УДК 517.977, 531.39

А. Л. Зуев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ТРАЕКТОРИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – БЕРНУЛЛИ С УПРАВЛЕНИЕМ*

We study the differential equation in a Hilbert space that describes oscillations of the Euler – Bernoulli elastic beam with a feedback control. Relative compactness of the positive semitrajectories of the considered equation is proved. With the use of construction of a Lyapunov functional in the explicit form and the invariance principle, representations of the limit sets are obtained.

Досліджується диференціальне рівняння у гільбертовому просторі, що описує коливання пружної балки Ейлера – Бернуллі з керуванням у вигляді зворотного зв'язку. Доведено відносну компактність додатних напівтраєкторій розглянутого рівняння. Отримано зображення граничних множин за допомогою побудови функціонала Ляпунова в явному вигляді та принципу інваріантності.

1. Введение. Исследованию систем дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах с использованием управления в виде обратной связи посвящен ряд работ отечественных и зарубежных авторов [1 – 6]. Одним из наиболее эффективных подходов в этой области является прямой метод Ляпунова, который позволяет исследовать асимптотические свойства решений (сильную устойчивость, частичную устойчивость и стабилизируемость) для линейных и нелинейных систем [5, 7]. В работах [5, 8] построены функционалы Ляпунова в явном виде для нелинейных систем дифференциальных уравнений, описывающих управляемые колебания балки Эйлера – Бернулли. В указанных работах также найдены функционалы управления с обратной связью, которые решают задачи сильной стабилизации и частичной стабилизации положения равновесия.

Следует отметить, что в известных публикациях по управлению бесконечномерными моделями Эйлера – Бернулли рассматриваются только балки со свободным концом или точечной массой на конце (соответствующие ссылки приведены в [5, 8, 9]). Уравнения движения более сложной механической системы, состоящей из нескольких упругих балок и твердых тел, были получены в работе автора [10]. Для частного случая этой системы в статье [11] исследованы линеаризованные уравнения движения в окрестности положения равновесия с учетом действия силы тяжести и движения твердого тела, прикрепленного к концу балки. Там же установлена корректность абстрактной задачи Коши для соответствующего уравнения Эйлера – Бернулли и доказана неасимптотическая устойчивость тривиального решения системы с управлением в виде обратной связи. Поскольку в [11] производная функционала Ляпунова не является определенно-отрицательной, вопрос о существовании предельных точек решений при $t \to +\infty$ требует отдельного рассмотрения. Исследованию этого вопроса посвящена данная статья.

2. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Рассмотрим линейное пространство

$$X = \left\{(\eta, \zeta, \phi, \omega, p, q)^T : \eta \in H^2(0,l),\ \zeta \in L_2(0,l),\ \eta(0) = \eta'(0) = 0,\ \phi, \omega, p, q \in \mathbb{R}\right\},$$

где $H^k(0,l)$ — пространство Соболева функций из $L_2(0,l)$, имеющих все обобщенные производные до порядка k включительно из $L_2(0,l)$. Для элементов

* Поддержана грантом Президента Украины для молодых ученых.

$$\xi_1 = (\eta_1, \zeta_1, \phi_1, \omega_1, p_1, q_1)^T \in X, \qquad \xi_2 = (\eta_2, \zeta_2, \phi_2, \omega_2, p_2, q_2)^T \in X$$

определим скалярное произведение формулой

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_X = \int_0^l \big(\eta_1''(x)\eta_2''(x) + \zeta_1(x)\zeta_2(x)\big)dx + \phi_1\phi_2 + \omega_1\omega_2 + p_1p_2 + q_1q_2 .$$

Используя неравенство Коши – Буняковского, легко проверить, что для любой функции $\eta \in H^1(0,l)$ в случае $\eta(0) = 0$ справедливо неравенство Фридрихса – Виртингера следующего вида:

$$\|\eta\|^2_{L_2(0,l)} = \int_0^l \eta^2(x)\,dx = \int_0^l \left(\int_0^x \eta'(s)\,dx\right)^2 dx \le \int_0^l \left(\int_0^x ds \cdot \int_0^x \eta'^2(s)\,ds\right)^2 dx =$$

$$= \int_0^l \left(\eta'^2(s)\int_s^l x\,dx\right)ds \le \frac{l^2}{2}\int_0^l \eta'^2(s)\,ds = \frac{l^2}{2}\|\eta'\|^2_{L_2(0,l)}. \tag{1}$$

