УДК 517.5

М. С. Вязовська (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОЦІНКА НОРМИ ПОХІДНОЇ МОНОТОННОЇ РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ У ПРОСТОРАХ L_p

For a derivative of a rational function R of the power n increasing on the interval $[-1, 1]$ and for all $0 < \varepsilon < 1$ and $p,\ q > 1$, we show that the inequality

$$\| R' \|_{L_p[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} \leq C \cdot 9^{n(1-1/p)} \varepsilon^{1/p-1/q-1} \| R \|_{L_q[-1,1]},$$

is satisfied, where the constant C depends only on p and q. The power largest among powers of the polynomials P and Q is called a power of the rational function $R(x) = P(x)/Q(x)$.

Показано, что для производной возрастающей на отрезке $[-1, 1]$ рациональной функции R степени n для всех $0 < \varepsilon < 1$ и $p,\ q > 1$ выполняется неравенство

$$\| R' \|_{L_p[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} \leq C \cdot 9^{n(1-1/p)} \varepsilon^{1/p-1/q-1} \| R \|_{L_q[-1,1]},$$

где постоянная C зависит только от p и q. Степенью рациональной функции $R(x) = P(x)/Q(x)$ называем наибольшую из степеней многочленов P и Q.

1. Вступ. Наслідком класичної нерівності Бернштейна [1] є оцінка похідної многочлена

$$| P'(0) | \leq n \| P \|_{C[-1,1]},$$

де n позначає степінь многочлена P. Виявляється, що неможливо одержати прямий аналог цієї теореми у раціональній апроксимації. Розглянемо функцію степеня 2

$$g(x) = \frac{\delta x}{x^2 + \delta^2},$$

модуль якої не перевищує $\frac{1}{2}$ при довільному δ та значення похідної $g'(0) = \frac{1}{\delta}$ прямує до нескінченності при $\delta \to 0$. Проте для раціональних функцій виконується нерівність Пекарського [2], в якій норми (квазінорми) функції та її похідної розглядаються у просторах L_p. Позначимо

$$\| f \|_{L_p[a,b]} := \left(\int_a^b | f(x) |^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Згідно з нерівністю Пекарського для раціональної функції $R \in L_q[-1, 1]$ степеня n та кожного $s \in \mathbb{N}$ виконується

$$\left\| R^{(s)} \right\|_{L_p[-1,1]} \le cn^s \| R \|_{L_q[-1,1]},$$

де $1/p - 1/q = s$ та $1/q \notin \mathbb{N}$.

Ситуація суттєво відрізняється для випадку монотонних раціональних функцій. Незважаючи на те, що порядки наближення класів монотонних функцій з W_p^1 раціональними функціями без обмежень та монотонними раціональними функціями збігаються [3], існують обмеження на значення похідної раціональної монотонної функції. У попередній статті [4] ми одержали наступний аналог нерівності Бернштейна для монотонних раціональних функцій.

Теорема 1. *Якщо R — зростаюча на відрізку $[-1, 1]$ раціональна функція степеня n, то*

$$| R'(x) | < \frac{9^n}{1 - |x|} \| R \|_{C[-1,1]}, \quad x \in (-1, 1).$$

Зауваження. У статті [4] теорему наведено в дещо іншому формулюванні, однак з доведення легко випливає нерівність, вказана вище.

Ми узагальнюємо цей результат для просторів L_p.

Теорема 2. *Якщо R — зростаюча на відрізку $[-1, 1]$ раціональна функція степеня n, то*

$$\| R' \|_{L_p[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} \le C(p, q)\, 9^{n(1-1/p)} \varepsilon^{1/p - 1/q - 1} \| R \|_{L_q[-1,1]}$$

для всіх $1 < p \le \infty$ та $1 < q \le \infty$.

Наступна теорема показує, наскільки точною є одержана оцінка.

