УДК 531.36

А. А. Мартынюк, В. И. Слынько (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗВЕНОМ

We present a new scheme of solving the problem of stability of a hybrid system based on the constructive creation of elements of a matrix-valued functional.

Наведено новий підхід до розв'язання задачі про стійкість гібридної системи, що ґрунтується на конструктивній побудові елементів матричнозначного функціонала.

1. Введение. Сложные системы с разнородными подсистемами принято называть гибридными. Многие системы большой размерности со сложной структурой состоят из подсистем меньшей размерности, которые объединяются в сложную крупномасштабную систему. Общие задачи качественного анализа гибридных систем удобно рассматривать в банаховом пространстве. Условия существования решений систем, состоящих из двух компонент, основываются на теореме Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора и интегральных представлениях решений уравнения сильно параболического типа. В работе [1] условия устойчивости гибридной системы получены на основе векторной функции Ляпунова и принципа сравнения. В работах [2, 3] намечен общий подход применения матричнозначного функционала Ляпунова при исследовании устойчивости по Ляпунову и практической устойчивости гибридной системы. Основной трудностью применения полученных результатов является отсутствие конструктивного подхода к построению векторного или матричнозначного функционала Ляпунова для рассматриваемой системы. Решение задачи об устойчивости упрощается, если независимые подсистемы имеют свойство экспоненциальной устойчивости, но при этом роль функций связи предполагается дестабилизирующей. В этом случае достаточные условия устойчивости весьма грубые и могут применяться лишь как ориентирующие в данном направлении.

Таким образом, построение качественной теории гибридных систем является одной из актуальных проблем механики и прикладной математики.

В данной статье приведен новый подход к решению задачи об устойчивости гибридной системы, основанный на конструктивном построении элементов матричнозначного функционала. Предложенный подход позволяет более полно учитывать динамические свойства решений обособленных подсистем гибридной системы.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать граничную задачу для системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u + B^T(x)y,$$

$$\frac{dy}{dt} = Cy + \int\limits_{\Omega} D(x)u(t,x)\,dx, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытая ограниченная односвязная область с границей класса $C^{2+\alpha}$, $B \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, $D \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$, C — постоянная $(m \times m)$-матрица, $\mathcal{L}$ — дифференциальное выражение второго порядка. Известно, что существует невырожденная $(m \times m)$-матрица W такая, что система (1) преобразованием $z = Wy$ приводится к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \mathcal{L}u + \overline{B}_1^T(x)z_1 + \overline{B}_2^T(x)z_2,\\
\frac{dz_1}{dt} &= C_1 z_1 + \int\limits_\Omega \overline{D}_1(x)u(t,x)\,dx,\\
\frac{dz_2}{dt} &= C_2 z_2 + \int\limits_\Omega \overline{D}_2(x)u(t,x)\,dx,\\
u|_{\partial\Omega} &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $z_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $z_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $m_1 + m_2 = m$, $\overline{B}_1(x)$ — m_1-вектор-функция, $\overline{B}_2(x)$ — m_2-вектор-функция, а матрицы C_1, C_2 имеют свойства

$$\max \Re\lambda_i(C_1) < 0,$$
$$\min \Re\lambda_i(C_2) \ge 0,$$

где C_1 — постоянная $(m_1 \times m_1)$-матрица, C_2 — постоянная $(m_2 \times m_2)$-матрица.

Поскольку в дальнейшем исследуется система (1), приведенная к виду (2), будем опускать черту над $\overline{D}_i$, $\overline{B}_i$, $i = 1, 2$.

Относительно правых частей системы (1) сделаем следующие дополнительные предположения.

Предположение 1. Система (1) такова, что:

а) оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j=1}^{m} \beta_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma(x)u;$$

б) существуют постоянные μ_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, такие, что

$$\mu_1 \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 \le \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mu_2 \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2, \qquad \mu_1,\ \mu_2 > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i^2(x) \le \mu_3,$$

$$\mu_4 \le \gamma(x) \le \mu_5, \qquad x \in \overline{\Omega}.$$

Заметим, что при выполнении условия б) независимая подсистема $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u$ является сильно параболической (см. [4]).

Задачи об устойчивости нулевого решения $u = 0$, $y = 0$ будем рассматривать относительно двух мер

$$\rho_0 = \rho = \left\{\int\limits_\Omega u^2 dx + \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2\right\}^{1/2}.$$

Приведем соответствующие определения, приняв во внимание результаты статьи [5].

Определение 1. *Решение* $u = 0$, $(z_1^T, z_2^T)^T = 0$ *системы* (2) *называется*:

1) *устойчивым по мерам* (ρ_0, ρ), *если для любых наперед заданных* $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ *такое, что для всех начальных усло-*

вий $u(t_0, x) = \varphi(x)$, $x \in \Omega$, $z_0 \in \mathbb{R}^m$, *удовлетворяющих неравенству* $\rho_0 < \delta$, *в любой момент времени* $t > t_0$ *имеет место неравенство* $\rho(t, z, u) < \varepsilon$;

2) *асимптотически устойчивым по мерам* (ρ_0, ρ), *если оно устойчиво по мерам* (ρ_0, ρ) *и* $\rho(t, z, u) \to 0$ *при* $t \to \infty$;

3) *экспоненциально устойчивым по мерам* (ρ_0, ρ), *если существуют положительные постоянные* λ, M *такие, что*

$$\rho(t, z, u) \le M\rho_0(t_0, z_0, \varphi)e^{-\lambda(t-t_0)}, \qquad t \ge t_0.$$

3. Достаточные условия устойчивости. Исследование устойчивости нулевого решения системы (2) будем проводить с помощью матричнозначного функционала $U(u, z) = \left[v_{ij}(\cdot)\right]_{i,j=1}^3$. Производная этого функционала вычисляется покомпонентно. Диагональные компоненты матричного функционала естественно принять в виде

$$v_{11}(u) = \int_\Omega u^2 dx, \qquad v_{22}(z_1) = z_1^T P z_1, \qquad v_{33}(z_2) = z_2^T z_2, \tag{3}$$

где P — положительно определенная симметричная матрица, удовлетворяющая матричному уравнению Ляпунова

$$C_1^T P + PC_1 = -Q,$$

а Q — положительно определенная симметричная матрица.