Аналогично, при $\eta \in H^2(0,l)$, $\eta'(0) = 0$ получаем

$$\|\eta'\|^2_{L_2(0,l)} \le \frac{l^2}{2}\|\eta''\|^2_{L_2(0,l)}. \tag{2}$$

Из (1), (2) для любой функции $\eta \in H^2(0,l)$, $\eta(0) = \eta'(0) = 0$, следует оценка

$$\|\eta\|_{H^2(0,l)} = \left(\|\eta\|^2_{L_2(0,l)} + \|\eta'\|^2_{L_2(0,l)} + \|\eta''\|^2_{L_2(0,l)}\right)^{1/2} \le \left(\frac{l^4}{4} + \frac{l^2}{2} + 1\right)^{1/2} \|\eta''\|_{L_2(0,l)}.$$

Отсюда легко видеть, что норма $\|\xi\|_X = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_X}$ эквивалентна стандартной норме в линейном подпространстве X гильбертова пространства $H^2(0,l) \times \times L_2(0,l) \times \mathbb{R}^4$, следовательно, $(X, \|\cdot\|_X)$ — гильбертово пространство.

Пусть задано линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu, \tag{3}$$

где $\xi = \xi(t) \in X$ — фазовый вектор, $u \in \mathbb{R}$ — управление, точка обозначает производную по времени t. Определим линейный неограниченный оператор $A : D(A) \to X$, элемент $B \in X$ и управление с обратной связью $u = h(\xi)$ следующим образом [11]:

$$A : \xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ \phi \\ \omega \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ -\frac{1}{\rho}(c\eta'')'' + \gamma\phi \\ \omega \\ 0 \\ \gamma\phi + \frac{1}{m}(c\eta'')'\Big|_{x=l} \\ -\frac{c}{J}\eta''\Big|_{x=l} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \\ 1 \\ \psi(l) \\ \psi'(l) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$h(\xi) = -\frac{1}{\beta}\left\{k\omega + \left(\alpha - \gamma\left(\int_0^l \rho\psi\,dx + m\psi(l)\right)\right)\phi \; + \right.$$

$$\left. + \int_0^l c\eta''\psi''\,dx + (c\eta''\psi' - (c\eta'')'\psi)\big|_{x=0} - \gamma\left(\int_0^l \rho\eta\,dx + m\eta(l)\right)\right\}, \tag{5}$$

где
$$D(A) = \left\{\xi \in X :\ \eta \in H^4(0,l),\ \zeta \in H^2(0,l),\ \zeta(0) = \zeta'(0) = 0,\ p = \zeta(l),\ q = \zeta'(l)\right\}. \tag{6}$$

Будем предполагать, что γ — константа, α, β, c, ρ, m, J — положительные константы, $\psi(x)$ — функция класса $C^2[0,l]$. Пояснения относительно физического смысла компонент фазового вектора и коэффициентов системы (3) содержатся в работе [11].

Обозначим через
$$\tilde{A} :\ \xi \mapsto A\xi + Bh(\xi)$$
линейный оператор, в котором A, B, $u = h(\xi)$ заданы формулами (4), (5). Легко видеть, что $D(\tilde{A}) = D(A)$, поскольку $h(\xi)$ в формуле (5) определено при всех $\xi \in D(A)$. При достаточно больших α и β в работе [11] показано, что линейный неограниченный оператор $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \to X$ является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы линейных операторов $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t\geq 0}$ в X, т. е. любое обобщенное решение $\xi(t)$ абстрактной задачи Коши для уравнения (3) с $u = h(\xi)$ и начальными условиями
$$\xi(0) = \xi_0 \in X \tag{7}$$
записывается в виде
$$\xi(t) = e^{t\tilde{A}}\xi_0, \qquad t \geq 0.$$
Там же доказано, что решение $\xi = 0$ системы (3) с управлением в виде обратной связи $u = h(\xi)$ сильно устойчиво по Ляпунову, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что любое решение задачи (3), (5), (7) обладает свойством
$$\|\xi_0\|_X < \delta \ \Rightarrow\ \|\xi(t)\|_X < \varepsilon \qquad \forall t \geq 0.$$

Доказательство устойчивости в работе [11] основано на использовании функционала Ляпунова следующего вида:
$$2V(\xi) = \alpha\phi^2 + \beta\omega^2 + \int_0^l \left\{(\zeta - \psi\omega)^2\rho + \eta''^2 c\right\}dx + m\{p - \psi(l)\omega\}^2 +$$
$$+ J\{q - \psi'(l)\omega\}^2 - 2\gamma\phi\left\{\int_0^l \eta\rho\,dx + m\eta(l)\right\}, \tag{8}$$
при этом показано, что полугруппа $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t\geq 0}$ является сжимающей в пространстве X с нормой
$$\|\xi\|_V = \sqrt{V(\xi)}$$
и нормы $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_X$ эквивалентны в X, если α и β — достаточно большие константы (см. [11]).

