УДК 517.98

А. Г. Руткас (Харьков. нац. ун-т)

РАЗРЕШИМОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ

Local theorems on the existence of solutions of the Cauchy problem for the singular equations of the form $\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f(t,u)$ in Banach spaces are proved. The conditions for the solvability depend on a type of the singularity of the sheaf $\lambda A + B$ of closed linear operators A, B. Examples and applications to finite-dimensional differential algebraic equations, infinite systems of differential equations, and partial differential equations of non-Kovalevskaya type are presented.

Доведено локальні теореми існування розв'язків задачі Коші для сингулярних рівнянь вигляду $\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f(t,u)$ у банахових просторах. Умови розв'язності залежать від типу сингулярності жмутка $\lambda A + B$ лінійних замкнених операторів A, B. Наведено приклади та застосування до скінченновимірних диференціально-алгебраїчних рівнянь, нескінченних систем диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними не типу Ковалевської.

1. Введение. В настоящей статье исследуются дифференциально-алгебраические уравнения и уравнения в частных производных не типа Ковалевской, абстрактная форма которых имеет вид

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f(t,u). \tag{1.1}$$

Здесь A, B — линейные замкнутые операторы из комплексного банахова пространства X в комплексное банахово пространство Y, $f(t,u)\colon \Theta \to Y$ — нелинейное отображение,$\Theta \subset \mathbb{R} \times X$. В конечномерных пространствах теория линейных и полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений содержит много результатов в случае регулярного матричного пучка $\lambda A + B$ (см. монографию [1] и библиографию в ней). В случае сингулярного матричного пучка $\lambda A + B$ классические результаты для линейного уравнения принадлежат Л. Кронекеру [2, 3]. В бесконечномерном случае (1.1) называется также полулинейным уравнением Соболева; различные классы таких уравнений и приложения исследовались в [4 – 7] в предположении регулярности операторного пучка $\lambda A + B$, т. е. нетривиальности открытого множества $\rho = \rho(A,B) = \{\lambda\}$ регулярных точек λ: $(\lambda A + B)^{-1} \in \in L(Y,X)$. В настоящей статье рассматриваются уравнения (1.1) с *сингулярным пучком* $\lambda A + B$ таким, что $\rho(A,B) = \varnothing$. Хотя упрощения некоторых условий для конечномерных дифференциально-алгебраических уравнений (1.1) отдельно не обсуждаются, применения абстрактных теорем к конечномерным уравнениям продемонстрированы на соответствующих примерах.

Обозначим через D_A, $D_B(\subset X)$ области определения операторов A, B и через D их пересечение, т. е. область определения пучка:

$$(\lambda A + B)\colon D \to Y \quad (\forall \lambda), \quad D = D_A \cap D_B \neq \{0\}. \tag{1.2}$$

Аннулирующей функцией пучка $\lambda A + B$ назовем определенную в области $\Omega(\subset \mathbb{C})$ функцию $v(\lambda)\colon \Omega \to D$ такую, что

© А. Г. РУТКАС, 2008

$$(\lambda A+B)v(\lambda)=0 \quad \forall\lambda\in\Omega; \quad v(\lambda)\neq 0. \tag{1.3}$$

Дефектная функция $f(\lambda)\colon \mathcal{E}\to Y^*(\mathcal{E}\subset\mathbb{C})$ — это такая функция $f(\lambda)\neq 0$, что

$$\langle(\lambda A+B)u, f(\lambda)\rangle=0 \quad \forall\lambda\in\mathcal{E} \quad \forall u\in D. \tag{1.4}$$

Здесь $\langle y,f\rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $f\in Y^*$ на элементе $y\in Y$. Аннулирующая функция v(1.3) (соответственно дефектная f (1.4)) называется *сингулярной*, если ее область определения плотна в $\mathbb{C}$, т. е. $\overline{\Omega}=\mathbb{C}(\overline{\mathcal{E}}=\mathbb{C})$. Существование хотя бы одной сингулярной функции, аннулирующей или дефектной, является достаточным признаком сингулярности пучка. Классический пример в гильбертовом пространстве $H=X=Y$ порождается замкнутым симметрическим оператором T $(\subset T^*)$ с ненулевыми индексами дефекта: выбирая для каждого $\lambda\colon \operatorname{Im}\lambda\neq 0$ ненулевой вектор $f(\lambda)$ в дефектном подпространстве $N_\lambda=\left[(T-\lambda E)D_T\right]^{\perp}$, получаем сингулярную дефектную функцию $f(\lambda)$ пучка $T-\lambda E$ и соответственно аннулирующую функцию $v(\mu)=f(\overline{\mu})$ пучка $(T^*-\mu E)$, $\operatorname{Im}\mu\neq 0$, если $f(\lambda)\in D_{T^*}$. В конечномерном случае пучок $\lambda A+B\colon X\to Y$ сингулярен, если и только если он имеет полиномиальные сингулярные функции — одну или несколько [2, 3]. При этом существуют разложения пространств X, Y в прямые суммы подпространств, которые расщепляют пучок на два блока — регулярный и чисто сингулярный. Подобное расщепление сингулярного пучка замкнутых операторов в бесконечномерных пространствах может не иметь места и потому является предположением. Приведем его точную формулировку [8].

