УДК 517.9

О. І. Неня (Нац. економ. ун-т, Київ),
В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ),
С. І. Трофимчук (Ін-т математики та фізики ун-ту Тальки, Чилі)

ПРО ТОЧНІ УМОВИ ГЛОБАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ, ЯКЕ ЗАДОВОЛЬНЯЄ УМОВУ ЙОРКА*

Continuing our previous investigations, we give simple sufficient conditions for global stability of the zero solution of the difference equation $x_{n+1} = qx_n + f_n(x_n, \ldots, x_{n-k})$, $n \in \mathbb{Z}$, where nonlinear functions f_n satisfy the Yorke condition. For every positive integer k, we represent the interval $(0, 1]$ as the union of $[(2k+2)/3]$ disjoint subintervals, and, for q from each subinterval, we present a global-stability condition in explicit form. The conditions obtained are sharp for the class of equations satisfying the Yorke condition.

В продолжение предыдущих исследований авторов приведены простые достаточные условия глобальной устойчивости нулевого решения разностного уравнения $x_{n+1} = qx_n + f_n(x_n, \ldots$ $\ldots, x_{n-k})$, $n \in \mathbb{Z}$, где нелинейные функции f_n удовлетворяют условию Йорка. Для каждого натурального k интервал $(0, 1]$ представлен как объединение $[(2k+2)/3]$ подынтервалов, и для q с каждого подынтервала в явном виде приведено условие глобальной устойчивости. Полученные условия являются точными для класса уравнений, удовлетворяющих условию Йорка.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} = qx_n + f_n(x_n, \ldots, x_{n-k}), \quad x_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q \in (0, 1]$, $k \geq 1$, і нелінійні функції $f_n \colon \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ задовольняють наступну умову Йорка: існує $a < 0$ таке, що

$$a\mathcal{M}(\phi) \leq f_n(\phi) \leq -a\mathcal{M}(-\phi), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

для всіх $\phi \in \mathbb{R}^{k+1}$. Функціонал $\mathcal{M} : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}_+$ означається як $\mathcal{M}(\phi) = \max_i \{0, \phi_i\}$.

Розв'язок $\{x_n\}$ рівняння (1) з початковою умовою $x_i = \varphi_i$, $i = -k, \ldots, 0$, існує для всіх $n \geq 0$ і може бути однозначно побудований послідовно.

Як випливає з (2), точка $x = 0$ є єдиною нерухомою точкою рівняння (1).

Рівняння (1) з різними видами нелінійностей мають численні застосування в математичній біології як дискретні моделі еволюції біологічних популяцій (див., наприклад, [1 – 7]). Важливим є дослідження умов стійкості нерухомої точки математичної моделі й оцінка області притягання цієї точки, зокрема особливо цікавим та зручним для застосувань є випадок глобальної стійкості нерухомої точки. Цій задачі присвячено багато досліджень (див., наприклад, [8 – 15]).

У даній роботі ми покажемо, що для кожного натурального k інтервал $(0, 1]$ зміни параметра q можна розбити на декілька підінтервалів і для значень q з кожного підінтервалу вказати просту достатню умову глобальної стійкості нульового розв'язку рівняння (1), причому ці умови є точними для класу рівнянь (1), які задовольняють умову (2).

У роботах авторів [16 – 18] отримано наступні умови глобальної стійкості нульового розв'язку рівняння (1).

Теорема 1. *Припустимо, що* $q^{k+1}(q + \ldots + q^k) < 1$ *і функції* f_n *задовольняють умову* (2). *Тоді рівняння* (1) *є глобально асимптотично стійким для кожної трійки параметрів* (a, q, k), *які задовольняють умову*

---

* Частково підтримано Фондом фундаментальних досліджень України (грант 14.1/007 (В. І Ткаченко)) та Fondecyt, Чилі (гранти 1071053 (С. І Трофимчук) та 7070091 (В. І Ткаченко)).

$$\frac{a}{1-q} > -\frac{1+q^{k+1}}{1-q^{k+1}}. \tag{3}$$

Це означає, що існують $\lambda \in (0, 1)$ *і* $\Gamma > 0$ *такі, що*

$$\max_{j=n-k,n} |x_j| \leq \Gamma\lambda^{n-s} \max_{j=s-k,s} |x_j|, \quad n \geq s, \tag{4}$$

для кожного розв'язку $\{x_n\}$ *рівняння* (1). *Умова* (3) *є точною для класу рівнянь* (1), *які задовольняють нерівність* $q^{k+1}(q + \ldots + q^k) < 1$ *та умову* (2).