Вычисляя производную функционала $V(\xi)$ в силу уравнения (3) с управлением $u = h(\xi)$, нетрудно проверить, что
$$\dot{V}(\xi) = -k\omega^2 \leq 0. \tag{9}$$

Неравенство (9) обеспечивает невозрастание функции $V(\xi(t))$ на решениях уравнения (3) с обратной связью $u = h(\xi)$. Поэтому возникает вопрос о возможности исследования ω-предельных множеств этого уравнения с помощью принципа инвариантности ЛаСалля [12] и соответствующей модификации теоремы Барбашина – Красовского. Как известно [7, 12 – 14], положительный ответ на этот вопрос требует доказательства предкомпактности полутраекторий в бесконечномерном пространстве X.

3. Доказательство предкомпактности траекторий. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* α *и* β *— достаточно большие константы,* $k > 0$. *Тогда любая положительная полутраектория* $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ *уравнения* (3) *с управлением* $u = h(\xi)$ *в виде обратной связи* (5) *содержится в компактном подмножестве пространства* X.

Доказательство. Рассмотрим уравнение относительно $\xi \in D(A)$ с параметрами $\lambda > 0$, $u \in \mathbb{R}$, $\tilde{\xi} \in X$:

$$A\xi + Bu - \lambda\xi = \tilde{\xi}. \tag{10}$$

Запишем это уравнение по компонентам векторов $\xi = (\eta, \zeta, \phi, \omega, p, q)^T$ и $\tilde{\xi} = (\tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}, \tilde{p}, \tilde{q})^T$:

$$\zeta(x) - \lambda\eta(x) = \tilde{\eta}(x), \quad -\frac{c}{\rho}\frac{d^4\eta(x)}{dx^4} + \gamma\phi - \lambda\zeta(x) + \psi(x)u = \tilde{\zeta}(x), \quad x \in (0, l), \tag{11}$$

$$\omega - \lambda\phi = \tilde{\phi}, \quad -\lambda\omega + u = \tilde{\omega}, \tag{12}$$

$$\gamma\phi + \frac{c}{m}\eta'''(l) - \lambda p + \psi(l)u = \tilde{p}, \quad -\frac{c}{J}\eta''(l) - \lambda q + \psi'(l)u = \tilde{q}. \tag{13}$$

Разрешая уравнения (12) относительно ϕ, ω, получаем

$$\phi = \frac{u - \tilde{\omega}}{\lambda^2} - \frac{\tilde{\phi}}{\lambda}, \quad \omega = \frac{u - \tilde{\omega}}{\lambda}. \tag{14}$$

Из первого уравнения (11) выразим

$$\zeta(x) = \tilde{\eta}(x) + \lambda\eta(x) \tag{15}$$

и подставим представления (14), (15) во второе уравнение (11). В результате получим дифференциальное уравнение относительно $\eta(x)$:

$$\frac{d^4\eta(x)}{dx^4} + \frac{\lambda^2\rho}{c}\eta(x) = f_0(x)u + f_1(x, \tilde{\xi}), \quad x \in (0, l), \tag{16}$$

где

$$f_0(x) = \frac{\rho}{c}\left(\frac{\gamma}{\lambda^2} + \psi(x)\right), \quad f_1(x, \tilde{\xi}) = -\frac{\rho}{c}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\tilde{\phi} + \frac{\gamma}{\lambda^2}\tilde{\omega} + \lambda\tilde{\eta}(x) + \tilde{\zeta}(x)\right).$$

Из свойства $\xi \in D(A)$ вытекают граничные условия

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \tag{17}$$

а также $p = \zeta(l)$, $q = \zeta'(l)$. Два последних условия с учетом (15) могут быть записаны в виде

$$p = \tilde{\eta}(l) + \lambda\eta(l), \qquad q = \tilde{\eta}'(l) + \lambda\eta'(l). \tag{18}$$

Подставляя равенства (14), (18) в (13), находим следующие граничные условия на $\eta(x)$ при $x = l$:

$$\eta'''(l) - \frac{\lambda^2 m}{c}\eta(l) = g_{10}u + g_{11}(\tilde{\xi}), \tag{19}$$

$$\eta''(l) + \frac{\lambda^2 J}{c}\eta'(l) = g_{20}u + g_{21}(\tilde{\xi}), \tag{20}$$