Внедиагональные элементы матричнозначного функционала $U(u, z_1, z_2)$ будем искать в виде

$$v_{12}(u, z_1) = z_1^T \int_\Omega P_{12}(x)u(t, x)dx, \qquad v_{13}(u, z_2) = z_2^T \int_\Omega P_{13}(x)u(t, x)dx,$$
$$v_{23}(z_1, z_2) = z_1^T P_{23} z_2, \tag{4}$$

где $P_{12}(x) \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{m_1})$, $P_{13}(x) \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^{m_2})$, P_{23} — постоянная матрица.

Для $\eta > 0$ определим скалярный функционал $v(u, z_1, z_2, \eta) = \eta^T U(u, z_1, z_2)\eta$, для которого справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть элементы* $v_{ij}(t, \cdot)$ *функционала* $U(u, z)$ *вычислены согласно* (3), (4). *Тогда для скалярного функционала* $v(u, y, \eta)$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$\lambda_m(H^T \underline{C} H)\rho \le v(u, z_1, z_2, \eta) \le \lambda_M(H^T \overline{C} H)\rho,$$

где

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1 & -\|P_{12}(x)\|_{L^2(\Omega)} & -\|P_{13}(x)\|_{L^2(\Omega)} \\ -\|P_{12}(x)\|_{L^2(\Omega)} & \lambda_m(P) & -\|P_{23}\| \\ -\|P_{13}(x)\|_{L^2(\Omega)} & -\|P_{23}\| & 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & \|P_{12}(x)\|_{L^2(\Omega)} & \|P_{13}(x)\|_{L^2(\Omega)} \\ \|P_{12}(x)\|_{L^2(\Omega)} & \lambda_M(P) & \|P_{23}\| \\ \|P_{13}(x)\|_{L^2(\Omega)} & \|P_{23}\| & 1 \end{pmatrix},$$

$$H = \operatorname{diag}(\eta_1, \eta_2, \eta_3), \qquad \|P(x)\|_{L^2(\Omega)} = \left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n P_i^2(x)dx\right\}^{1/2},$$

Доказательство. Использовав неравенство Коши – Буняковского, оценим внедиагональне элементы $v_{1j}(u, z_j)$, $j = 1, 2$, матричнозначного функционала

$$-\left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n P_{i1j}^2(x)\,dx\right\}^{1/2}\left\{\int_\Omega u^2(x)\,dx\right\}^{1/2} \le v_{1j}(u, z_j) \le$$

$$\le \left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^n P_{i1j}^2(x)\,dx\right\}^{1/2}\left\{\int_\Omega u^2(x)\,dx\right\}^{1/2}, \quad j = 1, 2.$$

Из этой оценки и оценок для $v_{2j}(u, z_1)$, $j = 2, 3$, характерных для квадратичных форм, утверждение следует очевидным образом.

Для решения задачи построения внедиагональных элементов $v_{ij}(\cdot)$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \ne j$, потребуется следующее предположение.

Предположение 2. Граничная задача для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{gathered}
\mathcal{M} P_{12}(x) + C_1^T P_{12}(x) + \frac{\eta_2}{\eta_1} P D_1(x) + \frac{\eta_1}{\eta_2} B_1(x) + \frac{\eta_3}{\eta_1} P_{23} D_2(x) = 0, \\
\mathcal{M} P_{13}(x) + C_2^T P_{13}(x) + \frac{\eta_3}{\eta_1} D_2(x) + \frac{\eta_1}{\eta_3} B_2(x) + \frac{\eta_2}{\eta_1} P_{23}^T D_1(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\
(C_1^T P_{23} + P_{23} C_2)\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_2 \int_\Omega P_{12}(x) B_2^T(x)\,dx + \eta_1\eta_3 \int_\Omega B_1(x) P_{13}^T(x)\,dx = 0, \\
P_{12}\big|_{\partial\Omega} = 0, \\
P_{13}\big|_{\partial\Omega} = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

где $\mathcal{M}$ — формально сопряженное дифференциальное выражение к $\mathcal{L}$, имеет решение $P_{12}(x)$, $P_{13}(x) \in C^2(\Omega)$ такое, что

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n P_{1ji}^2(x)\,dx < \infty, \quad j = 2, 3.$$

Условия устойчивости нулевого решения $u = 0$, $(z_1^T, z_2^T)^T = 0$ системы (1) содержатся в следующем утверждении.

Теорема 1. *Предположим, что линейная гибридная система* (1) *такова, что существуют решение* $P(x) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющее условиям предположения* 2, *вектор* $\eta \in \mathbb{R}_+^2$ *и постоянные* $\nu > 0$, $c_1 > 0$ *такие, что выполняется неравенство*

$$2\eta_1^2 \int_\Omega u \mathcal{L} u\,dx + 2\eta_1\eta_2 \int_\Omega D_1^T(x) u\,dx \int_\Omega P_{12}(x) u\,dx +$$

$$+ 2\eta_1\eta_3 \int_\Omega D_2^T(x) u\,dx \int_\Omega P_{13}(x) u\,dx \le -c\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

и матрицы

$$\eta_1\eta_2 \int_\Omega \left(P_{12}(x) B_1^T(x) + B_1(x) P_{12}^T(x)\right) dx - Q\eta_2^2,$$

$$\eta_1\eta_3 \int_\Omega \left(P_{13}(x) B_2^T(x) + B_2(x) P_{13}^T(x)\right) dx + \eta_3^2 (C_2^T + C_2)$$

отрицательно полуопределенные (*отрицательно определенные*).

