УДК 517.95

І. Я. Кміть, Б. Й. Пташник
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

КОРЕКТНІСТЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БАГАТОВИМІРНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ *

By the method of characteristics, we investigate the well-posedness of local (the Cauchy problem, mixed problems) and nonlocal (with nonseparable and integral boundary conditions) problems for some multidimensional almost linear first-order hyperbolic systems. Reducing these problems to the systems of integral operator equations, we prove the existence and uniqueness of classical solutions.

Методом характеристик исследованы корректные постановки локальных (задача Коши, смешанные задачи) и нелокальных (с неразделенными и интегральными условиями) задач для некоторых многомерных почти линейных гиперболических систем первого порядка. На основании сведения этих задач к системам интегро-операторных уравнений доказаны теоремы существования и единственности классических решений.

1. Вступ. Класичний метод характеристик, початково розроблений для дослідження задачі Коші для лінійних (майже лінійних) одновимірних гіперболічних систем першого порядку (див., наприклад, [1]), виявився потужним засобом і для вивчення коректності мішаних задач [2, 3]. Подальші застосування цей метод знайшов при вивченні класичних і некласичних (з нерозділеними та інтегральними умовами як за просторовою, так і часовою змінними) задач для квазілінійних гіперболічних систем на площині [4 – 9]. У даній роботі ми використовуємо метод характеристик для коректної постановки крайових задач для гіперболічних систем з трьома незалежними змінними. Зазначимо, що питанням коректності задач у випадку багатьох незалежних змінних присвячено роботи [10 – 20], в яких використано іншу методику дослідження, зокрема „енергетичний метод”, перетворення Лапласа та Фур’є.

При спробі побудувати аналог класичного методу характеристик у багатовимірному випадку виникають певні труднощі та особливості. Важливою передумовою застосовності методу характеристик для одновимірних майже лінійних $(n \times n)$-гіперболічних систем є той факт, що вони допускають діагональну форму запису [21], у якій головна частина представляє рівно n так званих характеристичних напрямків (кожне рівняння визначає рівно один напрямок, причому цей напрямок пов'язаний лише з однією невідомою функцією системи). Для m-вимірних $(n \times n)$-гіперболічних систем діагональна форма запису є можливою лише в дуже часткових випадках. Це пов’язано з тим, що в загальному випадку (навіть при $m = 2$) ми маємо n рівнянь з n невідомими функціями і ці рівняння представляють n^2 різних напрямків. У свою чергу це зумовлює складність визначення вхідних і вихідних хвиль гіперболічної системи, що є необхідним для постановки крайових умов. Відтак зведення крайових задач для багатовимірних гіперболічних систем до систем інтегральних рівнянь є нетривіальним завданням.

Результати, отримані в даній роботі, стосуються класу двовимірних майже лінійних (не обов’язково симетричних) гіперболічних систем, які породжують *лише* n напрямків, але при цьому *не зводяться* до вищезгаданого діагонального вигляду. У попередніх дослідженнях у даному напрямку розглядалися переважно *симетричні* або *лінійні* гіперболічні системи, причому ці властивості використовувалися для доведення теорем про коректну постановку мішаних задач. Наш аналіз, хоча й охоплює лише деякий клас багатовимірних гіперболічних систем, дає можливість, подібно до одновимірного випадку, коректно

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 14.1 / 017).

ставити класичні крайові задачі, використовуючи інтегральну форму запису останніх. Це, у свою чергу, дозволяє досліджувати також нелокальні задачі з нерозділеними (зокрема, періодичними) та інтегральними умовами, а також задачі з нелінійними умовами.

2. Задача Коші. Для системи диференціальних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\big(u_{jt} - \lambda_{i1}(x,t)u_{jx} - \lambda_{i2}(y,t)u_{jy}\big) = f_i(x,y,t,u), \quad i \le n, \tag{1}$$

розглянемо задачу з початковими умовами

$$u_i(x,y,0) = \varphi_i(x,y), \quad i \le n, \tag{2}$$

де a_{ij} — деякі дійсні константи, $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Нехай $s_1, \dots, s_n$ — деяка перестановка чисел $1, \dots, n$. Припустимо, що для всіх x, y, $t \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\lambda_{11}(x,t) \le \min_{2\le i\le n-1} \lambda_{i1}(x,t), \qquad \max_{2\le i\le n-1} \lambda_{i1}(x,t) \le \lambda_{n1}(x,t), \tag{3}$$

$$\lambda_{s_1 2}(y,t) \le \min_{2\le i\le n-1} \lambda_{s_i 2}(y,t), \qquad \max_{2\le i\le n-1} \lambda_{s_i 2}(y,t) \le \lambda_{s_n 2}(y,t). \tag{4}$$

Нехай матриця $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ є невиродженою:

$$\det A \ne 0; \tag{5}$$

при цьому система (1) не зводиться до діагонального вигляду, коли головна частина кожного з рівнянь є похідною лише однієї невідомої функції вздовж деякого напрямку. Припустимо також, що всі функції λ_{ij} неперервні за обома аргументами, а за першим аргументом неперервно диференційовні та задовольняють глобальну умову Ліпшиця. Відомо [22], що тоді кожна із задач Коші

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\lambda_{i1}(\xi(\tau),\tau), \quad \xi(t) = x, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\lambda_{i2}(\sigma(\tau),\tau), \quad \sigma(t) = y, \quad (y,t) \in \mathbb{R}^2,$$

де $i \in \{1, \dots, n\}$, має єдиний класичний розв'язок, який можна продовжити до перетину з прямою $\{\tau = 0\}$. Ці розв'язки позначимо через $\xi = \omega_{i1}(\tau; x, t)$ та $\sigma = \omega_{i2}(\tau; y, t)$ відповідно. Таким чином, для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ кожне з рівнянь $\xi = \omega_{i1}(\tau; x, t)$ та $\sigma = \omega_{i2}(\tau; y, t)$ визначає рівняння поверхні (у просторі $\mathbb{R}^3$ змінних ξ, σ, τ), яка проходить через точку $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$ і продовжується до перетину з площиною $\{\tau = 0\}$.