Пучок $\lambda A+B$ из X в Y допускает RS-*расщепление*, если существуют прямые разложения пространств на замкнутые подпространства

$$X=X_s\dot{+}X_r, \qquad Y=Y_s\dot{+}Y_r \tag{1.5}$$

такие, что пары подпространств (X_s,Y_s) и (X_r,Y_r) *инвариантны* относительно отображений A,B, причем пучок λA_s+B_s, *индуцированный* в подпространствах (X_s,Y_s), является *простым сингулярным*, а пучок λA_r+B_r, индуцированный в подпространствах (X_r,Y_r), — регулярным. Обозначим через $S\colon X\to X_s$, $P\colon X\to X_r$ и $F\colon Y\to Y_s$, $Q\colon Y\to Y_r$ две пары взаимно дополнительных проекторов на подпространства (1.5), $E_X=S+P$, $E_Y=F+Q$. Инвариантность пар подпространств означает, что $P(D_A)\subset D_A$, $P(D_B)\subset D_B$, $QA=AP$, $FA=AS$, $QB=BP$, $FB=BS$. Индуцированные пучки действуют как отображения

$$\lambda A_s+B_s=\lambda A+B\colon S(D)\to Y_s, \qquad \lambda A_r+B_r=\lambda A+B\colon P(D)\to Y_r. \tag{1.6}$$

Простота сингулярного пучка λA_s+B_s означает, что от него нельзя отщепить нетривиальный регулярный блок.

Заметим, что если T — симметрический оператор с ненулевыми индексами дефекта, то RS-расщепление сингулярного пучка $T-\lambda E$ связано с нахождением максимальной самосопряженной части и простой симметрической части оператора T [9] (п. 103).

2. Некоторые типы сингулярностей, сингулярные цепочки. Для исследования конкретных классов уравнений (1.1) удобно выделить несколько типов сингулярностей. Множество $D_0=\operatorname{Ker}A\cap\operatorname{Ker}B$ назовем *0-сингулярным подпрост-*

ранством; пучок $\lambda A + B$ обладает *0-сингулярностью*, если D_0 нетривиально. Пучок обладает *полиномиальной аннулирующей сингулярностью*, если существует аннулирующий полином $v(\lambda)$ степени $k \geq 1$, удовлетворяющий (1.3) на нетривиальном открытом множестве Ω. Понятно, что полином $v(\lambda)$ в этом случае аннулирует пучок при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, поэтому аннулирующий на Ω полином всегда продолжается до сингулярной функции

$$v(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \lambda^i x_i, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x_k \neq 0, \quad k \geq 1. \tag{2.1}$$

Ясно, что $x_i \in D$ и (2.1) эквивалентно системе равенств

$$Bx_0 = 0, \qquad Ax_0 = Bx_1, \qquad Ax_1 = Bx_2, \ldots, Ax_{k-1} = Bx_k, \qquad Ax_k = 0. \tag{2.2}$$

Следующие линейные оболочки образуют пару конечномерных подпространств, инвариантную относительно пучка:

$$X(v) = \operatorname{span}\{x_i\}_0^k, \qquad Y(v) = \operatorname{span}\{Ax_i\}_0^{k-1} = \operatorname{span}\{Bx_i\}_1^k,$$
$$(\lambda A + B)X(v) \subset Y(v). \tag{2.3}$$

Поскольку существует многочлен минимальной степени [2, 3] с векторными коэффициентами из $X(v)$, который аннулирует пучок $\lambda A + B$, можно в качестве аннулирующего многочлена $v(\lambda)$ (2.1) выбрать именно минимальный, сужая в случае необходимости инвариантную пару подпространств $X(v), Y(v)$. Тогда системы векторов $\{x_i\}_0^k$, $\{Ax_i\}_0^{k-1}$ линейно независимы, образуют базисы своих линейных оболочек $X(v)$, $Y(v)$ соответственно. Относительно этих базисов матрица индуцированного пучка $(\lambda A + B)\colon X(v) \to Y(v)$ является канонической сингулярной клеткой Л. Кронекера $\{\sigma_{ij}\}$ размера $k \times (k+1)$, у которой ненулевые элементы есть $\sigma_{ii} = \lambda$, $\sigma_{i,i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, k$. Цепочка векторов $\{x_i\}_0^k$, для которой выполнены равенства (2.2) и векторы $\{Ax_i\}_0^{k-1}$ линейно независимы, называется *базисной сингулярной цепочкой* длины $k+1$ для пучка $\lambda A + B$.

Пусть в нетривиальной окрестности $|\lambda| < r$ сходятся ряды

$$v(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n x_n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n Ax_n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n Bx_n. \tag{2.4}$$

Сумма первого ряда $v(\lambda)$ аннулирует пучок $\lambda A + B$ в смысле (1.3), если и только если векторные коэффициенты удовлетворяют соотношениям $Bx_0 = 0$; $Ax_{k-1} = Bx_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Система векторов $\{x_k\}_0^\infty$, удовлетворяющих указанным соотношениям, в [10] названа A-жордановой цепочкой оператора B, а в [11] — системой из собственного и присоединенных векторов (с.п.в.) пучка $B - \lambda A$ в точке $\lambda = 0$. Если ряды (2.4) сходятся при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $Ax_{k-1} = Bx_k$, $Bx_0 = 0$, то будем называть систему векторов $\{x_k\}_0^\infty$ *бесконечной сингулярной цепочкой пучка* $\lambda A + B$ *в точке* $\lambda = 0$ и одновременно бесконечной сингулярной цепочкой пучка $A + \mu B$ в точке $\mu = \infty$. Сингулярная цепочка $\{x_n\}_0^\infty$ называется *базисной*, если системы векторов $\{x_n\}_0^\infty, \{Ax_n\}_0^\infty$ образуют базисы Рисса своих линейных замкнутых оболочек $X(v), Y(v)$ соответственно. Относительно пары этих базисов индуцированный пучок $(\lambda A + B)\colon X(v) \to Y(v)$ задается бесконечной матрицей

$$\lambda E + \mathcal{T}; \qquad \tau_{ij} = 0, \quad j \neq i+1, \quad \tau_{i,i+1} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2.5}$$

Матрица $\mathcal{T}$ является бесконечной клеткой Жордана.

