab\rangle$ являются 3-максимальными подгруппами в G. Известно, что диэдральная группа D обладает свойством $\Omega_1(D) = D$ (см. [12], гл. V, теорема 4.3). Это означает, что одна из подгрупп порядка 2 диэдральной группы, например $\langle ab\rangle$, не содержится в Q_G. Значит, эта подгруппа не является S-квазинормальной в G, но является 3-максимальной подгруппой в G. Полученное противоречие показывает, что $Q \simeq Q_8$. Следовательно, G снова является сверхразрешимой группой типа 2.

Если теперь либо $q = 2$ и $\beta > 3$, либо q — нечетное простое, то по теореме 4.4 [12] (гл. V) в первом случае Q изоморфна одной из групп $M_\beta(2), D_\beta, Q_\beta$ или S_β, а во втором — группе $M_\beta(q)$ (см. [12, с. 190, 191]). Если Q изоморфна одной из групп D_β, Q_β или S_β, то по теореме 4.3 [12] (гл. V) фактор-группа $Q/Z(Q)$ изоморфна $D_{\beta-1}$. Но в группе $D_{\beta-1}$ имеются две нециклические максимальные подгруппы, и поэтому группа Q имеет по крайней мере две нециклические максимальные подгруппы, что противоречит доказанному выше. Следовательно, группа Q не может быть изоморфна одной из групп D_β, Q_β или S_β. Таким образом, группа Q изоморфна $M_\beta(q)$, и поэтому G снова является сверхразрешимой группой типа 2.

Предположим теперь, что любая подгруппа Шмидта группы G содержит некоторую силовскую q-подгруппу из G. Это означает, что $Q = \langle a\rangle$ — циклическая группа и $P\langle a^q\rangle$ — максимальная подгруппа группы G с индексом, равным q. Поскольку подгруппа $P\langle a^q\rangle$ не является группой Шмидта, она нильпотентна. Следовательно, $P\langle a^q\rangle = P \times \langle a^q\rangle = F(G)$, и поэтому $\langle a^q\rangle$ содержится в $Z(G)$. При этом либо каждая максимальная подгруппа группы G, содержащая силовскую q-подгруппу группы G, является группой Шмидта, либо G имеет нильпотентную максимальную подгруппу, содержащую силовскую q-подгруппу группы G.

Предположим, что имеет место первый случай. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G вида P_1Q, где $P_1 < P$. Тогда M является группой Шмидта с $|P_1| = p$.

Предположим вначале, что P — неабелева группа. Несложно показать, что в этом случае $P_1 = \Phi(P)$ и $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой в P. Вследствие рассматриваемого случая P не является циклической группой. Значит, согласно теоремам 8.2 и 8.4 [13] (гл. III) $|\Phi(P)| = 2$ и P изоморфна группе Q_8. Но $\Phi(P)Q = [\Phi(P)]Q$ — группа Шмидта, что невозможно.

Теперь предположим, что P — абелева группа. Допустим, что $\Phi(P) \neq 1$. Тогда $P_1 = \Phi(P)$ — нормальная подгруппа порядка p группы G.

Допустим, что $|Q| > q$. Пусть P_0 — некоторая максимальная подгруппа группы P и Q_2 — 2-максимальная подгруппа группы Q. Тогда P_0Q_2 является 3-максимальной подгруппой в G. По условию $(P_0Q_2)Q = Q(P_0Q_2)$, и поэтому P_0Q является подгруппой в группе G. Тогда вследствие максимальности подгруппы $\Phi(P)Q$ в группе G имеем $\Phi(P)Q = P_1Q$. Это означает, что $\Phi(P)$ является максимальной подгруппой в P, и поэтому P — циклическая группа порядка p^2. Так как $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$ и группа G не является нильпотентной, $G/\Phi(P)$ — сверхразрешимая группа Шмидта. Поскольку каждая максимальная подгруппа группы G, содержащая силовскую q-подгруппу группы G, является сверхразрешимой группой Шмидта, максимальная подгруппа группы Q совпадает с $Z(G)$. Следовательно, G — сверхразрешимая группа типа 3.