где

$$g_{10} = -\frac{m}{c}\left(\frac{\gamma}{\lambda^2} + \psi(l)\right), \qquad g_{11}(\tilde{\xi}) = \frac{m}{c}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\tilde{\phi} + \frac{\gamma}{\lambda^2}\tilde{\omega} + \lambda\tilde{\eta}(l) + \tilde{p}\right),$$

$$g_{20} = \frac{J\psi'(l)}{c}, \qquad g_{21}(\tilde{\xi}) = -\frac{J}{c}\left(\lambda\tilde{\eta}'(l) + \tilde{q}\right).$$

Таким образом, если $\eta \in H^4(0, l)$ — решение краевой задачи (16), (17), (19), (20) при заданных $\tilde{\xi} \in X$, λ, u, то формулы (14), (15), (18) определяют компоненты ϕ, ω, ζ, p, q решения $\xi \in D(A)$ уравнения (10). И наоборот, если $\xi \in D(A)$ — решение уравнения (10), то его компонента $\eta \in H^4(0, l)$ является решением краевой задачи (16), (17), (19), (20), а остальные компоненты ξ удовлетворяют соотношениям (14), (15), (18).

С помощью метода вариации постоянной найдем общее решение уравнения (16) при граничных условиях (17):

$$\eta(x) = \frac{1}{4\mu^3}\int_0^x \left(f_0(s)u + f_1(s, \tilde{\xi})\right)K(x-s)\,ds + C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x). \tag{21}$$

Здесь введен вспомогательный параметр $\mu > 0$ и функции $K(x)$, $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ по формулам

$$\mu = \left(\frac{\lambda^2\rho}{4c}\right)^{1/4},$$

$$K(x) = \sin\mu x\,\mathrm{ch}\,\mu x - \cos\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu s, \qquad \eta_1(x) = \sin\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu x, \tag{22}$$

$$\eta_2(x) = \cos\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu x - e^{\mu x}\sin\mu x.$$

Поскольку $K(x)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условиям

$$K(0) = K'(0) = K''(0) = K'''(0) = 0,$$

j-ю производную по x функции (21) можно представить следующим образом:

$$\eta^{(j)}(x) = \frac{1}{4\mu^3}\int_0^x \left(f_0(s)u + f_1(s, \tilde{\xi})\right)K^{(j)}(x-s)\,ds + C_1\eta_1^{(j)}(x) + C_2\eta_2^{(j)}(x), \quad j = \overline{0, 3}. \tag{23}$$

Для любых $\tilde{\xi} \in X$ и $\lambda > 0$ функции $f_0(\cdot)$ и $f_1(\cdot, \tilde{\xi})$ лежат в $L_2(0, l)$, поэтому из представлений (23) и уравнения (16) следует, что решение $\eta(x)$, определяемое формулой (21), лежит в $H^4(0,l)$ при любых значениях C_1, C_2, u.

Для исключения параметров C_1, C_2, u из решения $\eta(x)$ подставим выражения (23) в граничные условия (19), (20) и формулу для управления с обратной связью (5). В результате получим систему трех линейных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2, u:

$$W\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(\tilde{\xi}) \\ v_2(\tilde{\xi}) \\ v_3(\tilde{\xi}) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где компоненты матрицы $W = (w_{ij})$ и столбца свободных членов $v_i(\tilde{\xi})$ задаются следующими соотношениями:

$$w_{11} = -2\mu^3(\sin\mu l\,\mathrm{ch}\,\mu l - \cos\mu l\,\mathrm{sh}\,\mu l) - \frac{4\mu^4 m}{\rho}\sin\mu l\,\mathrm{sh}\,\mu l,$$

$$w_{12} = -2\mu^3\Big(e^{\mu l}(\cos\mu l - \sin\mu l) + \cos\mu l\,\mathrm{ch}\,\mu l + \sin\mu l\,\mathrm{sh}\,\mu l\Big) -$$

$$- \frac{4\mu^4 m}{\rho}\Big(\cos\mu l\,\mathrm{sh}\,\mu l - e^{\mu l}\sin\mu l\Big),$$

$$w_{13} = \int_0^l f_0(s)\cos\mu(s-l)\,\mathrm{ch}\,\mu(s-l)\,ds - g_{10} -$$

$$- \frac{\mu m}{\rho}\int_0^l f_0(s)\,(\cos\mu(s-l)\,\mathrm{sh}\,\mu(s-l) - \sin\mu(s-l)\,\mathrm{ch}\,\mu(s-l))\,ds,$$