Если рассматривать операторы, определяемые матрицами E, $\mathcal{T}$ не в паре базисов $\{x_n\}$, $\{Ax_n\}$, а в одном координатном базисе $\{e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)\}$ пространства l_2, то соответствующий пучок ограниченных операторов $\lambda E + \mathcal{T}$ оказывается регулярным. Последовательность $\{e_n\}_1^\infty$ является несингулярной бесконечной жордановой цепочкой оператора $\mathcal{T}$, ряд $\sum_0^\infty (-1)^n \lambda^n x_n = v(\lambda)$ сходится к аннулирующей функции пучка $\lambda E + \mathcal{T}$ лишь в круге $|\lambda| < 1$.

Рассмотрим в пространстве l_2 матричный пучок

$$\lambda E + \hat{\mathcal{T}}; \qquad \hat{\tau}_{n,j} = 0, \quad j \neq n+1; \qquad \hat{\tau}_{n,n+1} = n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Соответствующий замкнутый оператор $\hat{\mathcal{T}}$ неограничен, последовательность векторов $x_n = \dfrac{1}{n!} e_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, является бесконечной сингулярной цепочкой пучка $\lambda E + \hat{\mathcal{T}}$ в точке $\lambda = 0$. Сумма ряда

$$v(\lambda) = \sum_0^\infty (-1)^n \lambda^n x_n = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} e_{n+1}, \quad x_n = \frac{e_{n+1}}{n!}, \tag{2.7}$$

существует и аннулирует пучок $\lambda E + \hat{\mathcal{T}}$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Иначе говоря, в l_2 оператор $\hat{\mathcal{T}}$ из (2.6) не имеет регулярных точек.

Для дефектных сингулярностей и дефектных функций $f(\lambda)$ (1.4) со значениями в пространстве функционалов Y^* можно ввести понятия и получить свойства, двойственные по отношению к изложенным выше для аннулирующих сингулярностей и сингулярных цепочек. Практически двойственность используется с помощью следующего факта. Если существуют сопряженные операторы A^*, B^* и $f(\lambda)$ является аннулирующей функцией сопряженного пучка, так что $(\bar{\lambda} A^* + B^*) f(\lambda) = 0$, то $f(\lambda)$ — дефектная функция пучка $\lambda A + B$ в смысле (1.4).

3. Уравнения с 0-сингулярностью. Рассмотрим случай нулевой сингулярной компоненты в RS-разложении (1.5), (1.6) пучка $\lambda A + B\colon X_s = \operatorname{Ker} A \bigcap \operatorname{Ker} B$, $A_s = B_s = 0$. Относительно регулярной компоненты $\lambda A_r + B_r\colon PD \to Y_r$, $PD \subset X_r$, предполагается существование и ограниченность резольвенты для больших λ:

$$\left\| (\lambda A_r + B_r)^{-1} \right\| \leq C, \quad |\lambda| > M. \tag{3.1}$$

Тогда в пространствах X_r, Y_r существуют две пары взаимно дополнительных проекторов $P_k\colon PD \to D_k$, $Q_k\colon Y_r \to Y_k$, $k = 1, 2$, и прямые разложения линеалов

$$PD = D_1 \dot{+} D_2 \quad (D_k \subset PD), \qquad Y_r = Y_1 \dot{+} Y_2, \tag{3.2}$$

относительно которых регулярная компонента расщепляется на два блока

$$\lambda A_k + B_k = (\lambda A_r + B_r)\colon D_k \to Y_k;$$
$$A_2 = 0, \quad \exists A_1^{-1} \in L(Y_1, X_r), \quad \exists B_2^{-1} \in L(Y_2, X_r). \tag{3.3}$$

Конструктивно проекторы P_k, Q_k могут быть вычислены контурным интегрированием [7] (подраздел 2.3), а подпространства D_k, Y_k явно задаются формулами

$$Y_1 = A(PD), \qquad D_1 = (\lambda_0 A_r + B_r)^{-1} Y_1, \qquad D_2 = \operatorname{Ker} A_r \cap PD, \quad Y_2 = BD_2. \tag{3.4}$$

Заметим, что P, Q, F, S, Q_k — ограниченные проекторы.

Теперь мы можем сформулировать два условия разрешимости задачи Коши для уравнения (1.1).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1°. *Функция $f(t,u)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ в области $0 \le t \le \tau$, $\|u - u_0\| \le r$, $u_0 \in D$. Для пучка $\lambda A + B$ в RS-разложении* (1.5), (1.6) *регулярная компонента удовлетворяет условию* (3.1) *и сингулярная компонента тождественно вырождена* ($A_s = 0$, $B_s = 0$).

2°. *Существуют разложения проектора $S = S_1 + S_2$ и соответственно сингулярного пространства $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}$ в прямую сумму замкнутых подпространств такие, что $X_{s_k} = S_k X_s$, $k = 1, 2$, и отображение*

$$\Phi \equiv (F + Q_2)\left(\frac{\partial f}{\partial u}(0, u_0) - B\right)\colon X_{s_1} \dot{+} D_2 \to Y_s \dot{+} Y_2 \tag{3.5}$$

имеет ограниченный обратный оператор $\Phi^{-1} \in L(Y_s \dot{+} Y_2, X)$.