Предположим теперь, что $|Q| = q$. Пусть P_2 — произвольная 2-максимальная подгруппа в P. Тогда P_2 является 3-максимальной подгруппой в G, и поэтому P_2Q — подгруппа группы G. Рассуждая, как и выше, можно показать, что $\Phi(P)$ является единственной 2-максимальной подгруппой в P. Поэтому вследствие абелевости P является циклической группой. Это в свою очередь влечет $|G| = p^2q$, что противоречит исходному допущению о группе G.

Допустим теперь, что $\Phi(P) = 1$. В этом случае P является элементарной p-группой. Рассмотрим максимальную подгруппу T группы G такую, что $G = [P_1]T$. Поскольку $T = [P_2]Q$ — группа Шмидта (в силу рассматриваемого случая), по лемме 2.2 P_2 является нормальной подгруппой порядка p в группе G. Таким образом, G — сверхразрешимая группа типа 4.

Теперь предположим, что G имеет нильпотентную максимальную подгруппу M, содержащую подгруппу Q. Тогда группа M имеет вид $P_1 \times Q$, где $P_1 < P$. Допустим, что G не имеет максимальных подгрупп, являющихся группами Шмидта. Тогда каждая максимальная подгруппа группы G нильпотентна и поэтому G — группа Шмидта, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, в группе G среди максимальных подгрупп существует такая подгруппа H, что H является группой Шмидта. Не теряя общности, можно предполагать, что $Q \leq H$. В силу леммы 3.9 [13] (гл. II) $HM = G$. Пусть H_p — силовская p-подгруппа группы H. Подгруппа H_p не содержится в P_1, и поэтому $H_p \cap P_1 = 1$. Это влечет $H \cap M = Q$.

Допустим, что $|P_1| > p$. Пусть E — 2-максимальная подгруппа в M, индекс которой равен p^2. Тогда E является 3-максимальной подгруппой в G и $Q \leq E$. Из условия теоремы следует, что EQ^x — подгруппа в G для всех $x \in G$. Согласно лемме 4.7 [13] (гл. VI) QQ^x является силовской q-подгруппой в EQ^x, и поэтому подгруппа $Q = Q^x$ нормальна в группе G. Полученное противоречие показывает, что $|P_1| = p$.

Ясно, что H_p и P_1 являются нормальными подгруппами порядка p в группе G. Следовательно, G снова является сверхразрешимой группой типа 4.

Предположим теперь, что группа G не имеет нормальных силовских подгрупп. Пусть H — нормальная подгруппа группы G с индексом, равным p. Тогда Q является подгруппой в H. Допустим, что подгруппа Q нормальна в группе H. Тогда подгруппа Q нормальна в группе G, что противоречит рассматриваемому случаю.

Следовательно, $H = [P_1]Q$ является подгруппой Шмидта группы G, и поэтому Q — циклическая группа. По лемме 2.2 P_1 является нормальной подгруппой порядка p в группе G.

Предположим, что $N_G(Q)$ — нильпотентная подгруппа группы G. Тогда $Q \leq \leq Z(N_G(Q))$, так как Q — абелева группа. По теореме 14.3.1 [14] в этом случае группа G имеет нормальное q-дополнение, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $N_G(Q) = [Q]\langle b\rangle$ является подгруппой Шмидта в группе G и $|Q| = q$. Это влечет $|G| = p^2q$, что противоречит исходному допущению о группе G.

III. Наконец, рассмотрим случай, когда $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где p, q, r — различные простые делители $|G|$.

Обозначим через M некоторую нормальную подгруппу группы G такую, что $|G : M| = q$. Тогда группа M либо нильпотентна, либо является группой Шмидта.