Теорема 2. *Нехай* $q \in (0, 1)$ *і функції* f_n *задовольняють умову* (2). *Тоді кожний розв'язок* $\{x_n\}$ *рівняння* (1) *прямує до* 0 *і задовольняє нерівність* (4), *якщо*

$$\Theta(k, q, a) = \max_{s=0,\ldots,k} \Omega(s, k, q, a) > -1, \tag{5}$$

де

$$\Omega(s, k, q, a) = q^{k+s+1} + aq^s\left(s + \frac{1-q^{k+1}}{1-q}\right) + a^2\frac{1+q^s(sq-s-1)}{(1-q)^2}.$$

Умова (5) *є точною для класу рівнянь* (1), *які задовольняють умову Йорка* (2): *для кожних значень параметрів* a, k *і* q, *які не задовольняють умову* (5), *існує рівняння* (1), *яке не є глобально стійким.*

Теорема 3. *Нехай* $q = 1$, *функції* f_n *задовольняють умову* (2) *і*

$$\sum_j f_j(z_j, \ldots, z_{j-k}) = \infty \tag{6}$$

для кожної послідовності $\{z_m\}$, *яка має ненульову границю на нескінченності. Тоді кожен розв'язок* $\{x_n\}$ *рівняння* (1) *прямує до нуля, якщо*

$$a \geq \max_{j=1,2} g(k, \tau_j) = \max_{j=1,2} \frac{-4}{k + \tau_j + 1 + \sqrt{(k+\tau_j+1)^2 - 4\tau_j(\tau_j+1)}}, \tag{7}$$

де τ_1 — *ціла частина числа* $\frac{1}{3}\left(k - 1 + \sqrt{k^2 + k + 1}\right)$, *а* $\tau_2 = \tau_1 + 1$.

Умова (5) хоч і конструктивна, але громіздка і не дає уявлення про геометричну структуру області параметрів стійкості. Бажано отримати умову типу (3) та (7) не тільки для малих q чи $q = 1$, а і для всіх $q \in (0,1]$. В даній роботі ми розв'язуємо цю задачу.

Спочатку введемо деякі позначення.

Для $q \in (0, 1)$, натурального k та цілого s, $0 \leq s \leq k$, означимо функцію

$$\omega(s, k, q) = \frac{q^{2k+2} - q^{2k+s+3} - q^{k+s+2}(1-q)(s+1)}{(s+1)^2(1-q)^2}. \tag{8}$$

При $q = 1$ покладемо

$$\omega(s, k, 1) = \frac{s-2k}{2(s+1)}$$

як границю правої частини (8) при $q \to 1$.

Легко перевірити, що

$$\omega(s, k, q) = \Omega\left(s, k, q, -\frac{q^{k+1}}{s+1}\right) = \Omega\left(s+1, k, q, -\frac{q^{k+1}}{s+1}\right).$$

За доведеною нижче лемою 1 при $0 \le s \le s_k = [(2k-2)/3]$ ($[\cdot]$ — ціла частина числа) рівняння $\omega(s,k,q) = -1$ має єдиний розв'язок $q = q_s^*(k) \in (0,1]$. При $s > [(2k-2)/3]$ завжди $\omega(s,k,q) > -1$.

Позначимо через $a_j(k,q)$, $j = 1,\ldots,k$, правий корінь квадратного відносно a рівняння $\Omega(j,k,q,a) = -1$. Відповідно $a_0(k,q)$ — єдиний розв'язок лінійного рівняння $\Omega(0,k,q,a) = -1$.

Тепер ми можемо сформулювати основний результат роботи.