Пов'яжемо з кожною точкою $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$ „характеристичний конус" таким чином: (x,y,t) — вершина конуса, а поверхні $\xi = \omega_{11}(\tau; x, t)$, $\xi = \omega_{n1}(\tau; x, t)$, $\sigma = \omega_{s_1 2}(\tau; y, t)$ та $\sigma = \omega_{s_n 2}(\tau; y, t)$ утворюють бічну поверхню конуса, яка в перетині з площиною $\{\tau = 0\}$ визначає межу основи конуса. Нехай D — деяка обмежена область у площині $\{\tau = 0\}$. Позначимо через $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ область, яка складається з множини точок (x,y,t) таких, що основи характеристичних конусів із вершинами в цих точках повністю належать D. Область Ω називають областю впливу початкових даних (2), заданих на D, а область D — областю залежності розв'язків системи (1) в Ω. Області Ω і D, на підставі припущень (3) і (4), означені коректно.

Очевидно, що для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ ліва частина i-го рівняння системи (1) є похідною вздовж відповідного напрямку, який називається характеристичним і задається характеристичною кривою $\xi = \omega_{i1}(\tau; x, t)$, $\sigma = \omega_{i2}(\tau; y, t)$. Нехай функції φ_i та f_i достатньо гладкі. Інтегруючи кожне рівняння системи (1) уздовж відповідного йому характеристичного напрямку та враховуючи (5), отримуємо, що задача (1), (2) є еквівалентною до системи інтегральних рівнянь

$$u_i(x, y, t) = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}^{ad} \left[\sum_{s=1}^{n} a_{js} \varphi_s\big(\omega_{j1}(0; x, t), \omega_{j2}(0; y, t)\big) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t f_j\big(\omega_{j\,1}(\tau; x, t), \omega_{j\,2}(\tau; y, t), \tau, u\big) d\tau \right], \quad i \le n, \tag{6}$$

де $\left\{A_{ji}^{ad}\right\}_{i,j=1}^{n}$ — приєднана матриця до A.

Теорема 1. *Нехай виконано умови* (3) – (5) *та припущення щодо гладкості функцій* λ_{ij}, *функції* f_i *неперервні за всіма аргументами, неперервно диференційовні по* x, y, *и та задовольняють глобальну умову Ліпшиця по* $u \in \mathbb{R}^n$ *рівномірно по* $(x, y, t) \in M$ *для кожного компакту* $M \in \mathbb{R}^3$, *а функції* φ_i *неперервно диференційовні. Тоді задача* (1), (2) *в області* $\mathbb{R}^3$ *має єдиний класичний розв'язок.*

Доведення. Побудуємо послідовність областей Ω_j^+ та Ω_j^-, $j \ge 1$, об'єднання яких вичерпує весь простір $\mathbb{R}^3$, де

$$\Omega_j^+ = \Big\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \omega_{11}(t; -j, j) < x < \omega_{n1}(t; j, j), \omega_{s_1 2}(t; -j, j) <$$

$$< y < \omega_{s_n 2}(t; j, j), 0 < t < j\Big\},$$

$$\Omega_j^- = \Big\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \omega_{n1}(t; -j, -j) < x < \omega_{11}(t; j, -j), \omega_{s_n 2}(t; -j, -j) <$$

$$< y < \omega_{s_1 2}(t; j, -j), -j < t < 0\Big\}.$$

Доведення теореми досить провести для областей Ω_j^+ та Ω_j^- при довільному фіксованому $j \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо довільне $j \in \mathbb{N}$. Очевидно, що областю залежності розв'язків задачі в Ω_j^+ є область $\overline{\Omega}_j^+ \cap \{t = 0\}$. Оскільки (6) є системою інтегральних рівнянь Вольтерри 2-го роду, то, використовуючи принцип стискуючих відображень та метод продовження (або ітерування) по t локального результату, отримуємо, що існує єдиний неперервний розв'язок u системи (6). Детальніше, нехай L — спільна константа в умовах Ліпшиця для всіх функцій f_i по $u \in \mathbb{R}^n$, де $(x, y, t) \in \Omega_j^+$. Позначимо $\Omega(\theta) = \Omega_j^+ \cap \{t < \theta\}$. На першому кроці доведемо існування єдиного неперервного розв'язку в $\Omega(t_0)$ для деякого $t_0 > 0$. Для цього використаємо принцип стискуючих відображень. Застосуємо оператор P, що задається правими частинами (6), до неперервних вектор-функцій u^1 і u^2 і розглянемо їхню різницю в $\Omega(t_0)$. Очевидною є оцінка

$$\max_{\overline{\Omega}(t_0)} \| Pu^1 - Pu^2 \| \le t_0 Q \max_{\overline{\Omega}(t_0)} \| u^1 - u^2 \|, \tag{7}$$

де

$$Q = Ln \max_{i,j} \left| A_{ij}^{ad} \right| |\det A|^{-1}, \tag{8}$$

а через $\|\cdot\|$ позначено евклідову норму в просторі $\mathbb{R}^n$. Виберемо $t_0 = (2Q)^{-1}$, при цьому в (7) константа $t_0 Q = 1/2$. Тоді в $\overline{\Omega}(t_0)$ існує єдиний неперервний розв'язок системи (6). Оскільки константа L (а відтак, і константа t_0) залежить від усієї області Ω_j^+, то, ітеруючи отриманий локальний результат в областях $(\Omega(it_0) \cap \Omega(j)) \setminus \overline{\Omega}((i-1)t_0)$, де $2 \le i \le \lceil j/t_0 \rceil$, за щонайбільше $\lceil j/t_0 \rceil$ кроків доводимо існування єдиного неперервного розв'язку u системи (6). Цей розв'язок можна знайти методом послідовних наближень.