Предположим, что группа M нильпотентна. Тогда $G = [P \times R]Q$ и $M = = P \times R \times Q_1$, где Q_1 — некоторая максимальная подгруппа в Q. Подгруппы PQ и RQ не могут быть одновременно нильпотентными, и поэтому либо PQ и RQ — группы Шмидта, либо одна из этих подгрупп, например RQ, нильпотентна, а вторая является группой Шмидта.

Предположим, что имеет место первый случай. Тогда подгруппы PQ и RQ являются максимальными в G. Следовательно по лемме 2.2 $|P| = p$ и $|R| = r$. Кроме того, по лемме 2.1 (1) $Q = \langle a\rangle$ является циклической группой и $\langle a^q\rangle$ — подгруппа в $Z(\langle PQ, RQ\rangle) = Z(G)$.

Теперь предположим, что подгруппа $PQ = P\langle a\rangle$ является группой Шмидта, а подгруппа RQ нильпотентна. Тогда подгруппа PQ максимальна в G, и поэтому $G = PQ \times R$, где $|R| = r$. По лемме 2.2 P является нормальной подгруппой порядка p в G. Из того, что $\langle a^q\rangle$ является характеристической подгруппой в Q и Q нормальна в RQ, следует, что подгруппа $\langle a^q\rangle$ нормальна в RQ. Так как $\langle a^q\rangle$ нормальна и в группе PQ, подгруппа $\langle a^q\rangle$ нормальна в G. Таким образом, G является группой типа 5.

Теперь предположим, что M является группой Шмидта и G не является группой типа 5. Не ограничивая общности, можно допустить, что $M = [R]P$, где $P = \langle b\rangle$ — циклическая группа. Тогда $G = [M]Q = [[R]P]Q$, где Q — группа простого порядка q и Q не является нормальной подгруппой в G. Действительно, если бы Q была нормальной в G подгруппой, то $G = M \times Q$ снова была бы группой типа 5.

Поскольку $M = [R]P$ является группой Шмидта, то по лемме 2.2 R является нормальной подгруппой порядка r группы M, а следовательно, и группы G. Предположим, что RQ — нильпотентная группа. Если при этом PQ также является нильпотентной группой, то подгруппа Q нормальна в G, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, $PQ = [P]Q$ является группой Шмидта с $|P| = p$. Так как при этом $C_G(R) = RQ$, Q нормальна в G, что вновь противоречит рассматриваемому случаю.

Таким образом, $RQ = [R]Q$ является группой Шмидта. Теперь предположим, что подгруппа $PQ = [P]Q$ также является группой Шмидта. Поскольку $|P| = p$, то $p - 1 = q\alpha$ для некоторого натурального α. Аналогично, из того, что RQ и RP являются группами Шмидта и $|R| = r$, следует, что $r - 1 = q\beta$ и $r - 1 = p\gamma$ для некоторых натуральных β и γ. Следовательно, $p = q\beta\gamma^{-1} = 1 + q\alpha$, что невозможно. Таким образом, PQ — нильпотентная группа, и поэтому $G = [R](P \times \times Q)$, причем из максимальности в G подгруппы RQ следует, что $P = \langle b \rangle$ является группой простого порядка p. Это влечет $R = F(G)$ и $|G| = pqr$, что противоречит исходному допущению о группе G.

Достаточность. Заметим, что в нильпотентной группе каждая подгруппа является S-квазинормальной, а если $|G| = p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, где p, q, r — простые (необязательно различные) числа и $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, то в G либо нет 3-максимальных подгрупп, либо 1 — единственная 3-максимальная подгруппа в G. Кроме того, если G изоморфна группе $SL(2,3)$, либо если G — сверхразрешимая группа одного из типов 1, 3 – 5, то непосредственная проверка показывает, что в G все ее 3-максимальные подгруппы нормальны. Таким образом, в доказательстве достаточности в теореме 3.1 достаточно лишь ограничиться рассмотрением случая, когда G — сверхразрешимая группа типа 2. Если при этом Q либо циклическая группа, либо абелева группа типа $(q^{\beta-1}, q)$, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, то непосредственной проверкой также можно показать, что в G все ее 3-максимальные подгруппы нормальны.