Теорема 4. *Нехай* $q \in (0,1)$ *і функції* f_n *задовольняють умову Йорка* (2). *Тоді для прямування кожного розв'язку* $\{x_n\}$ *рівняння* (1) *до* 0 *та виконання нерівності* (4) *достатніми є наступні умови*:

0) $a \in (a_0(k,q),0)$, *якщо* $q \in \left(0, q_0^*(k)\right]$;

j) $a \in \left(a_j(k,q),0\right)$, *якщо* $q \in \left[q_{j-1}^*(k), q_j^*(k)\right]$, $1 \le j \le s_k$;

$s_k + 1$) $a \in \left(a_{s_k+1}(k,q),0\right)$, *якщо* $q \in \left[q_{s_k}^*(k),1\right)$.

Якщо $q = 1$ *і виконуються умови* (2) *та* (6), *то для прямування до нуля кожного розв'язку рівняння* (1) *достатньо виконання наступної умови*: $a \in (\bar{a}_k, 0)$, *де* $\bar{a}_k$ — *правий корінь квадратного рівняння*

$$a^2(s_k+1)(s_k+2) + 2a(s_k+k+2) + 4 = 0.$$

Наведені умови є точними при відповідних значеннях q *для класу рівнянь* (1), *які задовольняють умови* (2).

***Зауваження* 1**. Легко перевірити, що $q_0^*(k)$ — єдиний додатний корінь рівняння $q^{k+1}(q+\ldots+q^k) = 1$, а $\Omega(0,k,q,a) = q^{k+1} + a(1-q^{k+1})/(1-q)$, тому умова $a \in \left(a_0(k,q),0\right)$ набуває вигляду (3). Отже, умова 0) теореми 4 еквівалентна умові (3) теореми 1.

***Зауваження* 2**. В кінці статті ми доведемо, що умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ глобальної стійкості рівняння (1) при $q = 1$ еквівалентна умові (7) теореми 3.

Використовуючи явний вигляд виразів $\omega(s,k,q)$ та $\Omega(s,k,q,a)$, можна обчислити конкретні значення $q_s^*(k)$ і для фіксованих k та q вказати оптимальні умови глобальної стійкості рівняння (1). Наведемо для прикладу значення $q_s^*(k)$ для $k = 4$: $q_0^*(4) = 0{,}8288$, $q_1^*(4) = 0{,}9344$, $q_2^*(4) = 1$.

Тому достатніми умовами глобальної стійкості рівняння (1) при $k = 4$ є такі:

$a \in (a_0(4,q),0)$, якщо $q \in (0;0{,}8288]$, де $a_0(4,q) = -(1+q^5)/(1+q+q^2+q^3+q^4)$;

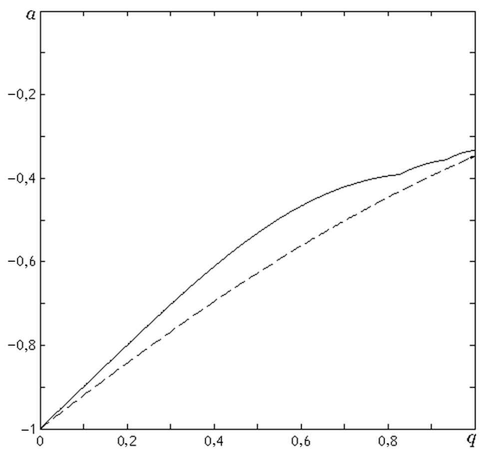
$a \in (a_1(4,q),0)$, якщо $q \in [0{,}8288;0{,}9344]$, де $a_1(4,q)$ — правий корінь квадратного рівняння $a^2 + a(2q+q^2+q^3+q^4+q^5) + q^6 + 1 = 0$;

$a \in (a_2(4,q),0)$, якщо $q \in [0{,}9344;1]$, де $a_2(4,q)$ — правий корінь квадратного рівняння $a^2(2q+1) + a(3q^2+q^3+q^4+q^5+q^6) + q^7 + 1 = 0$;

$a \in (-1/3, 0)$, якщо $q = 1$. Число $-1/3$ є правим коренем квадратного рівняння $3a^2 + 4a + 2 = 0$. Відмітимо також, що $a_2(4,1) = -1/3$.