Тогда состояние равновесия $u = 0$, $(z_1^T, z_2^T)^T = 0$ *устойчиво* (*экспонен-*

циально устойчиво) по мерам (ρ_0, ρ).

Доказательство. В силу предложения 1 скалярный функционал $v(u, z, \eta)$ положительно определенный по мере ρ и допускает бесконечно малый высший предел по мере ρ_0. Оценим полную производную этого функционала вдоль решений системы (2):

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dv(u, z_1, z_2, \eta)}{dt}\right|_{(2)} &= \eta_1^2 \int_\Omega 2u\left(\mathcal{L}u + B_1^T(x) z_1 + B_2^T(x) z_2\right) dx \; + \\
&+ 2\eta_1\eta_2 \left(C_1 z_1 + \int_\Omega D_1(x) u\, dx\right)^T \int_\Omega P_{12}(x) u\, dx \; + \\
+ 2\eta_1\eta_2 z_1^T \int_\Omega P_{12}(x)\left(\mathcal{L}u + B_1^T(x) z_1 + B_2^T(x) z_2\right) dx \; &+ 2\eta_2^2 z_1^T P\left(C_1 z_1 + \int_\Omega D_1(x) u\right) dx \; + \\
+ 2\eta_3^2 z_2^T \left(C_2 z_2 + \int_\Omega D_2(x) u\, dx\right) &+ 2\eta_2\eta_3 \left(C_1 z_1 + \int_\Omega D_1(x) u\, dx\right)^T P_{23} z_2 \; + \\
+ 2\eta_2\eta_3 z_1^T P_{23} \left(C_2 z_2 + \int_\Omega D_2(x) u\, dx\right) &+ 2\eta_1\eta_3 \left(C_2 z_2 + \int_\Omega D_2(x) u\, dx\right)^T \int_\Omega P_{13}(x) u\, dx \; + \\
+ 2\eta_1\eta_3 z_2^T \int_\Omega P_{13}(x)\left(\mathcal{L}u + B_1^T(x) z_1 + B_2^T(x) z_2\right) dx \; &= 2\eta_1^2 \int_\Omega u\mathcal{L}u\, dx \; + \\
+ 2\eta_1\eta_2 \int_\Omega D_1^T(x) u\, dx \int_\Omega P_{12}(x) u\, dx \; &+ 2\eta_1\eta_3 \int_\Omega D_2^T(x) u\, dx \int_\Omega P_{13}(x) u\, dx \; + \\
&+ z_1^T \left(\eta_1\eta_2 \int_\Omega \left(P_{12}(x) B_1^T(x) + B_1(x) P_{12}^T(x)\right) dx - Q\eta_2^2\right) z_1 \; + \\
&+ z_2^T \left(\eta_1\eta_3 \int_\Omega \left(P_{13}(x) B_2^T(x) + B_2(x) P_{13}^T(x)\right) dx + \eta_3^2 (C_2^T + C_2)\right) z_2 \; + \\
+ 2z_1^T \int_\Omega \Big(\eta_1\eta_2 \left(M P_{12}(x) + C_1^T P_{12}(x)\right) &+ \eta_2^2 P D_1(x) + \eta_1^2 B_1(x) + \eta_3\eta_2 P_{23} D_2(x)\Big) u\, dx \; + \\
+ 2z_2^T \int_\Omega \Big(\eta_1\eta_3 \left(\mathcal{M} P_{13}(x) + C_2^T P_{13}(x)\right) &+ \eta_3^2 D_2(x) + \eta_1^2 B_2(x) + \eta_2\eta_3 P_{23}^T D_1(x)\Big) u\, dx \; + \\
+ 2z_1^T \left(\left(C_1^T P_{23} + P_{23} C_2\right)\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_2 \int_\Omega P_{12}(x) B_2^T(x) dx \right. &\left. + \eta_1\eta_3 \int_\Omega B_1(x) P_{13}^T(x) dx\right) z_2 \le \\
\le -c\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda_M \left(\eta_1\eta_2 \int_\Omega \left(P_{12}(x) B_1^T(x) + B_1(x) P_{12}^T(x)\right) dx - Q\eta_2^2\right) &\|z_1\|^2 \; + \\
+ \lambda_M \left(\eta_1\eta_3 \int_\Omega \left(P_{13}(x) B_2^T(x) + B_2(x) P_{13}^T(x)\right) dx + \eta_3^2 (C_2^T + C_2)\right) &\|z_2\|^2.
\end{aligned}
$$

Отметим, что при оценке полной производной функционала $v(u, y, \eta)$ применена формула интегрирования по частям

$$
\int_\Omega P(x)\mathcal{L}u\, dx = \int_\Omega \mathcal{M} P(x) u\, dx.
$$

Докажем теперь устойчивость состояния равновесия $u = 0$, $(z_1^T, z_2^T)^T = 0$ системы (1) по мерам (ρ_0, ρ). Для заданных $t_0 \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ выберем $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\lambda_m(H^T \underline{C} H)}{\lambda_M(H^T \overline{C} H)}\varepsilon$. Пусть $u(t_0, x) = \varphi(x)$, $(z_1^T(t_0), z_2^T(t_0))^T = z_0$ и

$$\rho_0 = \left\{ \int_\Omega \varphi^2(x)\,dx + \| z_1 \|^2 + \| z_2 \|^2 \right\}^{1/2} < \delta(\varepsilon).$$

Тогда

$$\rho(t)\lambda_m(H^T \underline{C} H) \leq v(u(t), z_1(t), z_2(t), \eta) \leq$$
$$\leq v(\varphi, z_0, \eta) \leq \rho_0 \lambda_M(H^T \overline{C} H) < \lambda_m(H^T \underline{C} H)\varepsilon,$$

поэтому $\rho(t, z, u) < \varepsilon$, что доказывает устойчивость по мерам (ρ_0, ρ).