Щоб довести, що розв'язок u є неперервно диференційовним по x (аналогічно по y), здиференціюємо (1) і (2) формально за змінною x і врахуємо, що u є відомою неперервною вектор-функцією. Отримана задача еквівалентна такій системі інтегральних рівнянь Вольтерри 2-го роду відносно функцій $\partial_x u_i(x, y, t)$:

$$\partial_x u_i(x, y, t) = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}^{ad} \left[\sum_{s=1}^{n} a_{js} \left(R_j' u_s\right)(x, y, t) + \right.$$

$$+ \int_0^t \left(\nabla_u f_j(\xi, \sigma, \tau, u) \cdot \partial_\xi u(\xi, \sigma, \tau) + \partial_\xi f_j(\xi, \sigma, \tau, u) + \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{s=1}^{n} a_{js} \partial_\xi \lambda_{j1}(\xi, \tau) \partial_\xi u_s(\xi, \sigma, \tau) \right) \Bigg|_{\xi = \omega_{j1}(\tau; x, t), \sigma = \omega_{j2}(\tau; y, t)} d\tau \right], \quad i \le n, \tag{9}$$

де

$$\left(R_j' u_s\right)(x, y, t) = \partial_\xi \varphi_s\left(\xi, \omega_{j2}(0; y, t)\right)\Big|_{\xi = \omega_{j1}(0; x, t)},$$

а через "$\cdot$" позначено скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^n$. Існування, єдиність та неперервність розв'язку системи (9) доводимо аналогічно до доведення подібного результату для системи (6). Так само доводимо неперервну диференційовність розв'язку u за змінною y. Тоді неперервність функцій $\partial_t u_i(x, y, t)$ випливає з системи (1) та умови (5). Це доводить теорему для області Ω_j^+. Доведення для кожної окремої області Ω_j^- проводиться аналогічно. Оскільки j — довільне натуральне число, то доведення теореми завершено.

3. Мішані задачі з локальними крайовими умовами. Мішані задачі з локальними крайовими умовами, на противагу до задачі Коші, мають ту специфіку, що вони породжують такі хвилі, які існують лише скінченний проміжок часу, що обмежений зверху моментом часу виходу цих хвиль на межу області. Отже, мішані задачі визначають як хвилі, що входять в область, так і хвилі, що виходять з неї. У багатовимірному випадку геометрія цих хвиль є досить складною. Ми спершу вивчаємо випадок, коли область є шаром, після чого розглядаємо технічно важчий випадок октанту, особливістю якого є поява обмежуючого область бічного ребра.

Через $\mathbb{R}_+$ будемо позначати множину дійсних невід'ємних чисел.

3.1. Задача в шарі. Розглянемо мішану задачу для системи (1) в області $\Pi = \left\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 < x < 1,\ -\infty < y < \infty, 0 < t < \infty\right\}$. Нехай для деякого $k \in \{1, \ldots$ $\ldots, n\}$

$$\lambda_{11}, \lambda_{21}, \ldots, \lambda_{k1} < 0\,; \ \lambda_{k+1,1}, \lambda_{k+2,1}, \ldots, \lambda_{n1} > 0, \quad (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

Припустимо, що матриця A має діагонально-блочну структуру

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

де A_1 і A_2 — $(k \times k)$- та $(n-k)\times(n-k)$-матриці відповідно, а через 0 позначено нульові матриці відповідних розмірів. Зазначимо, що будь-яка матриця A жорданового вигляду має структуру (11).

Для системи (1) розглянемо задачу з початковими умовами (2) та крайовими умовами

$$\begin{aligned} u_i\big|_{x=0} &= \mu_i(y,t), \quad i \le k, \\ u_i\big|_{x=1} &= \mu_i(y,t), \quad k+1 \le i \le n, \end{aligned} \tag{12}$$

де $(y,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Нехай всі функції λ_{ij} неперервні за обома аргументами та неперервно диференційовні за першим аргументом, а функції $\lambda_{i2}(y,t)$, крім того, задовольняють умову Ліпшиця по $y\in\mathbb{R}$ рівномірно по $t\in[0,T]$ для кожного $T>0$. Тоді через точку $(x,y,t)\in\Pi$ проходить n характеристик системи (1), кожну з яких можна продовжити у напрямку спадання часової змінної до перетину з $\partial\Pi$.