$$w_{21} = 2\mu^2\cos\mu l\,\mathrm{ch}\,\mu l + \frac{4\mu^5 J}{\rho}(\cos\mu l\,\mathrm{sh}\,\mu l + \sin\mu l\,\mathrm{ch}\,\mu l),$$

$$w_{22} = -2\mu^2\Big(\sin\mu l\,\mathrm{ch}\,\mu l + e^{\mu l}\cos\mu l\Big) -$$

$$- \frac{4\mu^5 J}{\rho}\Big(e^{\mu l}(\sin\mu l + \cos\mu l) + \sin\mu l\,\mathrm{sh}\,\mu l - \cos\mu l\,\mathrm{ch}\,\mu l\Big),$$

$$w_{23} = -\frac{1}{2\mu}\int_0^l f_0(s)\,(\cos\mu(s-l)\,\mathrm{sh}\,\mu(s-l) + \sin\mu(s-l)\,\mathrm{ch}\,\mu(s-l))\,ds +$$

$$+ \frac{2\mu^2 J}{\rho}\int_0^l f_0(s)\sin\mu(s-l)\,\mathrm{sh}\,\mu(s-l)\,ds - g_{20},$$

$$w_{31} = 2\mu^2 c\left(\int_0^l \psi''(x)\cos\mu x\,\mathrm{ch}\,\mu x\,dx + \psi'(0)\right) - \gamma m\sin\mu l\,\mathrm{sh}\,\mu l +$$

$$+ \frac{\gamma\rho}{4\mu}\Big(e^{\mu l}(\cos\mu l - \sin\mu l) - e^{-\mu l}(\cos\mu l + \sin\mu l)\Big),$$

$$w_{32} = 4\mu^3 c\psi(0) - 2\mu^2 c\left(\int_0^l \Big(\sin\mu x\,\mathrm{ch}\,\mu x + e^{\mu x}\cos\mu x\Big)\psi''(x)\,dx + \psi'(0)\right) +$$

$$+\ \gamma m\Big(e^{\mu l}\sin\mu l-\cos\mu l\,\mathrm{sh}\,\mu l\Big)-\frac{\gamma\rho}{4\mu}\Big(e^{\mu l}(3\cos\mu l-\sin\mu l)+e^{-\mu l}(\cos\mu l-\sin\mu l)-4\Big),$$

$$w_{33}\ =\ \beta+\frac{c}{2\mu}\int_0^l\int_0^x f_0(s)(\cos\mu(x-s)\,\mathrm{sh}\,\mu(x-s)+\sin\mu(x-s)\,\mathrm{ch}\,\mu(x-s))\psi''(x)\,ds\,dx\ +$$

$$+\ \frac{k}{2\mu^2}\sqrt{\frac{\rho}{c}}+\frac{\gamma\rho}{4\mu^3}\int_0^l\int_0^x f_0(s)\big(\cos\mu(x-s)\,\mathrm{sh}\,\mu(x-s)-\sin\mu(x-s)\,\mathrm{ch}\,\mu(x-s)\big)\,ds\,dx\ +$$

$$+\ \frac{\gamma m}{4\mu^3}\int_0^l f_0(s)(\sin\mu(s-l)\,\mathrm{ch}\,\mu(s-l)-\cos\mu(s-l)\,\mathrm{sh}\,\mu(s-l))\,ds\ +\ \frac{\alpha^*\rho}{\mu^4 c},$$

$$v_1(\tilde{\xi})\ =\ -\int_0^l f_1(s,\tilde{\xi})\cos\mu(s-l)\,\mathrm{ch}\,\mu(s-l)\,ds\ +$$

$$+\ \frac{\mu m}{\rho}\int_0^l f_1(s,\tilde{\xi})(\cos\mu(s-l)\,\mathrm{sh}\,\mu(s-l)-\sin\mu(s-l)\,\mathrm{ch}\,\mu(s-l))\,ds\ +\ g_{11}(\tilde{\xi}),$$

$$v_2(\tilde{\xi})\ =\ \frac{1}{2\mu}\int_0^l f_1(s,\tilde{\xi})(\cos\mu(s-l)\,\mathrm{sh}\,\mu(s-l)+\sin\mu(s-l)\,\mathrm{ch}\,\mu(s-l))\,ds\ -$$