Докажем экспоненциальную устойчивость состояния равновесия $u = 0$, $(z_1^T, z_2^T)^T = 0$ системы (1). В силу условий теоремы и оценки производной функционала $v(u, z_1, z_2, \eta)$ вдоль решений системы (1) для функции

$$\gamma(t) = v\big(u(t; t_0, \varphi, z_0),\ z_1(t; t_0, \varphi, z_0),\ z_2(t; t_0, \varphi, z_0)\big)$$

справедлива цепочка неравенств

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} \leq -\beta\rho_0 \leq -\frac{\beta}{\lambda_M(H^T \overline{C} H)}\gamma(t),$$

где β — положительная постоянная, откуда находим

$$\rho(t) \leq \frac{\lambda_m(H^T \underline{C} H)}{\lambda_M(H^T \overline{C} H)}\rho_0 \exp\left(-\frac{\beta}{\lambda_M(H^T \overline{C} H)}(t - t_0) \right).$$

Теорема доказана.

4. О конструктивном решении системы (5). Далее рассмотрим вопрос о решении системы интегро-дифференциальных уравнений (5) для определения внедиагональных элементов матричнозначного функционала Ляпунова. Введем линейный оператор $\mathcal{F}$ на пространстве $\mathcal{E}$ $(m_1 \times m_2)$-матриц по формуле $\mathcal{F}X = C_1^T X + X C_2$. Если $\lambda_i(C_1) + \lambda_j(C_2) \neq 0$ при всех $i, j = 1, 2, \ldots, m$, где $\lambda_i(\cdot)$ — собственные значения матрицы $(\cdot)$, то оператор $\mathcal{F}$ обратим. Из последнего уравнения системы (5) находим

$$P_{23} = -\frac{\eta_1}{\eta_3}\int_\Omega \mathcal{F}^{-1}(P_{12}(x)B_2^T(x))\,dx - \frac{\eta_1}{\eta_2}\int_\Omega \mathcal{F}^{-1}(B_1(x)P_{13}^T(x))\,dx.$$

Подставляя это выражение в первое и второе уравнения системы (5), получаем уравнения

$$\mathcal{M}P_{12} + C_1^T P_{12} + \frac{\eta_2}{\eta_1}PD_1(x) + \frac{\eta_1}{\eta_2}B_1(x) -$$
$$-\int_\Omega \mathcal{F}^{-1}(P_{12}(\xi)B_2^T(\xi))D_2(x)\,d\xi - \frac{\eta_3}{\eta_1}\int_\Omega \mathcal{F}^{-1}(B_1(\xi)P_{13}^T(\xi))D_2(x)\,d\xi = 0,$$

$$\mathcal{M}P_{13} + C_2^T P_{13} + \frac{\eta_3}{\eta_1}D_2(x) + \frac{\eta_1}{\eta_3}B_2(x) -$$
$$-\frac{\eta_2}{\eta_1}\int_\Omega \mathcal{F}^{-1}(P_{12}(\xi)B_2^T(\xi))^T D_1(x)\,d\xi - \int_\Omega \mathcal{F}^{-1}(B_1(\xi)P_{13}^T(\xi))^T D_1(x)\,d\xi = 0.$$

Введем обозначения

$$\mathcal{P}(x) = (P_{12}^T(x), P_{13}^T(x))^T, \qquad C(x) = \operatorname{diag}[C_1^T, C_2^T],$$

$$\mathcal{G}(x) = -\left[\frac{\eta_2}{\eta_1} PD_1(x) + \frac{\eta_1}{\eta_2} B_1(x),\ \frac{\eta_3}{\eta_1} D_2(x) + \frac{\eta_1}{\eta_3} B_2^T(x)\right]^T$$

и оператор $E(x, \xi)$, действующий по правилу

$$E(x,\xi)\mathcal{P}(\xi) = \begin{pmatrix} -\mathcal{F}^{-1}(P_{12}(\xi)B_2^T(\xi))D_2(x) - \mathcal{F}^{-1}(B_1(\xi)P_{13}^T(\xi))D_2(x) \\ -\mathcal{F}^{-1}(P_{12}(\xi)B_2^T(\xi))^T D_1(x) - \mathcal{F}^{-1}(B_1(\xi)P_{13}^T(\xi))^T D_1(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений (5) сводится к граничной задаче вида

$$\begin{gathered} \mathcal{M}\mathcal{P}(x) + C\mathcal{P}(x) = \mathcal{G}(x) + \int_\Omega E(x,\xi)\mathcal{P}(\xi)d\xi, \qquad x \in \Omega, \\ \mathcal{P}(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{6}$$

Рассмотрим однородную граничную задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{gathered} \mathcal{M}\mathcal{P}(x) + C\mathcal{P}(x) = 0, \qquad x \in \Omega, \\ \mathcal{P}(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{7}$$

и предположим, что для задачи (7) существует функция Грина $\Gamma(x, \xi)$. При этом граничная задача для уравнения (6) сводится к интегральному уравнению

$$\mathcal{P}(x) = \int_\Omega \Gamma(x,\xi)\left(\mathcal{G}(\xi) + \int_\Omega E(\xi,\tau)\mathcal{P}(\tau)d\tau\right)d\xi. \tag{8}$$

После несложных преобразований уравнения (8) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mathcal{P}(x) = \tilde{\mathcal{G}}(x) + \int_\Omega \tilde{\Gamma}(x,\tau)\mathcal{P}(\tau)d\tau, \tag{9}$$