Позначимо через $t_i(x,t)$ найменше значення τ, при якому поверхня $\xi = \omega_{i1}(\tau;x,t)$ перетинає межу області Π; $\Pi_{\mu i}$, $\Pi_{\varphi i}$ — множини точок $(x,y,t)\in\Pi$, для яких $t_i(x,t)>0$, $t_i(x,t)=0$ відповідно; $I_1=\{1,\dots,k\}$, $I_2=\{k+1,\dots,n\}$. Тоді задача (1), (2), (12) при достатньо гладких вихідних даних є еквівалентною до системи інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} u_i(x,y,t) &= \frac{1}{\det A_m}\sum_{j\in I_m}\left(A_{ji}^m\right)^{ad}\Bigg[\sum_{s\in I_m} a_{js}\big(R_j u_s\big)(x,y,t) + \\ &+ \int\limits_{t_j(x,t)}^{t} f_i\big(\omega_{j1}(\tau;x,t),\omega_{j2}(\tau;y,t),\tau,u\big)d\tau\Bigg], \quad i\in I_m, \end{aligned} \tag{13}$$

де $\left\{\left(A_{ij}^m\right)^{ad}\right\}_{i,j\in I_m}$ — приєднана матриця до A_m, $m=1,2$,

$$\big(R_i u_j\big)(x,y,t) = \begin{cases} \mu_j\big(\omega_{i2}(t_i(x,t);y,t),t_i(x,t)\big) & (x,y,t)\in\Pi_{\mu i,} \\ \varphi_j\big(\omega_{i1}(0;x,t),\omega_{i2}(0;y,t)\big) & (x,y,t)\in\Pi_{\varphi i}. \end{cases}$$

Така форма запису вихідної задачі є можливою завдяки тому, що умови (2) і (12) із урахуванням (11) визначають лише вхідні хвилі і не впливають на поведінку вихідних хвиль. Іншими словами, якщо система (1) містить похідну функції u_j за i-м характеристичним напрямком, а крива, що задає цей напрямок, перетинає $\partial\Pi$ у двох точках, то значення невідомої функції u_j задається лише в одній із цих точок, а саме в тій, що відповідає меншому часові.

Для встановлення класичної розв'язності задачі (1), (2), (12) необхідним є виконання умов погодження нульового та першого порядків між (2) і (12):

$$\begin{aligned} \mu_i(y,0) &= \varphi_i(0,y), \quad i\le k, \\ \mu_i(y,0) &= \varphi_i(1,y), \quad k+1\le i\le n, \end{aligned} \tag{14}$$

та

$$\partial_y \varphi_i(0, y) = \partial_y \mu_i(y, 0), \quad i \le k,$$

$$\partial_y \varphi_i(1, y) = \partial_y \mu_i(y, 0), \quad k+1 \le i \le n, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\big(\partial_t \mu_j(y, 0) - \lambda_{i1}(0, 0)\partial_x \varphi_j(0, y) - \lambda_{i2}(y, 0)\partial_y \varphi_j(0, y)\big) =$$

$$= f_i(0, y, 0, \varphi(0, y)), \quad i \le k,$$

$$\sum_{j=k+1}^{k} a_{ij}\big(\partial_t \nu_j(y, 0) - \lambda_{i1}(1, 0)\partial_x \varphi_j(1, y) - \lambda_{i2}(y, 0)\partial_y \varphi_j(1, y)\big) =$$

$$= f_i(1, y, 0, \varphi(1, y)), \quad k+1 \le i \le n,$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Теорема 2. *Нехай виконано умови* (4), (5), (10), (11), (14), (15) *та припущення щодо гладкості функцій* λ_{ij}, *функції* f_i *неперервні за всіма аргументами, неперервно диференційовні по* x, y, u *та задовольняють глобальну умову Ліпшиця по* $u \in \mathbb{R}^n$ *рівномірно по* $(x, y, t) \in M$ *для кожного компакту* $M \in \overline{\Pi}$, *а функції* φ_i *та* μ_i *неперервно диференційовні. Тоді задача* (1), (2), (12) *в області* $\overline{\Pi}$ *має єдиний класичний розв'язок.*

Доведення. Доведення існування та єдиності неперервного розв'язку проведемо за такою схемою. Будуємо послідовність обмежених областей $\Pi_j \subset \Pi$, $j \ge 1$, яка повністю вичерпує Π, де

$$\Pi_j = \big\{(x, y, t) \in \Pi \,|\, \omega_{s_1 2}(t; -j, j) < y < \omega_{s_n 2}(t; j, j), 0 < t < j\big\}. \tag{16}$$

З умов на функції λ_{i2} випливає, що областю залежності розв'язків задачі (1), (2), (12) в Π_j є $\partial\Pi \cap \overline{\Pi}_j$. Теорему досить довести для кожної окремої області Π_j. При цьому доведення існування єдиного неперервного розв'язку проводиться за схемою, використаною в доведенні теореми 1.

Доведемо тепер, що розв'язок u неперервно диференційовний по x. Позначимо

$$S_{rp}(y, \tau) = \partial_\tau \mu_p(y, \tau) - \lambda_{r2}(y, \tau)\partial_y \mu_p(y, \tau).$$

Тоді на підставі (1), (2), (12) та рівностей, отриманих з (1), (2), (12) диференціюванням, для знаходження функцій $\partial_x u_i(x, y, t)$, $i \le n$, отримуємо систему інтегральних рівнянь вигляду (9), де

$$\big(R'_j u_s\big)(x, y, t) = \frac{1}{\lambda_{11}(0, \tau) \ldots \lambda_{k1}(0, \tau)} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\det A_1} \sum_{r=1}^{k} \big(A^1_{rs}\big)^{ad} \left[f_r(0, y, \tau, u) - \sum_{p=1}^{k} a_{rp} S_{rp}(y, \tau)\right]\right)\Bigg|_{\tau = t_j(x, t)},$$

якщо $t_j(x, t) > 0$, $j \le k$,

$$\big(R'_j u_s\big)(x, y, t) = \frac{1}{\lambda_{k+1,1}(1, \tau) \ldots \lambda_{n1}(1, \tau)} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{\det A_2}\sum_{r=k+1}^{k}\left(A_{rs}^2\right)^{ad}\left[f_r(1,y,\tau,u)-\sum_{p=k+1}^{n}a_{rp}S_{rp}(y,\tau)\right]\right)\Bigg|_{\tau=t_j(x,t)},$$