$$-\ \frac{2\mu^2 J}{\rho}\int_0^l f_1(s,\tilde{\xi})\sin\mu(s-l)\,\mathrm{sh}\,\mu(s-l)\,ds\ +\ g_{21}(\tilde{\xi}),$$

$$v_3(\tilde{\xi})\ =\ -\frac{c}{2\mu}\int_0^l\int_0^x f_1(s,\tilde{\xi})(\cos\mu(x-s)\,\mathrm{sh}\,\mu(x-s)+\sin\mu(x-s)\,\mathrm{ch}\,\mu(x-s))\psi''(x)\,ds\,dx\ +$$

$$+\ \frac{\gamma\rho}{4\mu^3}\int_0^l\int_0^x f_1(s,\tilde{\xi})(\sin\mu(x-s)\,\mathrm{ch}\,\mu(x-s)-\cos\mu(x-s)\,\mathrm{sh}\,\mu(x-s))\,ds\,dx\ +$$

$$+\ \frac{\gamma m}{4\mu^3}\int_0^l f_1(s,\tilde{\xi})(\cos\mu(s-l)\,\mathrm{sh}\,\mu(s-l)-\sin\mu(s-l)\,\mathrm{ch}\,\mu(s-l))\,ds\ +$$

$$+\ \frac{\alpha^*\tilde{\varphi}+k\tilde{\omega}}{2\mu^2}\sqrt{\frac{\rho}{c}}+\frac{\alpha^*\rho\tilde{\omega}}{4\mu^4 c}, \tag{25}$$

$$\alpha^*\ =\ \alpha-\gamma\left(\rho\int_0^l\psi(x)\,dx+m\psi(l)\right)\ >\ 0.$$

В приведенных формулах параметр λ выражен через μ посредством соотношения (22); величины $f_0(s)$, $f_1(s,\tilde{\xi})$, g_{10}, $g_{11}(\tilde{\xi})$, g_{20}, $g_{21}(\tilde{\xi})$ определены выше.

При заданных константах $c>0$, $m>0$, $J>0$, $\rho>0$, γ и функции $\psi\in C^2[0,l]$ компоненты матрицы W зависят только от параметра μ. Разложим определитель W по степеням μ[1]:

$$\det(W)\ =\ \frac{2\rho\alpha^*}{c}\mu\ +\ o(\mu) \tag{26}$$

[1] Вспомогательные выкладки были проведены с помощью компьютерной программы Maple.

при $\mu \to 0$. Исходя из представления (26), выберем такое достаточно малое число $\mu > 0$, чтобы выполнялось условие $\det(W) \neq 0$. Далее будем считать, что число $\lambda > 0$ фиксировано и соответствует выбранному μ по формуле (22), кроме того, параметр u связан с ξ посредством линейного функционала (5). Из условия $\det(W) \neq 0$ следует, что для любого $\tilde{\xi} \in X$ существует единственный элемент $\xi \in D(A)$, который удовлетворяет уравнению (10) при условии (5). Это означает, что $\xi = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1}\tilde{\xi}$, т. е. существует резольвента $(\tilde{A} - \lambda I)^{-1}: X \to X$ оператора $\tilde{A}$ при выбранном $\lambda > 0$. Запишем резольвенту в покомпонентном виде:

$$(\tilde{A} - \lambda I)^{-1}\tilde{\xi} = \left(R_\eta(\tilde{\xi}),\ R_\zeta(\tilde{\xi}),\ R_\phi(\tilde{\xi}),\ R_\omega(\tilde{\xi}),\ R_p(\tilde{\xi}),\ R_q(\tilde{\xi})\right)^T, \tag{27}$$

где линейные операторы

$$R_\eta : X \to \left\{\eta \in H^2(0,l) : \eta(0) = \eta'(0) = 0\right\},$$

$$R_\zeta : X \to \{\zeta \in L_2(0,l)\}$$

и функционалы

$$R_\phi : X \to \{\phi \in \mathbb{R}\}, \qquad R_\omega : X \to \{\omega \in \mathbb{R}\},$$

$$R_p : X \to \{p \in \mathbb{R}\}, \qquad R_q : X \to \{q \in \mathbb{R}\}$$

задаются формулами (14), (15), (18), (21), (24).