Теорема 3. *Для кожного $\varepsilon \in (0, 1 - 1/9^n)$ та $p > 1, q > 2$ існує зростаюча на $[-1, 1]$ раціональна функція $\tilde{R}$ степеня $2n$ така, що*

$$\left\| \tilde{R}' \right\|_{L_p[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} \ge \frac{1}{32} \cdot 9^{n(1 - \ln(4p+1)/p)} \varepsilon^{1/p - 1/q - 1} \left\| \tilde{R} \right\|_{L_q[-1,1]}.$$

2. Доведення теореми 2. Нехай R — зростаюча на відрізку $[-1, 1]$ раціональна функція степеня n. Норму в L_p похідної $R(x)$ можна оцінити як

$$\| R' \|_{L_p[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} = \left(\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left| R'(x)^p \right| dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} | R'(x) | \, dx \right)^{1/p} \max_{[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} | R'(x) |^{1-1/p} =$$

$$= \big(R(1-\varepsilon) - R(-1+\varepsilon) \big)^{1/p} \max_{[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]} | R'(x) |^{1-1/p}.$$

Звідси

$$\| R' \|_{L_p[-1+\varepsilon,\,1-\varepsilon]} \;\le\; 2^{1/p} \| R \|^{1/p}_{C[-1+\varepsilon,\,1-\varepsilon]} \| R' \|^{1-1/p}_{C[-1+\varepsilon,\,1-\varepsilon]}. \tag{1}$$

Застосовуючи теорему 1 до функції $R_1(x) = R\big((1-\varepsilon/2)\,x\big)$, одержуємо нерівність

$$R'(x) \;\le\; \frac{9^n}{1-\varepsilon/2-|x|} \| R \|_{C[-1+\varepsilon/2,\,1-\varepsilon/2]}, \quad x \in (-1+\varepsilon/2,\, 1-\varepsilon/2),$$

і, як наслідок,

$$\max_{x \in [-1+\varepsilon,\,1-\varepsilon]} R'(x) \;\le\; \frac{2}{\varepsilon}\, 9^n \| R \|_{C[-1+\varepsilon/2,\,1-\varepsilon/2]}. \tag{2}$$

Оскільки функція R зростає на відрізку $[-1, 1]$, то виконується рівність

$$\| R \|_{C[-1+\varepsilon,\,1-\varepsilon]} \;\le\; \varepsilon^{-1/q} \| R \|_{L_q[-1,1]}, \tag{3}$$

та аналогічно

$$\| R \|_{C[-1+\varepsilon/2,\,1-\varepsilon/2]} \;\le\; \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1/q} \| R \|_{L_q[-1,1]}. \tag{4}$$

З нерівностей (1) – (4) випливає твердження теореми 2, до того ж $C(p, q) = 2^{1+1/q-1/pq}$.

3. Доведення теореми 3. Щоб довести теорему 3, нам потрібна допоміжна лема.

Лема 1. *Покладемо* $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. *Нехай* $\delta \in (0, 3)$, $d = 9 - \delta$ *і* $a = 24/\sqrt{\delta}$. *Тоді функція*

$$F_\delta(x) \;=\; \frac{x}{d-1} \;+\; \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{d}{a}\right)^k f(a^k x)$$

зростає на відрізку $[-1, 1]$ *та задовольняє нерівності*

$$F_\delta(1) \;<\; 2, \tag{5}$$

$$F'_\delta(x) \;\ge\; \frac{1}{4} d^n \quad \text{при} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2a^n}\right]. \tag{6}$$

Доведення. Для похідної

$$f'(x) \;=\; \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

виконуються такі нерівності:

$$f'(x) \;\ge\; -\frac{1}{8}, \tag{7}$$

$$f'(x) \;\ge\; 1 - 3x^2, \tag{8}$$

$$f'(x) \;\ge\; -\frac{1}{x^2}. \tag{9}$$

Розглянемо функцію

$$G_\delta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{a}\right)^k f(a^k x).$$

Очевидно, що $G_\delta(x)$ є диференційовною на $(0, \infty)$. З нерівностей $f'(x) \le 1$, $f'(x) < 1$ при $x > 1$ випливає, що для кожного $x \in \left[a^{-n}, 1\right]$

$$F'_\delta(x) \ge G'_\delta(x).$$

Крім того, очевидно, що $F'_\delta(x) \ge 0$, $x \in \left[0, a^{-n}\right]$. Оскільки функція $G_\delta(x)$ є „самоподібною”, тобто $G_\delta(ax) = (a/d)\, G_\delta(x)$, досить довести, що $G'_\delta(x) > 0$ на відрізку $[1, a]$. Розглянемо окремо випадки $x \in [1, 5/4]$, $x \in \left[5/4, \sqrt{d}\right]$ та $x \in \left[\sqrt{d}, a\right]$. Маємо

$$G'_\delta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d^k f'(a^k x).$$

З нерівностей (8) і (9) відповідно випливає, що

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} d^k f'(a^k x) \ge \frac{1}{d-1} - \frac{3x^2}{da^2 - 1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} d^k f'(a^k x) \ge -\frac{1}{x^2} \frac{d}{a^2 - d}.$$