якщо $t_j(x,t)>0,\ k+1\le j\le n,$ та

$$\left(R'_j u_s\right)(x,y,t) = \partial_\xi\varphi_s\big(\xi,\omega_{j2}(0;y,t)\big)\Big|_{\xi=\omega_{j1}(0;x,t)},$$

якщо $t_j(x,t)=0,\ \ j\le n$. Далі доведення проводиться у кожній окремій області Π_j. Вважаючи u відомою неперервною функцією, застосуємо до отриманої системи інтегральних рівнянь принцип стискуючих відображень та метод продовження по t. В результаті отримаємо неперервну диференційовність по x розв'язку u. Подібно доводиться неперервна диференційовність по y. Неперервна диференційовність u по t після цього випливає з (1).

Теорему доведено.

3.2. Задача в октанті. Розглянемо тепер мішану задачу для системи (1) в області $K=\left\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,0<x<\infty,\ 0<y<\infty,\ 0<t<\infty\right\}$. Нехай функції λ_{i1} задовольняють умови (10) для всіх $(x,t)\in\mathbb{R}^2_+$ і для деякої перестановки $s_1,\ldots$ $\ldots,s_n$ чисел $1,\ldots,n$ та для деякого $l\in\{1,\ldots,n\}$ виконуються нерівності

$$\lambda_{s_1 2},\lambda_{s_2 2},\ldots,\lambda_{s_l 2}<0,\qquad \lambda_{s_{l+1}2},\lambda_{s_{l+2}2},\ldots,\lambda_{s_n 2}>0,\quad (y,t)\in\mathbb{R}^2_+. \tag{17}$$

Будемо вимагати також, щоб

$$\begin{aligned}\max_{k+1\le i\le n-1}\lambda_{i1}(x,t)&\le\lambda_{n1}(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2_+,\\ \max_{l+1\le i\le n-1}\lambda_{s_i 2}(y,t)&\le\lambda_{s_n 2}(y,t),\quad (y,t)\in\mathbb{R}^2_+.\end{aligned} \tag{18}$$

Позначимо $I_1=\{1,\ldots,k\}\cap\{s_1,\ldots,s_l\}$, $I_2=\{1,\ldots,k\}\setminus I_1$, $I_3=\{k+1,\ldots,n\}\cap$ $\cap\{s_1,\ldots,s_l\}$, $I_4=\{k+1,\ldots,n\}\setminus I_3$. Припустимо, що A має діагонально-блочний вигляд

$$A=\begin{pmatrix}A_1&0&0&0\\0&A_2&0&0\\0&0&A_3&0\\0&0&0&A_4\end{pmatrix}, \tag{19}$$

де $A_1=\left\{a_{ij}\right\}_{i,j\in I_1}$, $A_2=\left\{a_{ij}\right\}_{i,j\in I_2}$, $A_3=\left\{a_{ij}\right\}_{i,j\in I_3}$, $A_4=\left\{a_{ij}\right\}_{i,j\in I_4}$. Для системи (1) розглянемо задачу з початковими умовами (2) та крайовими умовами

$$\begin{aligned}u_i\big|_{x=0}&=\mu_i(y,t),\quad i\le k,\\ u_i\big|_{y=0}&=\nu_i(x,t),\quad i\in\{s_1,\ldots,s_l\}.\end{aligned} \tag{20}$$

Зазначимо, що нерівності (18) дають можливість коректно визначити область впливу та область залежності, що суттєво використовується при доведенні існування класичного розв'язку задачі (1), (2), (20).

Нехай усі функції λ_{ij} неперервні за обома аргументами, крім того,

$\lambda_{k+1,1}, \ldots, \lambda_{n1}$ задовольняють умову Ліпшиця за змінною $x \in \mathbb{R}_+$, а $\lambda_{s_{l+1}2}, \ldots$ $\ldots, \lambda_{s_n 2}$ — за змінною $y \in \mathbb{R}_+$. Позначимо через $t_i(x, y, t)$ найменше значення τ, при якому крива $\xi = \omega_{i1}(\tau; x, t)$, $\sigma = \omega_{i2}(\tau; y, t)$ перетинає межу області K; $K_{\varphi i}$, $K_{\mu i}$ та $K_{\nu i}$ — множини точок $(x, y, t) \in K$, для яких $t_i(x, y, t) = 0$, $\omega_{i1}(t_i(x, y, t); x, t) = 0$ та $\omega_{i2}(t_i(x, y, t); y, t) = 0$ відповідно. Тоді за достатньо гладких вихідних даних задача (1), (2), (20) зводиться до системи інтегральних рівнянь вигляду (13), де $1 \le m \le 4$,

$$(R_i u_j)(x, y, t) = \begin{cases} \mu_j\big(\omega_{i2}(t_i(x, y, t); y, t), t_i(x, y, t)\big), & (x, y, t) \in K_{\mu i}, \\ \nu_j\big(\omega_{i1}(t_i(x, y, t); y, t), t_i(x, y, t)\big), & (x, y, t) \in K_{\nu i}, \\ \varphi_j\big(\omega_{i1}(0; x, t), \omega_{i2}(0; y, t)\big), & (x, y, t) \in K_{\varphi i}. \end{cases} \tag{21}$$

Означення 1. *Неперервним розв'язком задачі* (1), (2), (20) *будемо називати неперервний розв'язок системи* (13), *де* $(R_i u_j)(x, y, t)$ *визначаються формулами* (21).