Если $(F + Q_2) f(0, u_0) = BP_2 u_0$, то существует решение $u(t)$, $0 \le t \le \tau_0$, $\tau_0 > 0$, уравнения (1.1), *удовлетворяющее начальному условию $u(0) = u_0$.*

Доказательство. Напомним, что F — проектор на сингулярное подпространство Y_s (1.5), Q_2 — проектор на подпространство Y_2, порождаемое аннулятором $\operatorname{Ker} A_r$ регулярной компоненты пучка (см. (3.4)). Если $u \in D$, то $u = u_s + u_r$, где $u_r = Pu$, $u_s = Su \in D$. В силу (3.2), (3.3) $u_r = u_1 + u_2$, $u_k \in D_k \subset D$. Далее, $u_s = u_{s_1} + u_{s_2}$, $u_{s_k} \in X_{s_k}$, $k = 1, 2$, причем вследствие замкнутости операторов A, B их общий аннулятор $X_s (\supset X_{s_k})$ содержится в линеале D. Представим вектор $u \in D$ в виде

$$u = u_{s_1} + u_{s_2} + A_1^{-1} v_1 + B_2^{-1} v_2, \qquad v_1 = A_1 u_1 = Q_1 A u, \quad v_2 = B_2 u_2 = Q_2 B u. \tag{3.6}$$

Применим последовательно к уравнению (1.1) проекторы F, Q_2, Q_1 с учетом равенств $FA = 0$, $FB = 0$, $Q_1 B u = B_1 u_1$. Получим систему трех уравнений

$$v_2 - Q_2 f(t,u) = 0, \qquad F f(t,u) = 0, \qquad \frac{dv_1}{dt} + B_1 A_1^{-1} v_1 = Q_1 f(t,u), \tag{3.7}$$

где u имеет представление (3.6). Первое и второе уравнения запишем в виде алгебраического уравнения

$$\psi(t, v_1, v_2, u_{s_1}, u_{s_2}) = 0, \qquad \psi \equiv \begin{pmatrix} Ff(t,u) \\ v_2 - Q_2 f(t,u) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Поскольку Φ (3.5) обратим, оператор

$$V = \frac{\partial \psi}{\partial(u_{s_1}, v_2)}(0, S_1 u_0, S_2 u_0, Q_1 A u_0, Q_2 B u_0) = \Phi(E_{s_1} \oplus B_2^{-1})$$

имеет ограниченный обратный $V^{-1} \in L(Y_s \dot{+} Y_2, X_{s_1} \dot{+} Y_2)$. Здесь E_{s_1} — единичный оператор в X_{s_1}. Действительно, оператор $V^{-1} = (E_{s_1} \oplus B_2)\Phi^{-1}$ определен всюду на $Y_s \dot{+} Y_2$ и замкнут вместе с $B_2 \colon D_2 \to Y_2$. По условию $\psi(0, S_1 u_0, S_2 u_0, Q_1 A u_0, Q_2 B u_0) = 0$. На основании теоремы о неявной функции [12] (теоремы 25–27) существуют положительные числа τ_1, r_1, r_2 и непрерывные функции $u_{s_1} = \varphi_1(t, v_1, u_{s_2})$, $v_2 = \varphi_2(t, v_1, u_{s_2})$ такие, что равенство (3.8) выполняется в некоторой области

$$\Omega = \big\{(t, u_{s_2}, v_1) \colon 0 \le t \le \tau_1,\ \|v_1 - Q_1 A u_0\| \le r_1,\ \|u_{s_2} - S_2 u_0\| \le r_2\big\}.$$

Функции φ_1, φ_2 имеют непрерывные производные в Ω. Подставив эти функции в третье уравнение (3.7), получим задачу Коши

$$\frac{dv_1}{dt} + T v_1(t) = h(t, v_1, u_{s_2}), \quad v_1(0) = Q_1 A u_0, \tag{3.9}$$

где $h \equiv Q_1 f(t, \varphi_1(t, v_1, u_{s_2}) \dot{+} u_{s_2} \dot{+} A_1^{-1} v_1 \dot{+} B_2^{-1} \varphi_2(t, v_1, u_{s_2}))$. Ясно, что $T \in L(Y_1)$, а функция $h(t, v_1, u_{s_2})$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную Фреше $\dfrac{\partial h}{\partial v_1}$ в области Ω. Выберем непрерывную функцию $g(t) \in C\big([0, \tau_1], X_{s_2}\big)$ так, чтобы $g(0) = S_2 u_0$, и подставим $u_{s_2} = g(t)$ в (3.9). Тогда задача (3.9) имеет единственное (при выбранной $g(t)$) непрерывно дифференцируемое решение $v_1(t)$ на нетривиальном интервале $0 \le t \le \tau_0 (\le \tau_1)$. Функция $u(t) = \varphi_1(t, v_1(t), g(t)) \dot{+} g(t) \dot{+} A_1^{-1} v_1(t) \dot{+} B_2^{-1} \varphi_2(t, v_1(t), g(t))$ является искомым локальным решением задачи Коши для уравнения (1.1).