При сделанных предположениях для любых $v_1(\tilde{\xi})$, $v_2(\tilde{\xi})$, $v_3(\tilde{\xi})$ справедлива оценка решения C_1, C_2, u системы (24):

$$|C_1| + |C_2| + |u| \leq M_1\left(\left|v_1(\tilde{\xi})\right| + \left|v_2(\tilde{\xi})\right| + \left|v_3(\tilde{\xi})\right|\right), \tag{28}$$

где положительная константа M_1 определяется нормой матрицы W^{-1}. Из формул (25) на основании неравенств Коши – Буняковского и Фридрихса (1), (2) следует, что $v_j : X \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, — линейные ограниченные функционалы. Поэтому оценка (28) обеспечивает ограниченность линейного отображения $\tilde{\xi} \mapsto (C_1, C_2, u)$, определенного системой (24):

$$|C_1| + |C_2| + |u| \leq M_2\left\|\tilde{\xi}\right\|_X \qquad \forall \tilde{\xi} \in X \tag{29}$$

с некоторой константой $M_2 \geq 0$. Следовательно, функционалы $R_\phi : \tilde{\xi} \to \phi$, $R_\omega : \tilde{\xi} \to \omega$, определенные в (14), являются линейными ограниченными функционалами из X в $\mathbb{R}$. Применяя неравенство Коши – Буняковского в (23), получаем оценку

$$\left\|\eta^{(j)}\right\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{1}{4\mu^3}\left(\int_0^l\left(\int_0^x\left(f_0(s)u + f_1(s,\tilde{\xi})\right)K^{(j)}(x-s)\,ds\right)^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+ |C_1|\left\|\eta_1^{(j)}\right\|_{L_2(0,l)} + |C_2|\left\|\eta_2^{(j)}\right\|_{L_2(0,l)} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{l}}{4\mu^3}\left\|f_0(\cdot)u + f_1(\cdot,\tilde{\xi})\right\|_{L_2} + |C_1|\left\|\eta_1^{(j)}\right\|_{L_2} + |C_2|\left\|\eta_2^{(j)}\right\|_{L_2}.$$

Отсюда с помощью оценки (29) следует существование константы $M_3 \geq 0$:

$$\|\eta\|_{H^3(0,l)} = \left(\sum_{j=0}^{3}\left\|\eta^{(j)}\right\|^2_{L_2(0,l)}\right)^{1/2} \leq M_3\left\|\tilde{\xi}\right\|_X. \tag{30}$$

По теореме вложения (см., например, [15, с. 83]) пространство $H^3(0,l)$ компактно вложено в $H^2(0,l)$, т. е. линейный оператор $R_\eta\colon \tilde{\xi} \to \eta$, определенный с помощью (21), (24), переводит ограниченные подмножества X в предкомпактные подмножества $H^2(0,l)$ вследствие оценки (30).

Формулы (15) и (30) обеспечивают выполнение оценки

$$\|\zeta\|_{H^2(0,l)} \leq \left\|\tilde{\eta}\right\|_{H^2(0,l)} + \lambda\|\eta\|_{H^2(0,l)} \leq \left\|\tilde{\eta}\right\|_{H^2(0,l)} + \lambda M_3\left\|\tilde{\xi}\right\|_X \leq M_4\left\|\tilde{\xi}\right\|_X$$

с некоторой положительной константой M_4. Следовательно, линейный оператор $R_\zeta\colon \tilde{\xi} \to \zeta$, действующий из X в $L_2(0,l)$ по формулам (15), (21), (24), является компактным. Оценим теперь компоненты p и q вектора ξ в представлении (18) с учетом граничных условий $\eta(0) = \eta'(0) = \tilde{\eta}(0) = \tilde{\eta}'(0) = 0$:

$$|p| \leq \left|\tilde{\eta}(l)\right| + \lambda|\eta(l)| = \left|\int_0^l \tilde{\eta}'(x)\,dx\right| + \lambda\left|\int_0^l \eta'(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \|1\|_{L_2(0,l)}\left(\left\|\tilde{\eta}'\right\|_{L_2(0,l)} + \lambda\|\eta'\|_{L_2(0,l)}\right),$$

$$|q| \leq \left|\tilde{\eta}'(l)\right| + \lambda|\eta'(l)| \leq \|1\|_{L_2(0,l)}\left(\left\|\tilde{\eta}''\right\|_{L_2(0,l)} + \lambda\|\eta''\|_{L_2(0,l)}\right).$$

Правая часть каждого из этих неравенств не превышает $M_5\left\|\tilde{\xi}\right\|_X$ при некоторой константе $M_5 > 0$ вследствие оценки (30) и неравенства Фридрихса вида (1), (2). Приведенные оценки доказывают ограниченность линейных функционалов R_p и R_q. Итак, показано, что в обозначениях (27) R_η, R_ζ — компактные операторы, R_ϕ, R_ω, R_p, R_q— ограниченные функционалы, следовательно, оператор $(\tilde{A} - \lambda I)^{-1}\colon X \to X$ компактен.