Для існування неперервного розв'язку задачі (1), (2), (20) необхідним є виконання умов погодження нульового порядку

$$\begin{aligned} \mu_i(0, t) &= \nu_i(0, t), \quad i \in I_1, \\ \mu_i(y, 0) &= \varphi_i(0, y), \quad i \le k, \\ \nu_i(y, 0) &= \varphi_i(x, 0), \quad i \in \{s_1, \ldots, s_l\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Для встановлення класичної розв'язності задачі необхідним є виконання умов погодження 1-го порядку, які (у випадку існування неперервного розв'язку задачі (1), (2), (20)) мають вигляд

$$\begin{aligned} &\partial_y \varphi_i(0, y) = \partial_y \mu_i(y, 0), \quad i \le k, \\ &\partial_x \varphi_i(x, 0) = \partial_x \nu_i(x, 0), \quad i \in \{s_1, \ldots, s_l\}, \\ &\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\big(\partial_t \mu_j(y, 0) - \lambda_{i1}(0, 0)\partial_x \varphi_j(0, y) - \lambda_{i2}(y, 0)\partial_y \varphi_j(0, y)\big) = \\ &\qquad = f_i(0, y, 0, \varphi(0, y)), \quad i \le k, \\ &\sum_{j \in I_1}^{n} a_{ij}\big(\partial_t \nu_j(0, t) - \lambda_{i1}(0, t)\partial_x \nu_j(0, t) - \lambda_{i2}(0, t)\partial_y \mu_j(0, t)\big) = \\ &\qquad = f_i(0, 0, t, u(0, 0, t)), \quad i \in I_1. \end{aligned} \tag{23}$$

Справедливими є наступні твердження.

Теорема 3. *Нехай виконано умови* (10), (17) – (19), (22) *та припущення щодо гладкості функцій* λ_{ij}, *функції* f_i *неперервні за всіма аргументами та задовольняють глобальну умову Ліпшиця по* $u \in \mathbb{R}^n$ *рівномірно по* $(x, y, t) \in M$ *для кожного компакту* $M \in \overline{K}$, *а функції* φ_i, μ_i *та* ν_i *неперервні за всіма аргументами. Тоді задача* (1), (2), (20) *в області* $\overline{K}$ *має єдиний неперервний розв'язок.*

Теорема 4. *Нехай виконано умови теореми* 3 *і справджуються співвідношення* (23) *для всіх* x, y, $t \in \mathbb{R}_+$. *Крім цього, нехай функції* f_i *неперервно диференційовні за аргументами* x, y, u, *а функції* φ_i *та* μ_i *неперервно диференційовні. Тоді задача* (1), (2), (20) *в області* $\overline{K}$ *має єдиний класичний розв'язок.*

Доведення теорем 3 і 4 досить провести послідовно у кожній із областей

$K_j \subset K,\ j \geq 1$, де

$$K_j = \left\{(x, y, t) \in K \,|\, 0 < x < \omega_{n1}(t; j, j),\, 0 < y < \omega_{s_n 2}(t; j, j),\, 0 < t < j\right\},\ \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = K.$$

Оскільки $\overline{K}_j \bigcap \partial K$ є областю залежності розв'язків задачі (1), (2), (20) в K_j, то для доведення можна скористатися тими ж міркуваннями, що й при доведенні теорем 1 і 2.

***Зауваження* 1**. В усіх розглянутих задачах, аналогічно до одновимірного випадку, кількість крайових умов, які задаються на межі області, визначається кількістю характеристик системи (1), які виходять на цю межу. Проте відмінність від одновимірного випадку полягає в тому, що кожній характеристиці, як правило, відповідає більше, ніж одна невідома функція. Іншими словами, у багатовимірному випадку діагоналізація системи стосовно характеристичних напрямків є неможливою. Цей факт зумовлює основну трудність при заданні класичних крайових умов: усі хвилі, які визначаються системою (1), не повинні зазнавати впливу крайових умов на виході, а лише на вході. Для подолання цих труднощів ми запропонували деякий аналог діагоналізації в одномірному випадку, а саме „блочну діагоналізацію" системи (1), яка полягає у виборі діагонально-блочного вигляду матриці A. Це означає, що у головній частині системи диференціальних рівнянь (1) зв'язаними між собою є лише функції u_i, заіндексовані тими i, для яких коефіцієнти a_{ii} належать до одного й того ж ненульового блоку матриці A.

4. Мішана задача з нелокальними крайовими умовами. Методика коректної постановки мішаних задач для системи (1) дозволяє досліджувати також деякі некласичні задачі, зокрема, з нелокальними умовами, а також задачі з нелінійними умовами. Для прикладу в області Π розглянемо систему (1) з початковими умовами (2) та нелокальними крайовими умовами

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y,t) u_j \big|_{x=0} + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(y,t) u_j \big|_{x=1} + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 h_{ij}(x,y,t) u_j dx = H_i(y,t), \quad i \leq n. \tag{24}$$

Позначимо

$$B(y,t) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & c_{1,k+1} & \dots & c_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2k} & c_{2,k+1} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} & c_{n,k+1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що

$$\det B(y,t) \neq 0, \quad (y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \tag{25}$$

Тоді (24) можна записати у вигляді

$$\mu_i(y,t) = \frac{1}{\det B} \sum_{j=1}^{n} B_{ji}^{ad} \Bigg[H_j(y,t) - \sum_{s=k+1}^{n} b_{js}(y,t) u_s \Bigg|_{x=0} -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} c_{js}(y,t) u_s \Bigg|_{x=1} - \sum_{s=1}^{n} \int_0^1 h_{js}(x,y,t) u_s \, dx \Bigg], \quad i \leq n, \tag{26}$$

де $\mu_i(y,t) = u_i(0,y,t)$, $i \leq k$; $\mu_i(y,t) = u_i(1,y,t)$, $k+1 \leq i \leq n$; $\left\{B_{ij}^{ad}\right\}_{i,j=1}^{n}$ — приєднана матриця до B.