***Замечание* 3.1.** По построению $u(t)$ имеет следующую гладкость: проекции $S_k u(t)$, $P_2 u(t)$ непрерывны, проекция $P_1 u(t)$ непрерывно дифференцируема. Как следует из доказательства, решение $u(t)$ не является единственным, так как зависит от свободного функционального параметра $g(t)$. Параметр отсутствует, если $X_{s_2} = \{0\}$, и хотя в этом случае единственность решения $u(t)$ из приведенного доказательства не усматривается, ее можно получить иначе. Именно, можно перейти к интегральной форме третьего уравнения в (3.7) и далее анализировать разрешимость всех трех уравнений одновременно по аналогии с доказательством теоремы 2 из [13], не разрешая предварительно два алгебраических уравнения.

В случае конечномерных сингулярных подпространств, в частности конечномерных пространств X, Y, условия теоремы 3.1 предполагают соотношение размерностей $\dim X_s \ge \dim Y_s$. Следующая теорема предусматривает противоположное включение $\dim X_s \le \dim Y_s$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* 1° *теоремы* 3.1. *Предположим, что существуют разложения проектора* $F = F_1 + F_2$ *и соответственно сингулярного пространства* $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}$ *в прямую сумму замкнутых подпространств* $Y_{s_k} = F_k Y_s$ *такие, что отображение*

$$\Phi \equiv (F_1 + Q_2)\left[\frac{\partial f}{\partial u}(0, u_0) - B\right]\colon X_s \dot{+} D_2 \to Y_{s_1} \dot{+} Y_2 \tag{3.10}$$

имеет ограниченный обратный оператор $\Phi^{-1} \in L(Y_{s_1} \dot{+} Y_2,\ X_s \dot{+} \overline{D_2})$. *Если равенство* $F_2 f(t, u) = 0$ *выполнено для всех* t, u, *а равенство* $(F_1 + Q_2)[f(0, u_0) - Bu_0] = 0$ *справедливо в точке* $(0, u_0)$, *то уравнение* (1.1) *имеет единственное локальное решение с начальным условием* $u(0) = u_0$.

Доказательство может быть получено путем соответствующих изменений в доказательстве теоремы 3.1.

Пример **3.1.** Система дифференциально-алгебраических уравнений

$$\sqrt{u_3} - u_1 u_5 = 0, \qquad u_2 u_4 - \sqrt{u_3} = 0, \qquad u_1 u_5 - u_2 u_4 = 0,$$

$$u_1^2 u_3 - te^{6t} = u_3, \qquad \frac{du_4}{dt} + u_4 = tu_1 u_4, \qquad \frac{du_5}{dt} = t^2 u_2 u_5 \tag{3.11}$$

в векторной форме представляется как уравнение (1.1), где

$$X = \mathbb{C}^5, \qquad Y = \mathbb{C}^6, \qquad u(t) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^{\mathrm{tr}}(t) \in \mathbb{C}^5, \quad f(t, u) \in \mathbb{C}^6.$$

Компонентами f являются функции $f_1 = \sqrt{u_3} - u_1 u_5$, $f_2 = u_2 u_4 - \sqrt{u_3}$, $f_3 = u_1 u_5 - u_2 u_4$, $f_4 = u_1^2 u_3 - te^{6t}$, $f_5 = tu_1 u_4$, $f_6 = t^2 u_2 u_5$. Здесь выбирается такая ветвь функции $\sqrt{x}$, для которой $\sqrt{1} = +1$. Заметим, что $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ и вследствие линейной зависимости любое из первых трех уравнений можно было бы удалить из системы. Однако, мы сохраняем все шесть уравнений для демонстрации общности метода, тем более что в случае удаления оставшаяся система из пяти дифференциально-алгебраических уравнений также имеет сингулярную линейную часть. Элементы прямоугольных (6×5)-матриц A, B таковы: $a_{54} = a_{65} = 1$, $b_{43} = b_{54} = 1$, остальные элементы равны нулю. Обозначим через $e_1 = (10000)^{\mathrm{tr}}, \ldots, e_5 = (00001)^{\mathrm{tr}}$ координатный базис в $\mathbb{C}^5 = X$, а через $h_1, \ldots, h_6$ соответственно координатный базис в $\mathbb{C}^6 = Y$. Имеем разложения (1.5) такие, что $X_s = \operatorname{Ker} A \bigcap \operatorname{Ker} B = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$, $Y_s = \operatorname{Ker} A^* \bigcap \operatorname{Ker} B^* = \operatorname{span}\{h_1, h_2, h_3\}$, $X_r = \operatorname{span}\{e_3, e_4, e_5\}$, $Y_r = \operatorname{span}\{h_4, h_5, h_6\}$. Операторы A_r, B_r (1.6) представляются в указанных базисах пространств X_r, Y_r матрицами

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\colon \{e_3, e_4, e_5\} \to \{h_4, h_5, h_6\}.$$