На рисунку в координатах (q,a) суцільною кривою показано функції $a_0(4,q)$, $a_1(4,q)$ та $a_2(4,q)$, а точки над цією лінією задають область глобальної стійкості рівняння $x_{n+1} = qx_n + f_n(x_n, x_{n-1},\ldots,x_{n-4})$. Для порівняння область над штриховою кривою є областю локальної стійкості нульового розв'язку рівняння.

У роботі [18] умову 0) теореми 4 було доведено для $q \in \left(0, q_0(k)\right]$ з деяким $q_0(k) < q_0^*(k)$ для рівнянь (1) з сильно нелінійними функціоналами f_n, які задовольняють узагальнену умову Йорка



Області глобальної та локальної стійкості в координатах (q, a).

$$\frac{a\mathcal{M}(\phi)}{1+b\mathcal{M}(\phi)} \ \le\ f_n(\phi)\ \le\ \frac{-a\mathcal{M}(-\phi)}{1-b\mathcal{M}(-\phi)}, \qquad b>0, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{9}$$

для всіх $\phi \in \mathbb{R}^{k+1}$ таких, що $\min_j \phi_j > -b^{-1} \in (-\infty, 0)$.

Гіпотеза. *Теорема* 4 *є справедливою для сильно нелінійних рівнянь* (1), *які задовольняють умову* (9).

Лема 1. *Функція* $\omega(s,k,q)$ *є строго монотонно спадною по* q *та строго монотонно зростаючою по* s.

Доведення. Виконаємо перетворення

$$\omega(s,k,q) \ =\ \frac{q^{2k+2}-q^{2k+s+3}-q^{k+s+2}(1-q)(s+1)}{(s+1)^2(1-q)^2}\ =$$

$$=\ \frac{q^{k+s+2}}{(s+1)^2(1-q)}\Big(q^{k-s}+q^{2k-s+3}+\ldots+q^{k-1}+q^k-(s+1)\Big)\ =$$

$$=\ -\frac{q^{k+s+2}}{(s+1)^2}\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{k-i-1}q^j. \tag{10}$$

З (10) видно, що $\partial\omega(s,k,q)/\partial q < 0,\ q>0$.

Тепер покажемо, що функція $\omega(s,k,q)$ є монотонно зростаючою по s:

$$\omega(s+1,k,q)\ >\ \omega(s,k,q), \quad s=0,\ldots,k-1. \tag{11}$$

Дійсно, розглядаючи s як неперервний аргумент та враховуючи нерівність $-\ln q/(1-q)>1$, для $q\in(0,1)$ отримуємо

$$\frac{\partial\omega(s,k,q)}{\partial s}\ =\ \frac{-\ln q}{(1-q)}\left(\frac{q^{k+s+2}}{s+1}+\frac{q^{2k+s+3}}{(s+1)^2(1-q)}\right)+$$

$$+\ \frac{q^{k+s+2}}{(s+1)^2(1-q)}-\frac{2q^{2k+2}(1-q^{s+1})}{(s+1)^3(1-q)^2}\ >\ \frac{q^{k+2}}{(s+1)^2(1-q)}\ \times$$

$$\times\ \left(q^s(s+1)(1-q)+q^s+q^k\left(q^{s+1}-\frac{2(1-q^{s+1})}{(s+1)(1-q)}\right)\right)\ \ge$$

$$\ge\ \frac{q^{k+2}}{(s+1)^2(1-q)}\left(q^s(s+1)(1-q)+q^s+q^s\left(q^{s+1}-\frac{2(1-q^{s+1})}{(s+1)(1-q)}\right)\right)\ =$$

$$= \frac{q^{k+s+2}}{(s+1)^2(1-q)}\left((s+1)(1-q)+q^{s+1}+1-\frac{2(1-q^{s+1})}{(s+1)(1-q)}\right) \geq$$

$$\geq \frac{q^{k+s+2}}{(s+1)^2(1-q)}\left((s+1)(1-q)+q^{s+1}-1\right) \geq 0$$

для $s \geq 0,\ q \in (0, 1)$. Ми використали нерівності

$$q^{s+1}(s+1)(1-q) < 1-q^{s+1} < (s+1)(1-q)$$

для $s > 0,\ q \in (0, 1)$.