На відрізку $[1, 5/4]$ виконується нерівність $f'(x) < 1/2 - x/2$, яка дозволяє оцінити $G'_\delta(x) > H_1(x)$ при $x \in [1, 5/4]$, де

$$H_1(x) = \frac{1}{d-1} - \frac{3x^2}{da^2 - 1} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} \frac{d}{a^2 - d}.$$

З нерівності (7) випливає, що $G'_\delta(x) > H_2(x)$ при $x \in \left[5/4, \sqrt{d}\right]$,

$$H_2(x) = \frac{1}{d-1} - \frac{3x^2}{da^2 - 1} - \frac{1}{8} - \frac{1}{x^2} \frac{d}{a^2 - d}.$$

На відрізку $x \in \left[\sqrt{d}, a\right]$ виконується $f'(x/a) \ge 1 - x/a$, а тому можна оцінити $G'_\delta(x)$ знизу функцією

$$H_3(x) = \frac{1}{d-1} - \frac{3x^2}{da^2(da^2 - 1)} - \frac{x}{ad} + \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} - \frac{d}{x^2(a^2 - d)}.$$

Функції H_1, H_2, H_3 опуклі догори на відрізках $[1, 5/4]$, $\left[5/4, \sqrt{d}\right]$ та $\left[\sqrt{d}, a\right]$ відповідно. Тому досить довести, що вони набувають додатних значень на кінцях відповідних відрізків. За умов теореми $6 < d < 9$ та $a > 4/\sqrt{3} \cdot d$, тому

$$H_1(1) \;=\; \frac{1}{d-1} - \frac{3}{da^2-1} - \frac{d}{a^2-d} \;>\; 0\,,$$

$$H_1(5/4) \;=\; H_2(5/4) \;>\; -\frac{1}{8} + \frac{1}{8-\delta} - \frac{\delta}{64} \;>\; 0\,,$$

$$H_2\big(\sqrt{d}\big) \;>\; -\frac{1}{8} + \frac{1}{8-\delta} - \frac{\delta}{72} \;>\; 0\,,$$

$$H_3\big(\sqrt{d}\big) \;>\; \frac{4d}{(d+1)^2(d-1)} - \frac{1}{a\sqrt{d}} - \frac{6}{d^2a^2} - \frac{2}{da^2} \;>\; 0\,,$$

$$H_3(a) \;>\; -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{d-1} - \frac{1}{d} - \frac{2}{a^2} - \frac{4}{d^2a^2} \;>\; 0\,,$$

а отже, $G'_\delta(x) > 0$ на відрізку $[1, a]$.

Залишилося довести нерівності (5) та (6). Оскільки $f(x) < 1/x$ при $x > 0$, то

$$F_\delta(1) \;=\; \frac{1}{d-1} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{d}{a}\right)^k f(a^k) < \frac{1}{d-1} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{d}{a^2}\right)^k < 2\,.$$

З нерівності (8) випливає, що при $x \in \left[0, \dfrac{1}{2a^n}\right]$

$$F'_\delta(x) \;=\; \frac{1}{d-1} + \sum_{k=0}^{n} d^k f'(a^k x) > \sum_{k=0}^{n} d^k\left(1 - \frac{3}{4}a^{2k-2n}\right) > \frac{d^n}{4}\,.$$

Лему 1 доведено.

Доведення теореми **3.** Зафіксуємо $p > 1$ та $0 < \varepsilon < 1 - \dfrac{1}{9^n}$. Покладемо $\delta = \dfrac{9}{1+2p}$ та покажемо, що раціональна функція степеня $2n$

$$\tilde{R}(x) \;=\; F_\delta\left(\frac{x-1+\varepsilon}{1-(1-\varepsilon)\,x}\right) + F_\delta(1)$$

задовольняє умови теореми 3. З леми 1 випливає, що функція $\tilde{R}$ зростає на відрізку $[-1, 1]$. Щоб оцінити норму $\|\tilde{R}'\|_{L_p[-1+\varepsilon,\,1-\varepsilon]}$, виконаємо заміну змінних $y = (x-1+\varepsilon)/\big(1-(1-\varepsilon)\,x\big)$ в інтегралі

$$\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \big|\tilde{R}'(x)\big|^p\,dx \;=\; \int\limits_{(-2+2\varepsilon)/(2\varepsilon-\varepsilon^2)}^{0} \frac{\big(1+(1-\varepsilon)y\big)^{2p-2}}{\big(1-(1-\varepsilon)^2\big)^{p-1}}\,|F'_\delta(y)|^p\,dy\,.$$