где

$$\tilde{\mathcal{G}}(x) = \int_\Omega \Gamma(x,\xi)\mathcal{G}(\xi)d\xi, \qquad \tilde{\Gamma}(x,\tau) = \int_\Omega \Gamma(x,\xi)E(\xi,\tau)d\xi.$$

Предположим, что $\tilde{\mathcal{G}}(x) \in L^2(\Omega)$, а ядро $\tilde{\Gamma}(x,\tau)$ является ядром со слабой особенностью. В этом случае уравнение (9) приводится к уравнению

$$\mathcal{P}(x) = \tilde{\mathcal{G}}_r(x) + \int_\Omega \tilde{\Gamma}_r(x,\tau)\mathcal{P}(\tau)d\tau, \tag{10}$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_r(x) \in L^2(\Omega)$, $\Gamma_r(x,\tau) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Пусть $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, k$, — замкнутая ортонормированная система функций из $L^2(\Omega)$. Тогда функции $\psi_i(x)\psi_j(s)$, $i, j = 1, 2, \ldots$, образуют замкнутую систему функций из $L^2(\Omega\times\Omega)$. Поскольку $\tilde{\Gamma}_r(x,s) \in L^2(\Omega\times\Omega)$, ядро $\tilde{\Gamma}_r(x,\tau)$ можно разложить в матричный ряд, сходящийся в среднеквадратичном:

$$\tilde{\Gamma}_r(x,s) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \Gamma_{ij}^r \psi_i(x)\psi_j(s), \tag{11}$$

где Γ_{ij}^r — постоянные матрицы. Уравнение замкнутости для этого ряда имеет вид

$$\int_\Omega\int_\Omega \Gamma_r^T(x,s)\Gamma_r(x,s)\,dx\,ds = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\Gamma_{ij}^r)^T\Gamma_{ij}^r. \tag{12}$$

Далее для матриц будем использовать норму $\|A\|_E = \sqrt{\operatorname{tr}(A^TA)}$. Тогда из равенства (12) следует

$$\int_\Omega\int_\Omega \|\Gamma_r(x,s)\|_E^2\,dx\,ds = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E^2. \tag{13}$$

Поскольку ряд в правой части (13) сходится, существует натуральное число N такое, что

$$\int_\Omega\int_\Omega \left\|\Gamma_r(x,s) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{ij}^r\psi_i(x)\psi_j(s)\right\|_E^2 dx\,ds < \frac{1}{4}. \tag{14}$$

Обозначим

$$\tilde{\Gamma}_r' = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{ij}^r\psi_i(x)\psi_j(s), \qquad \tilde{\Gamma}_r'' = \tilde{\Gamma}_r - \tilde{\Gamma}_r'.$$

Тогда интегральное уравнение (10) можно привести к виду

$$\mathcal{P}(x) - \int_\Omega \tilde{\Gamma}_r''(x,\tau)\mathcal{P}(\tau)\,d\tau = \tilde{\mathcal{G}}_r(x) + \int_\Omega \tilde{\Gamma}_r'(x,\tau)\mathcal{P}(\tau)\,d\tau.$$

Если $\tilde{\Gamma}_{rm}''$ — m-итерированное ядро, то

$$\mathcal{P}(x) = \tilde{\mathcal{G}}_r(x) + \int_\Omega \tilde{\Gamma}_r'(x,\tau)\mathcal{P}(\tau)\,d\tau + \sum_{m=0}^{\infty}\int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s)\left(\tilde{\mathcal{G}}_r(s) + \int_\Omega \tilde{\Gamma}_r'(s,\tau)\mathcal{P}(\tau)\,d\tau\right)ds. \tag{15}$$

В дальнейшем также целесообразно рассматривать „укороченное” интегральное уравнение

$$\mathcal{P}_M(x) = \tilde{\mathcal{G}}_r(x) + \int_\Omega \tilde{\Gamma}_r'(x,\tau)\mathcal{P}(\tau)\,d\tau + \sum_{m=0}^{M}\int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s)\left(\tilde{\mathcal{G}}_r(s) + \int_\Omega \tilde{\Gamma}_r'(s,\tau)\mathcal{P}_M(\tau)\,d\tau\right)ds. \tag{16}$$

Отметим, что уравнения (15) и (16) являются уравнениями с вырожденными ядрами. Далее опишем процедуру решения этих уравнений и укажем оценку погрешности

$$\|\mathcal{P} - \mathcal{P}_M\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega \|\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}_M(x)\|^2\,dx.$$

Уравнение (15) перепишем так:

$$\mathcal{P}(x) = \tilde{\mathcal{G}}_r(x) + \sum_{m=0}^{\infty}\int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s)\tilde{\mathcal{G}}_r(s)\,ds +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\Gamma_{ij}^r\psi_i(x) + \sum_{m=0}^{\infty}\int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s)\Gamma_{ij}^r\,ds\,\psi_i(x)\right]\psi_j(\tau)\mathcal{P}(\tau)\,d\tau,$$

а уравнение (16) — в виде

$$\mathcal{P}_M(x) = \tilde{\mathcal{G}}_r(x) + \sum_{m=0}^{M}\int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s)\tilde{\mathcal{G}}_r(s)\,ds +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left[\Gamma_{ij}^r \ \psi_i(x) + \sum_{m=0}^M \int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s)\Gamma_{ij}^r \, ds \, \psi_i(x) \right] \psi_j(\tau) \mathcal{P}_M(\tau) d\tau.$$