Лему доведено.

***Доведення теореми* 4**. При $k = 1$ формули в теоремі набирають простого вигляду $s_1 = 0$, $\omega(0,1,q) = -q^3$, $q_0^*(1) = 1$, $\Omega(0,1,q,a) = q^2 + a(1+q)$, $a_0(1,q) = -(q^2+1)/(q+1)$. Умова глобальної стійкості $a \in (a_0(1,q), 0)$ при $q \in \in (0,1]$ є безпосереднім наслідком теореми 1.

Далі розглядаємо випадок $k \geq 2$.

Розіб'ємо доведення на кілька кроків.

1. Дослідимо функцію $\Omega(t,k,q,a)$. Розглянемо різницю

$$R(t+1,k,q,a) = \Omega(t+1,k,q,a) - \Omega(t,k,q,a) =$$

$$= \left(q^{k+1}(q-1) + a(q^{k+1}+(t+1)(q-1)) + a^2(1+t)\right)q^t.$$

Легко перевірити, що $R(t+1,k,q,-q^{k+1}/(t+1)) = 0$ і

$$\left.\frac{\partial R(t+1,k,q,a)}{\partial a}\right|_{a=-q^{k+1}/(t+1)} < 0.$$

Тому $\Omega(t+1,k,q,a) > \Omega(t,k,q,a)$, якщо $a < -q^{k+1}/(t+1)$, і $\Omega(t+1,k,q,a) < < \Omega(t,k,q,a)$, якщо $a \in \left(-q^{k+1}/(t+1), 0\right)$.

Нехай $-q^{k+1}/s < a < -q^{k+1}/(s+1)$, $1 \leq s \leq k-1$. Тоді

$$\begin{gathered}\Omega(k,k,q,a) > \ldots > \Omega(s+1,k,q,a) > \Omega(s,k,q,a),\\ \Omega(s,k,q,a) < \Omega(s-1,k,q,a) < \ldots < \Omega(0,k,q,a).\end{gathered} \tag{12}$$

Отже, при $-q^{k+1}/s < a < -q^{k+1}/(s+1)$ мінімум у (5) досягається на $\Omega(s,k,q,a)$, тобто $\Theta(k,q,a) = \Omega(s,k,q,a)$.

При $a = -q^{k+1}/(s+1)$ отримуємо

$$\ldots > \Omega(s+2,k,q,a) > \Omega(s+1,k,q,a) = \Omega(s,k,q,a) < \Omega(s-1,k,q,a) < \ldots .$$

Відповідно, при $a < -q^{k+1}$

$$\Omega(k,k,q,a) > \ldots > \Omega(1,k,q,a) > \Omega(0,k,q,a), \tag{13}$$

тобто мінімум у (5) досягається на $\Omega(0,k,q,a)$. Якщо ж $a > -q^{k+1}/k$, то

$$\Omega(k,k,q,a) < \ldots < \Omega(1,k,q,a) < \Omega(0,k,q,a). \tag{14}$$

2. Доведемо, що $\partial\Omega(s,k,q,a)/\partial a > 0$ при $a \geq -q^{k+1}/s$, $s \geq 1$, $q \in (0, 1)$:

$$\frac{\partial\Omega(s,k,q,a)}{\partial a} = q^s\left(s+\frac{1-q^{k+1}}{1-q}\right) + 2a\frac{1-q^s+sq^s(q-1)}{(1-q)^2} \geq$$

$$\geq q^s\left(s+\frac{1-q^{k+1}}{1-q}\right) - \frac{2q^{k+1}\left(1-q^s+sq^s(q-1)\right)}{s(1-q)^2} =$$

$$= q^s(s+1+q+\ldots+q^k) - \frac{2q^{k+1}}{s(1-q)}(1-q^s+q-q^s+\ldots+q^{s-1}-q^s) >$$

$$> q^s(s+1+q+\ldots+q^k) - q^{k+1}(s+1) > 0.$$

Тому при $-q^{k+1}/s < a < -q^{k+1}/(s+1)$

$$\omega(s-1,k,q) = \Omega(s,k,q,-q^{k+1}/s) < \Omega(s,k,q,a) <$$
$$< \Omega\big(s,k,q,-q^{k+1}/(s+1)\big) = \omega(s,k,q). \tag{15}$$