З нерівності (6) випливає, що

$$\int\limits_{-1/2a^n}^{0} \frac{\big(1+(1-\varepsilon)y\big)^{2p-2}}{\big(1-(1-\varepsilon)^2\big)^{p-1}}\,|F'_\delta(y)|^p\,dy \;\ge\; 2^{-3p}\,\varepsilon^{1-p}\,a^{-n}\,d^{np}\,.$$

Оскільки

$$da^{-1/p} = (9 - \delta)\,\delta^{1/2p}\,24^{-1/p} =$$

$$= 9 \cdot 8^{-1/p}\left(1 - \frac{1}{2p + 1}\right)(2p + 1)^{-1/2p} \geq 9^{1 - \ln(4p+1)/p},$$

то

$$\left\| \tilde{R}' \right\|_{L_p[-1+\varepsilon,\, 1-\varepsilon]} \geq \frac{1}{8} \cdot 9^{n(1 - \ln(4p+1))/p}\, \varepsilon^{1/p - 1}. \tag{10}$$

Щоб оцінити значення $\left\| \tilde{R} \right\|_{L_q[-1,1]}$, розглянемо функцію

$$H(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при} \quad x \in [-1, 0], \\ \quad 1 & \text{при} \quad x \in [0, 1], \end{cases}$$

для якої виконується

$$\tilde{R}(x) \leq 2F_\delta(1)\, H\left(\frac{x - 1 + \varepsilon}{1 - (1 - \varepsilon)\, x}\right).$$

Оцінимо

$$\int_{-1}^{1} \left| H\left(\frac{x - 1 + \varepsilon}{1 - (1 - \varepsilon)\, x}\right) \right|^q dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{\varepsilon(x + 1)}{1 - (1 - \varepsilon)\, x}\right)^q dx + \int_{0}^{1-\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon(x + 1)}{1 - (1 - \varepsilon)\, x}\right)^q dx + \varepsilon.$$

Оскільки $\dfrac{\varepsilon(x + 1)}{1 - (1 - \varepsilon)\, x} < \varepsilon$ при $x \in [-1, 0]$, перший доданок не перевищує ε^q. Щоб оцінити другий доданок, виконаємо заміну $x = 1 - \varepsilon y$. Тоді при $y \in [1, 1/\varepsilon]$

$$\frac{\varepsilon(x + 1)}{1 - (1 - \varepsilon)\, x} = \frac{2 - \varepsilon y}{1 + y - \varepsilon y} < \frac{2}{1 + y}.$$

Тому

$$\int_{0}^{1-\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon(x + 1)}{1 - (1 - \varepsilon)\, x}\right)^q dx \leq \int_{1}^{1/\varepsilon} \frac{2^q \varepsilon}{(1 + y)^q}\, dy =$$

$$= \frac{2^q \varepsilon}{q - 1}\left(\frac{1}{2^{q-1}} - \frac{1}{(1 + 1/\varepsilon)^{q-1}}\right) < 2\varepsilon.$$

Звідси

$$\int_{-1}^{1} \left| H\left(\frac{x - 1 + \varepsilon}{1 - (1 - \varepsilon)\, x}\right) \right|^q dx \leq \varepsilon + \varepsilon^q + 2\varepsilon \leq 4\varepsilon.$$

Отже,

$$\| \tilde{R} \|_{L_q[-1,1]} \leq 2^{2+2/q} \varepsilon^{1/q}. \tag{11}$$

З нерівностей (10) та (11) випливає твердження теореми 3.

1. *Бернштейн Н. С.* Об оценках производных многочленов: Сочинения. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 1. – С. 370 – 425.
2. *Пекарский А. А.* Оценки производных рациональных функций в $L_p[-1,1]$ // Мат. заметки. – 1986. – **39**, № 3. – С. 388 – 394.
3. *Bondarenko A. V.* On monotone rational approximation // J. Approxim. Theory. – 2005. – **135**. – P. 54 – 69.
4. *Bondarenko A. V., Viazovska M. S.* Bernstein type inequality in monotone rational approximation // East J. Approxim. – 2005. – **11**. – P. 103 – 108.

Одержано 18.06.09,
після доопрацювання — 03.09.09