Предположим, что $Q \simeq M_{\beta}(q)$. Тогда из определения группы $M_{\beta}(q)$ и условия следует $G = ([P]Q_1)C_q$, где $|P| = p$, $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$, $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1C_q| = q^{\beta}$, $|a| = q^{\beta-1}$, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$, $\beta \geq 3$ при нечетном q и $\beta > 3$ при $q = 2$.

Пусть T — произвольная 3-максимальная подгруппа в G. Покажем, что T S-квазинормальна в G.

Допустим вначале, что $T \cap Q_1^x \neq 1$ для некоторого $x \in G$. Тогда Q_1^x имеет собственную подгруппу Z такую, что $Z \leq T$ и $|Z| = q$. В силу условия $Z \leq C_G(P)$, и поэтому Z нормальна в G. Тогда $G/Z = [PZ/Z](Q_1C_q/Z)$, где $|Q_1C_q/Z| = q^{\alpha}$, $\alpha \geq 2$, при нечетном q и $\alpha > 2$ при $q = 2$. По теореме 4.3 [12] (гл. V) $Z = Q'$, и поэтому Q_1C_q/Z — абелева группа типа $(q^{\alpha-1}, q)$. Если при этом $\alpha > 2$, то, как мы уже заметили выше, T/Z является S-квазинормальной 3-максимальной подгруппой в G/Z. Тогда по лемме 2.4 (2) T S-квазинормальна в G. Если $\alpha = 2$, то, очевидно, $|G| = pq^3$. Поскольку $Z \leq T$ и T — 3-максимальная подгруппа в G, то $Z = T$ нормальна в G.

Предположим теперь, что $T \cap Q_1^x = 1$ для всех $x \in G$. Так как группа G является q-нильпотентной, то по лемме 2.6 $|Q_1|$ делит $|G : T|$ и по лемме 2.5 либо $|G : T| = q^3$, либо $|G : T| = pq^2$. Допустим, что имеет место первый случай. Тогда $P \leq T$, и поэтому T/P является S-квазинормальной подгруппой в G/P в силу нильпотентности G/P. Следовательно, по лемме 2.4 (2) T S-квазинормальна в G. Теперь предположим, что $|G : T| = pq^2$. Так как при этом $|Q_1|$ делит $|G : T|$, то $T \simeq C_q$. В силу условия $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$, легко показать, что в этом случае T S-квазинормальна в G.

Таким образом, каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S-квазинормальной.

Теорема доказана.

***Следствие* 3.1.** *Предположим, что каждая третья максимальная подгруппа группы G S-квазинормальна в G. Если $|\pi(G)| \geq 3$, то G сверхразрешима. Если $|\pi(G)| \geq 4$, то G нильпотентна.*

4. Решение задачи Хупперта в ненильпотентном случае. В данном пункте мы применим теорему 3.1 для решения в ненильпотентном случае восходящей к

Хупперту [1] задачи о полном описании групп, у которых все третьи максимальные подгруппы нормальны.

Теорема 4.1. *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда каждая 3-максимальная подгруппа группы G является нормальной в G в том и только в том случае, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G изоморфна $SL(2,3)$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов*:

1) *G — группа Шмидта*;

2) *$G = [P]Q$, где $|P| = p, |Q| = q^\beta$ $(\beta \geq 3)$; группа Q либо циклическая, либо является абелевой группой типа $(q^{\beta-1}, q)$, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$ $(\beta > 4)$; $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$*;

3) *$G = [P]Q$, где P — циклическая группа порядка p^2, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$*;

4) *$G = [P_1 \times P_2]Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, P_1Q — группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта*;

5) *$G = ([P]Q)R$, где P и R — минимальные нормальные подгруппы группы G, $|P| = p$, $|R| = r$, Q — циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G — ненильпотентная группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа нормальна. Тогда, очевидно, каждая 3-максимальная подгруппа группы G является S-квазинормальной, и поэтому G является группой одного из типов, описанных в теореме 3.1.