3. Нехай $q < q_0^*(k)$. Тоді $\Omega\big(0,k,q,-q^{k+1}\big) = \omega(0,k,q) > -1$. Якщо $a \in \in \big[-q^{k+1}/t, -q^{k+1}/(t+1)\big)$, $1 \le t \le k-1$, то за формулами (12), (15) отримуємо

$$\Omega(j,k,q,a) \ge \Omega(t,k,q,a) \ge \Omega\big(t,k,q,-q^{k+1}/t\big) = \omega(t-1,k,q) \ge$$
$$\ge \omega(0,k,q) > \omega\big(0,k,q_0^*(k)\big) = -1, \quad j = 0,\ldots,k.$$

Якщо $a \ge -q^{k+1}/k$, то за нерівностями (14) для $j = 0,1,\ldots,k$ виконується

$$\Omega(j,k,q,a) \ge \Omega(k,k,q,a) \ge \Omega\big(k,k,q,-q^{k+1}/k\big) = \omega(k-1,k,q) > -1.$$

Отже, при $a \ge -q^{k+1}$ виконується умова (5), а при $a < -q^{k+1}$ з урахуванням (13) виконання умови (5) еквівалентне виконанню нерівності $\Omega(0,k,q,a) > -1$.

4. Припустимо, що $q_s^*(k) \le q < q_{s+1}^*(k)$, $s \ge 0$.

Якщо $a \in \big[-q^{k+1}, -q^{k+1}/(s+1)\big)$, а саме $a \in \big[-q^{k+1}/j, -q^{k+1}/(j+1)\big)$, $1 \le j \le \le s$, на підставі (15) та леми 1

$$\Omega(j,k,q,a) < \Omega\left(j,k,q,\frac{-q^{k+1}}{j+1}\right) = \omega(j,k,q) \le \omega(s,k,q) \le$$
$$\le \omega\big(s,k,q_s^*(k)\big) = -1.$$

Якщо $a < -q^{k+1}$, то

$$\Omega(0,k,q,a) = -q^{k+1} + a(1-q^{k+1})/(1-q) < \omega(0,k,q) < \omega\big(0,k,q_0^*(k)\big) = -1.$$

Тому в цьому випадку $\Theta(k,q,a) < -1$, тобто a не може бути меншим за $-q^{k+1}/(s+1)$.

Якщо $-q^{k+1}/(s+1) \le a < -q^{k+1}/(s+2)$, то за нерівностями (12)

$$\ldots > \Omega(s-1,k,q,a) > \Omega(s,k,q,a) \ge \Omega(s+1,k,q,a),$$
$$\Omega(s+1,k,q,a) < \Omega(s+2,k,q,a) < \ldots .$$

Найменше значення набувається на $\Omega(s+1,k,q,a)$, тобто $\Theta(k,q,a) = = \Omega(s+1,k,q,a)$. Відмітимо, що

$$\Omega\left(s+1,k,q,\frac{-q^{k+1}}{s+1}\right) = \omega(s,k,q) \le \omega\big(s,k,q_s^*(k)\big) = -1,$$

$$\Omega\left(s+1,k,q,\frac{-q^{k+1}}{s+2}\right) = \omega(s+1,k,q) > \omega\big(s+1,k,q_{s+1}^*(k)\big) = -1$$

і $\partial\Omega(s+1,k,q,a)/\partial a > 0$ при $a \ge -q^{k+1}/(s+1)$. Тому квадратне відносно a рівняння $\Omega(s+1,k,q,a) = -1$ має точно один корінь на інтервалі

$\left[-q^{k+1}/(s+1),\ -q^{k+1}/(s+2)\right)$. Другий корінь цього рівняння лежить лівіше точки $-q^{k+1}/(s+1)$.