В разложении (3.2) имеем $PD = X_r$, $D_1 = X_1 = \operatorname{span}\{e_4, e_5\}$, $D_2 = X_2 = \operatorname{span}\{e_3\} = \operatorname{Ker} A_r$, $Y_1 = \operatorname{span}\{h_5, h_6\}$, $Y_2 = \operatorname{span}\{h_4\}$. Проекторы $F\colon Y \to Y_s(1.5)$, $F_2\colon Y \to Y_{s_2}$, $Q_2\colon Y \to Y_2$ из теоремы 3.2 имеют в базисе $\{h_i\}_1^6$ представление в виде (6×6)-матриц $F = \{f_{ij}\}$, $F_2 = \{f_{ij}^2\}$, $Q_2 = \{q_{ij}^2\}$ с элементами $f_{11} = f_{22} = f_{33} = 1$, $f_{11}^2 = f_{12}^2 = f_{13}^2 = 1$, $q_{44}^2 = 1$ и остальными элементами, равными нулю. Здесь проекционные матрицы F, Q_2 определяются из требований разложимости (1.5), (3.2), проекционная матрица F_2 однозначно задается условиями $F_2 f(t, u) \equiv 0$, $F_2 F = F_2$. Для компонент начального вектора $u_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03}, u_{04}, u_{05})$ равенство $(F_1 + Q_2)[f(0, u_0) - Bu_0] = 0$ из условия теоремы 3.2 эквивалентно зависимостям $u_{01}^2 = 1$, $u_{02}u_{04} = \sqrt{u_{03}} = u_{01}u_{05}$, если только $u_{03} \neq 0$. Потребовав выполнение этих зависимостей, получим следующее матричное представление для оператора (3.10) относительно указанных базисов:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -u_{05} & 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{u_{03}}} \\ 0 & u_{04} & -\dfrac{1}{2\sqrt{u_{03}}} \\ u_{05} & -u_{04} & 0 \\ 2u_{01}u_{03} & 0 & 0 \end{bmatrix} : \{e_1, e_2, e_3\} \to \{h_1, h_2, h_3, h_4\}.$$

Предположим далее, что $u_{04} \neq 0$, $u_{05} \neq 0$. Тогда (4×3)-матрица Φ имеет максимальный ранг 3, и поскольку $\dim Y_2 = 1$, $\dim Y_{s_1} = \operatorname{rank}(F - F_2) = 2$, отображение Φ (3.10) является взаимно однозначным. По теореме 3.2 при указанных ограничениях на начальный вектор u_0 и надлежащей гладкости функции $f(t,u)$ система (3.11) имеет единственное локальное решение в окрестности вектора u_0.

***Пример* 3.2.** Рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - u(t,x) = f(t,u), \qquad 0 \le t \le \tau, \quad 0 \le x \le 1, \tag{3.12}$$

$$u(t,1) = eu(t,0), \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{3.13}$$

Пусть $u_0(x) \in C^2[0,1]$, вещественная функция $f(t,u)$ непрерывна вместе со своей производной на множестве $[0,\tau] \times \{u \in \mathbb{R} \colon a \le u \le b\}$, где $a < \inf u_0(x) - r$, $b > \sup u_0(x) + r$, $r > 0$. Выберем $X = Y = C[0,1]$. Отображение $f(t,u) \colon [0,\tau] \times$ $\times \{u \in X \colon \|u - u_0\| \le r\} \to Y$ является непрерывным и имеет непрерывную производную Фреше $\dfrac{\partial f}{\partial u}(t,u)$ в указанной области. Введем в $C[0,1]$ линейные операторы

$$A = \frac{d^2}{dx^2} - 1, \qquad D_A = \big\{u \in C^2[0,1],\ u(1) = eu(0)\big\},$$

$$B = \frac{d}{dx} - 1, \qquad D_B = \big\{u \in C^1[0,1], u(1) = eu(0)\big\}.$$

Тогда краевая задача для уравнения (3.12) записывается в абстрактной форме (1.1). Операторный пучок $\lambda A + B$ с областью определения $D = D_A$ является 0-сингулярным: $X_s = \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B = \operatorname{span}\{e^x\}$. В (1.5), (1.6) имеем $Y_s = \{0\}$, $F = 0$, $Su = \dfrac{2e^x}{e^2 - 1} \displaystyle\int_0^1 u(x) e^x dx$, $P = E - S, D_A = PD$. Оператор $A_r = A_{|X_r}$, действующий из $X_r = PX$ в Y, имеет ограниченный обратный оператор $A_r^{-1} \in L(Y, X_r)$, явный вид которого приведен ниже. Следовательно, в (3.2), (3.4) $P_2 = 0$, $D_2 = \{0\}$, $D_1 = PD, \overline{D_1} = X_r, Y_2 = \{0\}, Q_2 = 0$. Благодаря представлению $A = A_r P$ с замкнутым A_r и ограниченным P оператор A замкнут в $C[0,1]$. Легко проверить, что $(B + E)^{-1} = \displaystyle\int_0^x (\cdot) ds + \frac{1}{e-1} \int_0^1 (\cdot) ds$, поэтому оператор B также замкнут. Все условия теоремы 3.1 выполняются, если $u_0 \in D = D_A$. Следовательно, существует решение $u(t,x)$ смешанной задачи (3.12), (3.13) с произвольной компонентой $g(t,x) = Su(t,x) = \beta(t) e^x$, где $\beta(t)$ — любая непрерывная на $[0,\tau]$ скалярная функция с начальным условием $\beta(0) = \dfrac{2}{e^2-1}\displaystyle\int_0^1 u_0(x)e^x dx$. После выбора такой функции $\beta(t)$, т. е. компоненты $g(t,x) = Su(t,x)$, компонента $Pu(t,x)$ решения находится однозначно на нетривиальном интервале времени $0 \le t \le \tau_0 (\le \tau)$. Точнее, $u(t,x) = \beta(t)e^x + A_r^{-1}v(t,x)$, где функция $v(t,x)$ является решением полулинейного абстрактного уравнения $\dfrac{dv}{dt} + \Pi \cdot v(t) = f(t, \beta(t)e^x + A_r^{-1}v)$ в пространстве $Y = C[0,1]$ с ограниченным оператором $\Pi = BA_r^{-1} \in L(Y)$. Здесь A_r^{-1}, Π — интегральные операторы

$$(\Pi y)(x) = e^{-x}\int_0^1 y(s)\left[\frac{e^s}{e^2-1} + \frac{e^{-s}}{e^{-2}-1}\right]ds + e^{-x}\int_0^x y(s)e^s ds,$$

$$A_r^{-1}y(x) = \frac{e^x}{e^2-1}\int_0^1 (\Pi y)(s)e^s ds + e^x\int_0^x (\Pi y)(s)e^{-s}ds.$$

4. Общие блочные представления сингулярностей. Характеристический пучок $\lambda A + B$ линейной части уравнения (1.1) может иметь различные сингулярные аннулирующие (дефектные) функции, представимые полиномами (2.1) или рядами (2.4). С помощью соответствующих сингулярных цепочек можно получать различные частные признаки разрешимости полулинейных уравнений (1.1), как в [8]. Здесь приводятся общие теоремы разрешимости с помощью „универсальных" блочных представлений аннулирующей сингулярности (4.1) и дефектной сингулярности (4.2).