Предположим, что G — сверхразрешимая группа типа 2 в теореме 3.1 и $Q \simeq M_\beta(q)$, где $\beta \geq 3$ при нечетном q и $\beta > 3$ при $q = 2$. Из определения группы $M_\beta(q)$ и условия следует $G = ([P]Q_1)C_q$, где $|P| = p$, $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$, $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$ и $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$. Если $\beta = 3$, то в силу условия подгруппа C_q является нормальной 3-максимальной подгруппой в G, что противоречит строению группы $M_\beta(q)$. Если $\beta = 4$, то в силу условия подгруппа PC_q является нормальной 3-максимальной подгруппой в G. Поскольку $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$ и $|C_q| = q$, то PC_q нильпотентна. Это в свою очередь влечет нормальность подгруппы C_q в G, что вновь противоречит строению группы $M_\beta(q)$. Следовательно, в случае, когда G — сверхразрешимая группа типа 2 в теореме 3.1 и $Q \simeq M_\beta(q)$, имеем $\beta > 4$. Таким образом, G — группа одного из типов, описанных в теореме 4.1.

Достаточность. Проверяется так же, как и при доказательстве теоремы 3.1.

Теорема доказана.

***Следствие* 4.1.** *Предположим, что каждая третья максимальная подгруппа группы G нормальна в G. Если $|\pi(G)| \geq 3$, то G сверхразрешима. Если $|\pi(G)| \geq 4$, то G нильпотентна.*

***Следствие* 4.2** [1]. *Предположим, что каждая третья максимальная подгруппа группы G нормальна в G. Тогда коммутант G' группы G является нильпотентным и порядок каждого главного фактора группы G не делится на p^3 для всех простых p.*

Следующий пример показывает, что в общем случае класс групп с S-квазинормальными третьими максимальными подгруппами шире класса групп, в которых все третьи максимальные подгруппы нормальны.

***Пример* 4.1.** Пусть $Q = \langle x, y \mid x^9 = y^3 = 1, x^y = x^4 \rangle$ и Z_7 — группа порядка 7. Тогда $\Omega_1(Q) = \Omega$ является абелевой группой порядка 9. Так как фактор-группа Q/Ω изоморфна подгруппе порядка 3 группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,(Z_7)$, можно построить группу $G = [Z_7]Q$. Понятно, что $\langle y \rangle$ является 3-максимальной подгруппой в G, $\langle y \rangle$ ненормальна в G и G — группа, в которой каждая 3-максимальная подгруппа S-квазинормальна.

1. *Huppert B.* Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen // Math. Z. – 1954. – **60**. – S. 409 – 434.
2. *Janko Z.* Finite groups with invariant fourth maximal subgroups // Ibid. – 1963. – **82**. – S. 82 – 89.
3. *Janko Z.* Finite simple groups with shot chains of subgroups // Ibid. – 1964. – **84**. – S. 428 – 437.
4. *Agrawal R. K.* Generalized center and hypercenter of a finite group // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. **54**. – P. 13 – 21.
5. *Mann A.* Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – **132**. – P. 395 – 409.
6. *Asaad M.* Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal // Acta Math. Hung. – 1989. – **54**, № 1-2. – P. 9 – 27.
7. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978.
8. *Луценко Ю. В., Скиба А. Н.* Конечные ненильпотентные группы с нормальными или S-квазинормальными n-максимальными подгруппами // Изв. Гомел. ун-та. – 2009. – № 1(52). – С. 134 – 138.
9. *Suzuki M.* The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – **8**, № 4. – P. 686 – 695.
10. *Janko Z.* Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen // Math. Z. – 1962. – **79**. – S. 422 – 424.
11. *Kegel O.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Ibid. – 1962. – **87**. – S. 205 – 221.
12. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York etc.: Harper and Row, 1968.
13. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 p.
14. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Получено 10.02.09,
после доработки — 15.06.09