Задача (1), (2), (24) еквівалентна системі інтегро-операторних рівнянь

$$u_i(x, y, t) = \frac{1}{\det A_m} \sum_{j \in I_m} \left(A_{ji}^m\right)^{ad} \left[\sum_{s=1}^{k} a_{js}(R_j u_s)(x, y, t) + \right.$$

$$\left. + \int_{t_j(x,t)}^{t} f_j\big(\omega_{j1}(\tau; x, t), \omega_{j2}(\tau; y, t), \tau, u\big) d\tau \right], \quad i \in I_m, \tag{27}$$

де $\left\{\left(A_{ij}^m\right)^{ad}\right\}_{i, j \in I_m}$ — приєднана матриця до A_m, $1 \le m \le 4$,

$$(R_i u_j)(x, y, t) = \begin{cases} \mu_j\big(\omega_{i2}(t_i(x, t); y, t), t_i(x, t)\big), & (x, y, t) \in \Pi_{\mu i}, \\ \varphi_j\big(\omega_{i1}(0; x, t), \omega_{i2}(0; y, t)\big), & (x, y, t) \in \Pi_{\varphi i}, \end{cases} \tag{28}$$

функції μ_i, $i \le n$, визначаються формулами (26).

Означення 2. *Неперервним розв'язком задачі* (1), (2), (24) *будемо називати неперервний розв'язок системи інтегро-операторних рівнянь* (27), *в якій* $(R_i u_j)(x, y, t)$ *визначаються формулами* (28).

Теорема 5. *Нехай виконано умови* (3) – (5), (10), (11), (25), *усі функції* λ_{ij} *неперервні,* λ_{i1} *задовольняють умову Ліпшиця за змінною* $x \in [0, 1]$, *а* λ_{i2} — *за змінною* $y \in \mathbb{R}$ *рівномірно по* $t \in [0, T]$ *для кожного* $T > 0$, *функції* f_i *неперервні за всіма аргументами та задовольняють глобальну умову Ліпшиця по* $u \in \mathbb{R}^n$ *рівномірно по* $(x, y, t) \in M$ *для кожного компакту* $M \in \overline{\Pi}$, *а функції* φ_i, b_{ij}, c_{ij}, h_{ij} *та* H_i *неперервні за всіма аргументами. Якщо виконуються умови погодження нульового порядку*

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(y, 0)\varphi_j(0, y) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(y, 0)\varphi_j(1, y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 h_{ij}(x, y, 0)\varphi_j(x, y)\, dx = H_i(y, 0), \quad i \le n,$$

то задача (1), (2), (24) *в області* $\overline{\Pi}$ *має єдиний неперервний розв'язок.*

Доведення. Теорему досить довести для довільної фіксованої підобласті $\Pi_j \subset \Pi$, $j \ge 1$, де Π_j визначено формулами (16). Зафіксуємо $j \in \mathbb{N}$. Нехай Ω — область впливу початкових умов (2), заданих на $\overline{\Pi}_j \cap \{t = 0\}$, яка визначається конструктивно завдяки припущенням (3), (4) і (10). Очевидно, що звуження задачі (1), (2), (24) на область Ω є задачею Коші (1), (2) в Ω, існування та єдиність неперервного розв'язку якої випливає з теореми 1.

Нехай t_0 — довільне додатне число, яке справджує умову

$$\omega_{11}(t; 0, \tau) < \omega_{n1}(t; 1, \tau) \text{ для всіх } \tau \in [0, j] \text{ і для всіх } t \in [\tau, \tau + t_0].$$

Якщо $t \in [0, t_0]$, то виконуються рівності

$$\int_0^1 h_{ij} u_j\, dx = \int_0^{\omega_{11}(t;0,0)} h_{ij} u_j\, dx + \int_{\omega_{11}(t;0,0)}^{\omega_{n1}(t;1,0)} h_{ij} u_j\, dx + \int_{\omega_{n1}(t;1,0)}^{1} h_{ij} u_j\, dx, \quad i, \ j \le n,$$

де другий доданок у правій частині кожної рівності є відомою функцією (u_j, що входять до цього доданка, є розв'язками згаданої вище задачі Коші); крім того, функції $u_s\big|_{x=0}$, $k+1 \le s \le n$, та $u_s\big|_{x=1}$, $s \le k$, визначаються з системи (27), у якій $(R_i u_j)\,(x, y, t) = \varphi_j\big(\omega_{i1}(0; x, t),\ \omega_{i2}(0; y, t)\big)$. Позначимо $\Pi(t_0) = \Pi_j \cap \{t < t_0\}$. В області $\Pi(t_0)$ задача (1), (2), (24) еквівалентна до системи інтегральних рівнянь Вольтерри 2-го роду (і праві частини системи задають оператор P), для якої справедливою є локальна теорема існування та єдиності неперервного розв'язку. Справді, нехай u^1 та u^2 — довільні неперервні розв'язки вказаної системи рівнянь. Враховуючи оцінки

$$\left|\omega_{11}(t; 0, 0)\right| \le t \max_{[0,1]\times[0,j]} \left|\lambda_{11}\right|, \qquad \left|1 - \omega_{n1}(t; 0, 0)\right| \le t \max_{[0,1]\times[0,j]} \left|\lambda_{n1}\right|,$$