При введении в пространстве X эквивалентной нормы $\|\cdot\|_V$ выполнены следующие свойства (см. [11]): полугруппа $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t\geq 0}$ является сжимающей; оператор $\tilde{A}$ диссипативен ($-\tilde{A}$ аккретивен). Кроме того, поскольку $\overline{D(\tilde{A})} = X$, $\tilde{A}(0) = 0$ и $(\tilde{A} - \lambda I)^{-1}$ — компактный оператор при вибранном $\lambda > 0$, каждая полутраектория $\{\xi(t)\}_{t\geq 0} = \{e^{t\tilde{A}}\xi(0)\}_{t\geq 0}$ уравнения (3), (5) предкомпактна по теореме 3 из [16].

Теорема доказана.

Для положительной полутраектории $\{\xi(t)\}_{t\geq 0} = \{e^{t\tilde{A}}\xi_0\}_{t\geq 0}$ обозначим через $\Omega(\xi_0)$ ее ω-предельное множество. Как отмечено выше, значения $V(\xi(t)) \geq 0$ не возрастают при $t \geq 0$ и $\dot{V}(\xi) = 0$ только при $\omega = 0$. Поэтому из доказанной теоремы и принципа инвариантности [12], [13] (лемма 2) вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть* α *и* β *— достаточно большие константы,* $k > 0$.

Тогда для любой полутраектории $\{\xi(t)\}_{t\geq 0}$ *уравнения* (3) *с управлением* $u = h(\xi)$ *вида* (5) *множество* $\Omega(\xi_0)$ *является компактным инвариантным относительно полугруппы* $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t\geq 0}$ *подмножеством множества*

$$S_c = \{\xi \in X : \omega = 0, \ \ V(\xi) = c\}$$

при некоторой константе $c \geq 0$. *Здесь функционал* V *определен формулой* (8).

4. Заключение. Доказанный результат сводит анализ предельных множеств траекторий уравнения (3) с управлением в виде обратной связи (5) к исследованию инвариантных подмножеств S_c. В частности, представляет дальнейший интерес проверка условий типа Барбашина – Красовского [13] (теорема 2) с целью получения достаточных условий сильной асимптотической устойчивости или частичной устойчивости решения $\xi = 0$.

1. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. – Киев: Наук. думка, 1999. – 631 с.
2. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* К вопросу о сильной стабилизируемости сжимающих систем в гильбертовых пространствах // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 11. – С. 1862 – 1969.
3. *Barbu V.* Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems. – San Diego, CA: Acad. Press, 1992. – 476 p.
4. *Curtain R. F., Zwart H.* An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. – New York: Springer, 1995. – 698 p.
5. *Luo Z.-H., Guo B.-Z., Morgul O.* Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications. – London: Springer, 1999. – 403 p.
6. *Oostveen J.* Strongly stabilizable distributed parameter systems. – Philadelphia: SIAM, 2000. – 150 p.
7. *Шестаков А. А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1990. – 320 с.
8. *Zuyev A. L.* Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems // Automatica. – 2005. – **41**, № 1. – P. 1 – 10.
9. *Lagnese J. E., Leugering G.* Controllability of thin elastic beams and plates // Control handbook / Ed. W. S. Levine. – Boca Raton: CRC Press – IEEE Press, 1996. – P. 1139 – 1156.
10. *Зуев А. Л.* Моделирование пространственного упругого манипулятора с телескопическим движением звеньев // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2005. – **10**. – С. 51 – 58.
11. *Zuyev A. L.* Stabilization of the spatial oscillations of an elastic system model // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2007. – № 3. – С. 33 – 38. (arXiv:0707.2209v1)
12. *LaSalle J. P.* Stability theory and invariance principles // Dynam. Syst. (Int. Symp. Dynam. Syst., Providence, 1974). – New York: Acad. Press, 1976. – Vol. 1. – P. 211 – 222.
13. *Зуев А. Л.* Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 629 – 637.
14. *Зуев А. Л.* Об относительной компактности траекторий дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Доп. НАН України. – 2007. – № 2. – С. 7 – 12.
15. *Функциональный* анализ / Под ред. С. Г. Крейна. – 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
16. *Dafermos C. M., Slemrod M.* Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups // J. Funct. Anal. – 1973. – **13**. – P. 97 – 106.

Получено 19.07.07