Введем обозначения

$$X_k = \int_\Omega \psi_k(\tau) \mathcal{P}(\tau) d\tau,$$

$$\mathcal{A}_{kj} = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left[I + \sum_{m=0}^\infty \int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s) ds \right] \Gamma_{ij}^r \psi_i(x) \psi_k(x) dx,$$

$$\mathcal{B}_k = \int_\Omega \psi_k(x) \left(\tilde{\mathcal{G}}_r(x) + \sum_{m=0}^\infty \int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s) \tilde{\mathcal{G}}_r(s) ds \right) dx,$$

$$X_k^{(M)} = \int_\Omega \psi_k(\tau) \mathcal{P}_M(\tau) d\tau,$$

$$\mathcal{A}_{kj}^{(M)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left[I + \sum_{m=0}^M \int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s) ds \right] \Gamma_{ij}^r \psi_i(x) \psi_k(x) dx,$$

$$\mathcal{B}_k^{(M)} = \int_\Omega \psi_k(x) \left(\tilde{\mathcal{G}}_r(x) + \sum_{m=0}^\infty \int_\Omega \tilde{\Gamma}_{rm}''(x,s) \tilde{\mathcal{G}}_r(s) ds \right) dx.$$

Интегральные уравнения (15) и (16) эквивалентны системам линейных алгебраических уравнений

$$X_k = \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_{kj} X_j + \mathcal{B}_k,$$
$$X_k^{(M)} = \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_{kj}^{(M)} X_j^{(M)} + \mathcal{B}_k^{(M)}. \tag{17}$$

Обозначим

$$X = \left[X_1^T, \ldots, X_N^T \right], \qquad X^{(M)} = \left[(X_1^{(M)})^T, \ldots, (X_N^{(M)})^T \right]^T,$$

$$\mathcal{A} = \left[\mathcal{A}_{ij} \right]_{i,j=1}^N, \qquad \mathcal{A}^{(M)} = \left[\mathcal{A}_{ij}^{(M)} \right]_{i,j=1}^N,$$

$$\mathcal{B} = \left[\mathcal{B}_1^T, \ldots, \mathcal{B}_N^T \right]^T, \qquad \mathcal{B}^{(M)} = \left[(\mathcal{B}_1^T)^{(M)}, \ldots, (\mathcal{B}_N^T)^{(M)} \right]^T.$$

Дальнейшей целью является установление оценки погрешностей $\varepsilon_k = \left\| X_k - X_k^{(M)} \right\|$. Очевидно, что

$$X_k - X_k^{(M)} = \sum_{i=1}^N (\mathcal{A}_{ij} - \mathcal{A}_{ij}^{(M)}) X_j^{(M)} + \sum_{i=1}^N \mathcal{A}_{ij} (X_j - X_j^{(M)}) + \mathcal{B}_k - \mathcal{B}_k^{(M)}.$$

Отсюда следует

$$(\mathcal{I} - \mathcal{A})(X - X^{(M)}) = (\mathcal{A} - \mathcal{A}^{(M)}) X^{(M)} + \mathcal{B} - \mathcal{B}^{(M)}.$$

Поскольку матрица $(\mathcal{I} - \mathcal{A})$ обратима, то

$$\varepsilon_k \le \left\| X - X^{(M)} \right\| \le \left\| (\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} \right\|_E \left(\left\| \mathcal{A} - \mathcal{A}^{(M)} \right\|_E \left\| X^{(M)} \right\| + \left\| \mathcal{B} - \mathcal{B}^{(M)} \right\|_E \right).$$

Оценим нормы $\left\| \mathcal{A} - \mathcal{A}^{(M)} \right\|_E$ и $\left\| \mathcal{B} - \mathcal{B}^{(M)} \right\|_E$. Имеем

$$\left\|\mathcal{A}_{kj}-\mathcal{A}_{kj}^{(M)}\right\|_E = \left\|\sum_{i=1}^{N}\sum_{m=M+1}^{\infty}\int_\Omega\int_\Omega \tilde{\Gamma}''_{rm}(x,s)\Gamma_{ij}^r\psi_i(x)\psi_k(x)\,dx\,ds\right\|_E \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N}\sum_{m=M+1}^{\infty}\int_\Omega\int_\Omega \left\|\tilde{\Gamma}''_{rm}(x,s)\right\|_E\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\left|\psi_i(x)\psi_k(x)\right|dx\,ds.$$

Обозначим $\gamma_{ki} = \sqrt{\int_\Omega \psi_i^2(x)\psi_j^2(x)\,dx}$ и, использовав неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\left\|\mathcal{A}_{kj}-\mathcal{A}_{kj}^{(M)}\right\|_E \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{m=M+1}^{\infty}\left\|\tilde{\Gamma}''_{rm}\right\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\gamma_{kj}\mu^{1/2}(\Omega)\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E,$$

где

$$\left\|\tilde{\Gamma}''_{rm}\right\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \int_\Omega\int_\Omega \left\|\tilde{\Gamma}''_{rm}(x,s)\right\|_E^2 dx\,ds \le \frac{1}{2^{2m}},$$

$\mu(\Omega)$ — лебегова мера множества Ω. Отсюда следует оценка

$$\left\|\mathcal{A}-\mathcal{A}^{(M)}\right\|_E^2 = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\mathcal{A}_{kj}-\mathcal{A}_{kj}^{(M)}\right\|_E^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2^M}\gamma_{kj}\mu^{1/2}(\Omega)\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\right)^2 = \frac{\mu(\Omega)}{2^{2M}}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_{kj}\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\right)^2.$$

Аналогично устанавливается оценка

$$\left\|\mathcal{B}-\mathcal{B}^{(M)}\right\|_E^2 \le \frac{N^2}{2^{2M}}\left\|\tilde{\mathcal{G}}_r\right\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_k \le \frac{\left\|(\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}\right\|_E\left(\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\mu(\Omega)\gamma_{kj}\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\right)^2\right)^{1/2}\left\|X^{(M)}\right\|_E + N\left\|\tilde{\mathcal{G}}_r\right\|_{L^2(\Omega)}\right)}{2^M}.$$