Для операторов пучка $\lambda A_s + B_s (X_s \to Y_s)$ с областью определения $D_s = SD$ $(\subset X_s)$ рассматривается одно из двух блочных представлений

$$A_s = \begin{bmatrix} M & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_s = \begin{bmatrix} N & N_2 \end{bmatrix}\ (X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \to Y_s), \tag{4.1}$$

$$A_s = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad B_s = \begin{bmatrix} N \\ N_2 \end{bmatrix} \colon D_s \to Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}. \tag{4.2}$$

Представление (4.1) соответствует прямому разложению $X_s = X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}$, представление (4.2) — прямому разложению $Y_s = Y_{s_1} \dot{+} Y_{s_2}$ на замкнутые подпространства, так что проекционные операторы $S_k \colon X_s \to X_{s_k} = S_k X_s$, $F_k \colon Y_s \to Y_{s_k} = F_k Y_s$ ограничены и $S_1 S_2 = 0$, $F_1 F_2 = 0$. Для корректности представления (4.1) предполагается, что проектирование S_k не выводит элементы из области определения пучка: $S_k D_s \subset D_s$, $k = 1, 2$. Представление (4.1) назовем *каноническим*, если операторный блок $M \colon S_1 D_s \to Y_s$ имеет ограниченный обратный $M^{-1} \in L(Y_s, X_{s_1})$, блок $N_2 \in L(X_{s_2}, Y_s)$ ограничен, а регулярное множество $\rho(M,N)$ пучка $\lambda M + N \colon S_1 D_s \to Y_s$ всюду плотно в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Аналогично блочное представление (4.2) считается *каноническим*, если блок $M \colon D_s \to Y_{s_1}$ имеет ограниченный обратный $M^{-1} \in L(Y_{s_1}, X_s)$ и регулярное множество $\rho(M,N)$ пучка $\lambda M + N \colon D_s \to Y_{s_1}$ плотно в $\mathbb{C}$. Каждое из канонических представлений (4.1), (4.2) гарантирует сингулярность соответствующего пучка $\lambda A_s + B_s$. Действительно, в случае (4.1) существует голоморфная вектор-функция $x_2(\lambda) \colon \rho(M, N) \to S_2 D_s$ такая, что $x_2(\lambda) \ne 0$ и функции $Ax_2(\lambda)$, $Bx_2(\lambda)$ также голоморфны.

Например, достаточно выбрать $x_2(\lambda) = x_2 = \mathrm{const} \in S_2D_s,\ x_2 \neq 0$. Функция $v(\lambda) = \begin{bmatrix} (\lambda M + N)^{-1}N_2x_2(\lambda) \\ -x_2(\lambda) \end{bmatrix} : \rho(M, N) \to X_{s_1} \dot{+} X_{s_2}$ является голоморфной и аннулирующей пучок $\lambda A_s + B_s$ на множестве $\rho(M, N)$. Соответственно для представления (4.2) можно задать сингулярную дефектную функцию $f(\lambda): \rho(M, N) \to Y_s^*$ пучка $\lambda A_s + B_s$.

Конкретные сингулярности из [2, 3, 8, 10] и из пункта 2 допускают канонические блочные представления (4.1) или (4.2). Для пучка $\lambda A_s + B_s$, имеющего каноническую клетку Л. Кронекера в базисах $\{x_i\}, \{Ax_i\}$ (2.3), блоки представления (4.1) имеют матричную форму

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \qquad N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Пусть $\hat{\mathcal{T}}$ — бесконечная матрица, определенная в (2.6). Сингулярный пучок $\lambda A_s + B_s = \lambda\hat{\mathcal{T}} + E$ в пространстве $l_2 = X_s = Y_s$ имеет блочное представление (4.1) относительно подпространств $X_{s_1} = \mathrm{span}\{e_n\}_2^\infty$, $X_{s_2} = \mathrm{span}\{e_1\}$, так что $Me_{n+1} = n \cdot e_n$, $Ne_{n+1} = e_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $N_2e_1 = e_1$. Поскольку $M^{-1}e_n = NM^{-1}e_n = \dfrac{1}{n}e_{n+1}$, оператор $M^{-1}: l_2 \to X_{s_1}$ ограничен и вполне непрерывен, оператор NM^{-1} является вполне непрерывным и квазинильпотентным в l_2. Следовательно, при любом $\lambda \neq 0$ существует ограниченный оператор $(\lambda M + N)^{-1} = M^{-1}(\lambda E + NM^{-1})^{-1}: l_2 \to X_{s_1}$, так что указанное блочное представление (4.1) является каноническим.

Аналогично конструируются канонические блочные представления (4.2) для соответствующих конечномерных сингулярных клеток Л. Кронекера и бесконечномерной клетки $\lambda\hat{\mathcal{T}}^* + E$ с сопряженным матричным оператором $\hat{\mathcal{T}}^*$.