Нарешті, якщо $-q^{k+1}/(s+2) \le a < -q^{k+1}/k$, а саме $-q^{k+1}/j \le a < -q^{k+1}/(j+1)$ для деякого $k-1 \ge j \ge s+2$, то за співвідношеннями (15) та лемою 1

$$\Omega(j,k,q,a) \ \ge\ \Omega(j,k,q,-q^{k+1}/j) \ =\ \omega(j-1,k,q) \ >\ \omega(s+1,k,q) \ \ge$$
$$\ge\ \omega\left(s+1,k,q^*_{s+1}(k)\right) \ =\ -1.$$

Враховуючи (12), отримуємо $\Theta(k,q,a) > -1$.

Якщо ж $a \ge -q^{k+1}/k$, то для всіх $j = 0, 1, \ldots, k$

$$\Omega(j,k,q,a) \ \ge\ \Omega(k,k,q,a) \ \ge\ \Omega\left(k,k,q,\frac{-q^{k+1}}{k}\right) \ =\ \omega(k-1,k,q) \ >\ -1.$$

Отже, при $a \in \left[-q^{k+1}/(s+1,0\right)$ завжди $\Theta(k,q,a) > -1$.

Теорему доведено.

Доведення зауваження 2. Покладемо $\Omega(s,k,1,a) = a^2 s(s+1)/2 + (k+s+1)a + 1$ як границю $\lim_{q\to 1}\Omega(s,k,q,a)$. Легко перевірити, що нерівність $\Omega(s,k,1,a) > -1$ еквівалентна нерівності $a > g(k,s)$, де $g(k,s)$ означено в (7).

Щоб перевірити, що умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ теореми 4 еквівалентна умові (7) теореми 3, досить показати, що $\max_{j=1,2} g(k,\tau_j) = g(k, s_k+1)$. Для означених раніше чисел

$$s_k \ =\ \left[\frac{2}{3}(k-1)\right], \qquad \tau_1 \ =\ \tau_1(k) \ =\ \left[\frac{1}{3}\left(k-1+\sqrt{k^2+k+1}\right)\right],$$
$$\tau_2 \ =\ \tau_2(k) \ =\ \tau_1 + 1$$

розглянемо три випадки.

1. Візьмемо всі числа $k = 3l+1$, $l = 0, 1, \ldots$, тоді $s_k = \left[\frac{2}{3}(k-1)\right] = 2l$, а

$$\tau_1 \ =\ \left[\frac{1}{3}\left(3l+\sqrt{9l^2+9l+3}\right)\right] \ =\ \left[l+\sqrt{l^2+l+\frac{1}{3}}\right] \ =\ l \ +\ \left[\sqrt{l^2+l+\frac{1}{3}}\right] \ =\ 2l.$$

Відповідно $\tau_2 = 2l+1$ і $g(3l+1,\tau_1) = g(3l+1,\tau_2)$. Тому умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ еквівалентна нерівності $a > \max_j g(3l+1,\tau_j) = g(3l+1, s_k+1)$.

2. Візьмемо числа $k = 3l+2$, $l = 0, 1, \ldots$, тоді $s_k = [2l+2/3] = 2l$,

$$\tau_1 \ =\ l \ +\ \left[\frac{1}{3}+\sqrt{l^2+\frac{15}{9}l+\frac{7}{9}}\right] \ =\ 2l+1,$$

оскільки

$$l+1 \ \le\ \frac{1}{3} \ +\ \sqrt{l^2+\frac{15}{9}l+\frac{7}{9}} \ <\ l \ +\ 2.$$

У цьому випадку $s_k + 1 = \tau_1(k) = 2l+1$ і

$$g(k,\tau_1) \ =\ \frac{-4}{5l+4+\sqrt{9l^2+16l+8}} \ >\ g(k,\tau_2) \ =\ \frac{-4}{5l+5+\sqrt{9l^2+10l+1}}.$$

Тому умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ еквівалентна нерівності $a > \max_j g(3l+2,\tau_j) = g(3l+2, s_k+1)$.