Оценим норму $\left\|(\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}\right\|$, использовав представление

$$\mathcal{I}-\mathcal{A} = \mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)}+\mathcal{A}^{(M)}-\mathcal{A} = (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)})(\mathcal{I}-(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)})^{-1}(\mathcal{A}^{(M)}-\mathcal{A})).$$

Поскольку норма матрицы $\left\|\mathcal{A}-\mathcal{A}^{(M)}\right\|$ мала при больших M, то

$$(\mathcal{I}-(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)})^{-1}(\mathcal{A}^{(M)}-\mathcal{A}))^{-1} = \mathcal{I} +$$

$$+ (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)})^{-1}(\mathcal{A}^{(M)}-\mathcal{A}) + (\mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)})^{-1}(\mathcal{A}^{(M)}-\mathcal{A})^2 + \ldots .$$

Поэтому справедлива оценка

$$\left\|(\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}\right\|_E \le \frac{\left\|(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)})^{-1}\right\|_E}{1-\left\|(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)})^{-1}\right\|_E\left\|\mathcal{A}-\mathcal{A}^{(M)}\right\|_E}.$$

Окончательно получим

$$\varepsilon_k \le \frac{\left\|(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)})^{-1}\right\|_E \left(\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\mu(\Omega)\gamma_{kj}\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\right)^2\right)^{1/2} \left\|X^{(M)}\right\|_E + N\left\|\tilde{\mathcal{G}}_r\right\|_{L^2(\Omega)}\right)}{2^M\left(1-\frac{\left\|(\mathcal{I}-\mathcal{A}^{(M)})^{-1}\right\|_E}{2^M}\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_{kj}\,\mu(\Omega)\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\right)^2\right)^{1/2}\right)}. \tag{18}$$

Далее рассмотрим разность $\mathcal{P}(x)-\mathcal{P}_M(x)$ и оценим ее по норме $L^2(\Omega)$:

$$\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}_M(x) = \sum_{m=M+1}^{\infty}\int_\Omega \tilde{\Gamma}''_{rm}(x,s)\tilde{\mathcal{G}}_r(s)\,ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\Gamma_{ij}^r\psi_i(x) + \sum_{m=0}^{\infty}\int_\Omega \tilde{\Gamma}''_{rm}(x,s)\,ds\,\Gamma_{ij}^r\psi_i(x)\right](X_j - X_j^{(M)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{m=M+1}^{\infty}\int_\Omega \tilde{\Gamma}''_{rm}(x,s)\,ds\,\Gamma_{ij}^r\psi_i(x)X_j^{(M)}.$$

Отсюда находим

$$\|\mathcal{P}(x)-\mathcal{P}_M(x)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{1}{2^M}\left\|\tilde{\mathcal{G}}_r\right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mu^2(\Omega)(1+2\mu(\Omega))\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\varepsilon^* +$$

$$+ \frac{1}{2^M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\mu^3(\Omega)\left\|X_j^{(M)}\right\|_E,$$

где через ε^* обозначена правая часть неравенства (18). Изложенные оценки позволяют сформулировать условия асимптотической устойчивости гибридной системы (1). Введем обозначения

$$\mathcal{P}_M(x) = \left((P_{12}^{(M)})^T,\ (P_{13}^{(M)})^T\right)^T,$$

$$P_{23}^{(M)} = -\frac{\eta_1}{\eta_3}\int_\Omega \mathcal{F}^{-1}(P_{12}^{(M)}(x)B_2(x))\,dx - \frac{\eta_1}{\eta_2}\int_\Omega \mathcal{F}^{-1}(B_1^T(x)(P_{13}^{(M)}(x))^T)\,dx,$$

$$\Delta = \frac{1}{2^M}\left\|\tilde{\mathcal{G}}_r\right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mu^2(\Omega)(1+2\mu(\Omega))\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\varepsilon^* +$$

$$+ \frac{1}{2^M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\|\Gamma_{ij}^r\right\|_E\mu^3(\Omega)\left\|X_j^{(M)}\right\|_E,$$

$$\Delta^* = \left\|\mathcal{F}^{-1}\right\|_E\Delta\left(\frac{\eta_1}{\eta_3}\|B_2\|_{L^2(\Omega)} + \frac{\eta_1}{\eta_2}\|B_1\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

***Следствие* 1.** *Пусть система уравнений* (1) *такова, что при достаточно большом натуральном* M *выполняются следующие условия*:

1) *выполняется неравенство* $\lambda_i(C_1)+\lambda_j(C_2) \ne 0$;

2) *система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение* $X_j^{(M)}$, $j = 1,\ldots,N$;

3) *матрицы*

$$\overline{C}^* = \begin{pmatrix} 1 & \|P_{12}^{(M)}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta & \|P_{13}^{(M)}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta \\ \|P_{12}^{(M)}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta & \lambda_m(P) & \|P_{23}^{(M)}\|_E + \Delta^* \\ \|P_{13}^{(M)}\|_{L^2(\Omega)} + \Delta & \|P_{23}^{(M)}\|_E + \Delta^* & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{C}^* = \begin{pmatrix} 1 & -\|P_{12}^{(M)}\|_{L^2(\Omega)} - \Delta & -\|P_{13}^{(M)}\|_{L^2(\Omega)} - \Delta \\ -\|P_{12}^{(M)}\|_{L^2(\Omega)} - \Delta & \lambda_m(P) & -\|P_{23}^{(M)}\|_E - \Delta^* \\ -\|P_{13}^{(M)}\|_{L^2(\Omega)} - \Delta & -\|P_{23}^{(M)}\|_E - \Delta^* & 1 \end{pmatrix}$$

положительно определены;