отримуємо

$$\max_{\overline{\Pi}(t_0)} \left\| Pu^1 - Pu^2 \right\| \le t_0 R \max_{\overline{\Pi}(t_0)} \left\| u^1 - u^2 \right\|,$$

де

$$R = Q\left[1 + n \max_{i,s,\overline{\Pi_j}\cap\{x=0\}} \left|B_{is}^{ad}\right| \left(\max_{\overline{\Pi_j}\cap\{x=0\}} |\det B|\right)^{-1} \times \right.$$

$$\left. \times \left(QSn + 2n \max_{[0,1]\times[0,j]} \left\{\left|\lambda_{11}\right|, \left|\lambda_{n1}\right|\right\} \max_{i,s,\overline{\Pi_j}} \left|h_{is}\right|\right)\right],$$

причому константу Q визначено формулою (8), а S є найбільшим максимальним значенням функцій $\left|b_{is}\right|$ і $\left|c_{pr}\right|$ в $\overline{\Pi_j} \cap \{x = 0\}$ по $s \le k$, $k+1 \le r \le n$ та $i,\ p \le n$. Покладаючи $t_0 = (2R)^{-1}$, на основі принципу стискуючих відображень встановлюємо існування єдиного неперервного розв'язку даної задачі в області $\overline{\Pi}(t_0)$ (локальний результат).

Щоб довести теорему для всієї області Π_j (глобальний результат), продовжимо по t отриманий локальний результат для області $\Pi(t_0)$ на область Π_j. Таке продовження потребує скінченної кількості (не більше, ніж $\lceil j/t_0 \rceil$) ітераційних кроків.

Оскільки j — довільне натуральне число, то доведення теореми завершено.

***Зауваження* 2**. Результати роботи можна поширити на системи гіперболічних рівнянь вигляду (1) з довільним числом просторових змінних.

***Зауваження* 3.** Умова глобальної ліпшицевості функцій f_i за змінною u обмежує ріст f_i по u при $|u| \to \infty$, не дозволяючи більш, ніж лінійне їх зростання. Цю умову можна послабити до наступної: для кожного компакту M в області розгляду задачі існує константа $C > 0$ така, що для всіх $i \le n$ та для будь-яких $u^1,\ u^2 \in \mathbb{R}^n$ виконуються нерівності

$$\left| f_i(x, y, t, u^1) - f_i(x, y, t, u^2) \right| \le C \log\log F\left(x, y, t, \left\|u^1 - u^2\right\|\right), \tag{29}$$

де $F(x, y, t, v)$ — деякий поліном по v із коефіцієнтами з простору $C(M)$. При цьому для доведення теорем 1 – 5, в яких f_i справджують умову (29), можна використати методику роботи [23].

1. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
2. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости // Уч. зап. Латв. ун-та. – 1958. – **20**, № 3. – С. 87 – 104.

3. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. – 1960. – **50**, № 4. – С. 423 – 442.
4. *Андрусяк Р. В., Кирилич В. М., Мышкис А. Д.* Локальная и глобальная разрешимость квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Диференц. уравнения. – 2006. – **42**, № 4. – С. 489 – 503.
5. *Кміть І. Я.* Нелокальна задача для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 9. – С. 1307 – 1311.
6. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* Непрерывные решения гиперболических систем квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. – 2003. – С. 337 – 351.
7. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Диференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 3. – С. 488 – 500.
8. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинним похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 415 с.
9. *Филимонов А. М.* Достаточные условия глобальной разрешимости смешанной задачи для квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными. – М., 1980. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 6 - 81.
10. *Friedrichs K. O.* Symmetric positive linear differential equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1958. – **11**. – P. 333 – 418.
11. *Hersh R.* Mixed problems in several variables // J. Math. and Mech. – 1963. – **12**. – P. 317 – 334.
12. *Higdon Robert L.* Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems // SIAM Rev. – 1986. – **28**. – P. 177 – 217.
13. *Kreiss H. O.* Initial boundary value problems for hyperbolic systems // Communs Pure and Appl. Math. – 1970. – **23**. – P. 277 – 289.
14. *Lax P., Phillips R. S.* Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators // Ibid. – 1960. – **13**. – P. 427 – 455.
15. *Majda A., Osher S.* Initial-boundary value problem for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary // Ibid. – 1975. – **28**. – P. 607 – 675.
16. *Metivier G.* The block structure condition for symmetric hyperbolic systems // Bull. London Math. Soc. – 2000. – **32**, № 6. – P. 689 – 702.
17. *Rauch J.* Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – **291**. – P. 167 – 187.
18. *Secchi P.* The initial-boundary value problem for linear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary of constant multiplicity // Different. and Integr. Equat. – 1996. – **9**. – P. 671 – 700.
19. *Secchi P.* Well-posedness of characteristic symmetric hyperbolic systems // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1996. – **134**, № 2. – P. 155 – 197.
20. *Secchi P.* Full regularity of solutions to a nonuniformly characteristic boundary value problem for symmetric hyperbolic systems // Adv. Math. Appl. – 2000. – **10**, № 1. – P. 39 – 55.
21. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
22. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 279 с.
23. *Kmit I.* Generalized solutions to singular initial-boundary hyperbolic problems with non-Lipschitz nonlinearities // Bull. Acad. serbe sci. et arts. Classe sci. math. et natur., sci. math. – 2006. – **133**, № 31. – P. 87 – 99.

Одержано 18.06.07