3. Візьмемо всі числа $k = 3l+3$, тоді $s_k = [2l+4/3] = 2l+1$,

$$\tau_1 \ =\ l \ +\ \left[\frac{2}{3}+\sqrt{l^2+\frac{7}{3}l+\frac{13}{9}}\right] \ =\ 2l+1,$$

оскільки

$$l+1 \le \frac{2}{3} + \sqrt{l^2 + \frac{7}{3}l + \frac{13}{9}} < l + 2.$$

У цьому випадку $s_k + 1 = \tau_2(k) = 2l + 2$ і

$$g(k, \tau_1) = \frac{-4}{5l + 5 + \sqrt{9l^2 + 26l + 17}} < g(k, \tau_2) = \frac{-4}{5l + 6 + \sqrt{9l^2 + 20l + 12}}.$$

Тому умова $a \in (\bar{a}_k, 0)$ еквівалентна нерівності $a > \max_j g(3l + 3, \tau_j) = g(3l + 3, s_k + 1)$.

Твердження доведено.

1. *Botsford L. W.* Further analysis of Clark's delayed recruitment model // Bull. Math. Biol. – 1992. – **54**. – P. 275 – 293.
2. *Clark C. W.* A delayed recruitment model of population dynamics with an application to baleen whale populations // J. Math. Biol. – 1976. – **3**. – P. 381 – 391.
3. *El-Morshedy H. A., Liz E.* Globally attracting fixed points in higher order discrete population models // Ibid. – 2006. – **53**. – P. 365 – 384.
4. *Gurney W. S. C., Nisbet R. M.* Ecological dynamics. – Oxford Univ. Press, 1998. – 352 p.
5. *Kocic V. L., Ladas G.* Global asymptotic behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. – Dordrecht: Kluwer Acad., 1993. – 228 p.
6. *Liz E., Tkachenko V., Trofimchuk S.* Global stability in discrete population models with delayed-density dependence // Math. Biosci. – 2006. – **199**. – P. 26 – 37.
7. *Thieme H. R.* Mathematics in population biology. – Princeton: Princeton Univ. Press, 2003. – 543 p.
8. *Berezansky L., Braverman E., Liz E.* Sufficient conditions for the global stability of nonautonomous higher order difference equations // J. Different. Equat. and Appl. – 2005. – **11**. – P. 785 – 798.
9. *Ivanov A. F.* On global stability in a nonlinear discrete model // Nonlinear Anal. – 1994. – **23**. – P. 1383 – 1389.
10. *Li X.* Global attractivity in a genotype selection model // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2002. – **29**, № 9. – P. 537 – 544.
11. *Matsunaga H., Hara T., Sakata S.* Global attractivity for a nonlinear difference equation with variable delay // Comput. Math. and Appl. – 2001. – **41**. – P. 543 – 551.
12. *Graef J. R., Qian C.* Global attractivity of the equilibrium of a nonlinear difference equation // Czech. Math. J. – 2002. – **52**. – P. 757 – 769.
13. *Cull P., Chaffee J.* Stability in discrete population models // Amer. Inst. Phys. Conf. Proc. – 2000. – **517**. – P. 263 – 276.
14. *Levin S. A., May R. M.* A note on difference-delay equations // Theor. Populat. Biol. – 1976. – **9**. – P. 178 – 187.
15. *Muroya Y., Ishiwata E., Guglielmi N.* Global stability for nonlinear difference equations with variable coefficients // J. Math. Anal. and Appl. – 2007. – **334**. – P. 232 – 247.
16. *Nenya O., Tkachenko V., Trofimchuk S.* On the global stability of the nonlinear difference equation // Nonlinear Oscillations. – 2004. – **7**, № 4. – P. 473 – 480.
17. *Неня О. І.* Про глобальну стійкість одного нелінійного різницевого рівняння // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 4. – С. 525 – 534.
18. *Tkachenko V., Trofimchuk S.* Global stability in difference equations satisfying the generalized Yorke condition // J. Math. Anal. and Appl. – 2005. – **303**. – P. 173 – 187.

Одержано 02.10.07