4) *существует положительная постоянная c такая, что выполняются неравенства*

$$2\eta_1^2 \int_\Omega u\mathcal{L}\, u\, dx + 2\eta_1\eta_2 \int_\Omega D_1^T(x) u\, dx \int_\Omega P_{12}^{(M)}(x) u\, dx +$$
$$+ 2\eta_1\eta_3 \int_\Omega D_2(x) u\, dx \int_\Omega P_{13}^{(M)}(x) u\, dx +$$
$$+ 2\Delta\Big(\eta_1\eta_2 \|D_1\|_{L^2(\Omega)} + \eta_1\eta_3 \|D_2\|_{L^2(\Omega)} \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \le -c\|u\|^2_{L^2(\Omega)};$$

5) *матрицы*

$$\eta_1\eta_2 \int_\Omega \Big(P_{12}^{(M)}(x) B_1(x) + B_1^T(x)(P_{12}^{(M)}(x))^T\Big) dx + 2\eta_1\eta_2 \|B_1\|_{L^2(\Omega)} \Delta I - Q\eta_2^2,$$

$$\eta_1\eta_3 \int_\Omega \Big(P_{13}^{(M)}(x) B_2(x) + B_2^T(x)(P_{13}^{(M)}(x))^T\Big) dx + 2\eta_1\eta_3 \|B_2\|_{L^2(\Omega)} \Delta I + \eta_3^2 (C_2^T + C_2)$$

отрицательно полуопределенные (*отрицательно определенные*).

Тогда состояние равновесия $u = 0$, $(z_1^T, z_2^T)^T = 0$ *системы* (1) *устойчиво* (*экспоненциально устойчиво*) *по мерам* (ρ_0, ρ).

Пример. Исследуем устойчивость состояния равновесия линейной гибридной системы, состоящей из двух уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x) y(t), \qquad u(t_0, x) = \varphi(x),$$
$$\frac{dy}{dt} = c^2 y + \int_0^l d(x) u(t, x)\, dx, \qquad y(t_0) = y_0,$$
$$u(t, 0) = u(t, l) = 0,$$

где $y_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \in C[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Пусть $\eta_1 = \eta_2 = 1$. Построим матричнозначный функционал $U(u, y)$ с элементами

$$v_{11}(u) = \int_0^l u^2(t, x)\, dx, \qquad v_{22}(y) = y^2, \qquad v_{12}(u, y) = y \int_0^l P(x) u(t, x)\, dx,$$

где $P(x) \in C^2[0, l]$ — решение граничной задачи

$$a^2 \frac{d^2 P}{dx^2} + c^2 P(x) + b(x) + d(x) = 0,$$
$$P(0) = P(l) = 0.$$

Нетрудно показать, что если $cl/\pi a$ не является целым числом, то

$$P(x) = \frac{\sin(cx/a)\int_0^l \sin(c(l-s)/a)(b(s)+d(s))ds}{a^2 \sin(cl/a)} - \int_0^x \frac{\sin(c(x-s)/a)}{a^2}(b(s)+d(s))ds.$$

С учетом известного неравенства Фридрихса

$$\int_0^l u^2(t,x)dx \le \frac{l^2}{\pi^2}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

условия экспоненциальной устойчивости по мерам (ρ_0, ρ) принимают вид

$$-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 + \left\{\int_0^l d^2(x)dx\right\}^{1/2} \left\{\int_0^l P^2(x)dx\right\}^{1/2} < 0,$$

$$c^2 + \int_0^l P(x)b(x)dx < 0.$$

Покажем, что в системе (1) возможна стабилизация состояния равновесия под влиянием связей между подсистемами. Пусть $b(x) = b_0$, $d(x) = d_0$, где b_0, d_0 — постоянные, $(cl)/a = (k+1/2)\pi$, k — неотрицательное целое число. Тогда

$$P(x) = \frac{b_0 + d_0}{ac}\left[1 + (-1)^{k+1}\sin(cx/a) - \cos(cx/a)\right].$$

Условия асимптотической устойчивости принимают вид

$$-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 + \frac{|d_0||b_0+d_0|}{ac}\left(2l^2 + (-1)^k \frac{5al}{c}\right)^{1/2} < 0,$$

$$c^2 + \frac{b_0(b_0+d_0)}{ac}\left[l + (-1)^k \frac{2a}{c}\right] < 0.$$

Эти условия выполняются, например, при следующих значениях параметров: $a = c = 1$, $l = \pi/2$, $b_0 = 1$, $d_0 = -1{,}3$. В этом случае связи между подсистемами являются стабилизирующими.

В заключение отметим, что предложенный подход анализа устойчивости гибридных систем является развитием исследований [6 – 9], связанных с разработкой метода матричных функций Ляпунова в теории устойчивости движения.

1. *Бартышев А. В.* Применение вектор-функции Ляпунова для исследования устойчивости двухкомпонентных систем // Вектор-функции Ляпунова и их построение. – Новосибирск: Наука, 1980. – С. 237 – 257.
2. *Вуйичич В. А., Мартынюк А. А.* Некоторые задачи механики неавтономных систем. – Белград: Мат. ин-т САНУ, 1991. – 109 с.
3. *Мартынюк А. А.* О практической устойчивости гибридных систем // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 2. – С. 101 – 107.
4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
5. *Martynyuk A. A.* The Lyapunov matrix function and stability of hybrid systems // Nonlinear Anal. – 1986. – **10**, № 12. – P. 1449 – 1457.
6. *Слынько В. И.* Об условиях существования решений одного класса линейных гибридных систем // Доп. НАН України. – 2006. – № 5. – С. 53 – 58.
7. *Слынько В. И.* Об условиях существования слабых решений одного класса линейных гибридных систем // Там же. – № 9. – С. 56 – 62.
8. *Мартынюк А. А.* К теории прямого метода Ляпунова // Докл. Академии наук. – 2006. – **408**, № 3. – С. 309 – 312.
9. *Slyn'ko V. I.* Stability condition for linear impulsive systems with delay // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, № 6. – P. 697 – 704.

Получено 13.11.07