Прямая сумма блочных операторов вида (4.1) имеет такую же блочную структуру в соответствующей прямой сумме пространств. При этом для суммы конечного числа слагаемых сингулярных клеток свойство каноничности блоков сохраняется без дополнительных ограничений. Для того чтобы счетная сумма клеток имела канонические блоки, могут потребоваться некоторые естественные предположения. Аналогичное свойство имеют блочные операторы вида (4.2). Это замечание характеризует общность канонических представлений (4.1), (4.2) для аннулирующих и дефектных сингулярностей соответственно.

В дальнейшем области определения проекторов P_k, S_k в (3.2), (4.1) расширяются по правилу $P_k \sim P_kP$, $S_k \sim S_kS$, проекторов Q_k, F_k в (3.2), (4.2) — по правилу $Q_k \sim Q_kQ$, $F_k \sim F_kF$. Замкнутый шар радиуса r с центром u_0 в пространстве X обозначается через $B(X, u_0, r)$.

Теорема 4.1. *Пусть в уравнении* (1.1) *характеристический пучок* $\lambda A + B: D \to Y$ *имеет* RS*-расщепление* (1.5), (1.6) *с регулярной компонентой класса* (3.1), *а сингулярная компонента допускает каноническое блочное представление* (4.1). *Предположим, что в окрестности начального вектора* $u_0 \in D$ *на множестве*

$[0,\tau]\times U$ *функция* $f(t,u)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица*

$$\left\|f(t,u^1)-f(t,u^2)\right\|\le b\left\|u^1-u^2\right\|,\quad u^k\in U,\quad t\in[0,\tau],\tag{4.3}$$

где $U=U(u_0,r_s,r_1,r_2)=B(X_s,Su_0,r_s)\dot{+}B(X_1,P_1u_0,r_1)\dot{+}B(X_2,0,r_2)$ — *прямая сумма шаров, причем* $r_2>\|P_2u_0\|$. *Далее, пусть на том же множестве* $[0,\tau]\times U$ *компонента* Q_2f *удовлетворяет условию Липшица и условию ограниченности*

$$\left\|Q_2f(t,u^1)-Q_2f(t,u^2)\right\|\le b_2\left\|u^1-u^2\right\|,\quad \|Q_2f(t,u)\|\le k\tag{4.4}$$

с постоянными $b_2<\left\|B_2^{-1}\right\|^{-1}$, $k<r_2\left\|B_2^{-1}\right\|^{-1}$.

Если начальный вектор u_0 *согласован с уравнением так, что* $Q_2Bu_0=Q_2f(0,u_0)$, *то на нетривиальном интервале* $[0,\tau_0]$ *существует решение* $u(t)$ *задачи Коши для уравнения* (1.1) *с начальным условием* $u(0)=u_0$.

Доказательство. Представим подобно (3.6) любой вектор $u\in D$ в виде суммы двух сингулярных и двух регулярных компонент u_{s_k}, u_k, где $u_{s_k}=S_ku$, $k=1,2$, — сингулярные компоненты, соответствующие разложению (4.1). Положим $v_s=$ $=Mu_{s_1}\in Y_s$, $v_1=A_1u_1$, $v_2=B_2u_2$. Применяя к (1.1) слева проекторы F, Q_k, получаем три уравнения

$$\frac{dv_s}{dt}+NM^{-1}v_s=Ff(t,u)-N_2u_{s_2},\qquad \frac{dv_1}{dt}+B_1A_1^{-1}v_1=Q_1f(t,u),\tag{4.5}$$

$$v_2=Q_2f(t,u)\quad (u=M^{-1}v_s+u_{s_2}+A_1^{-1}v_1+B_2^{-1}v_2).\tag{4.6}$$

Алгебраическое уравнение (4.6) трактуется как уравнение $v_2=\Phi(v_2)$ относительно функции $v_2(t)$ в пространстве $C([0,\tau],Y_2)$, где отображение $\Phi(v_2)=Q_2f(\cdot,B_2^{-1}v_2)$ зависит от параметров v_s, u_{s_2}, v_1. Введем шар

$$V_2=\left\{v_2(t)\in C([0,\tau],Y_2)\colon\ \|v_2\|\le r_2\left\|B_2^{-1}\right\|^{-1}\right\}.\tag{4.7}$$

Если значения параметров v_s, u_{s_2}, v_1 принадлежат замкнутым шарам

$$\|v_s-AS_1u_0\|\le\frac{r_s}{2\left\|M^{-1}\right\|},\qquad \|u_{s_2}-S_2u_0\|\le\frac{r_s}{2},\qquad \|v_1-AP_1u_0\|\le\frac{r_1}{\left\|A_1^{-1}\right\|},\tag{4.8}$$

то $\Phi(V_2)\subset V_2$ и Φ — сжатие на V_2. Следовательно, существует неподвижная точка $v_2=\Phi(v_2)$, $v_2=\hat{v_2}(t;v_s,u_{s_2},v_1)$ при каждом значении параметров из (4.8). В силу свойств функций f, Q_2f функция $\hat{v_2}$ непрерывна по совокупности переменных t, v_s, u_{s_2}, v_1 и липшицева по переменным v_s, u_{s_2}, v_1 на множестве (4.8) равномерно относительно $t\in[0,\tau]$. Подставим функцию $v_2=\hat{v_2}(t;v_s,u_{s_2},v_1)$ в уравнения (4.5) и запишем их в форме

$$\frac{dw}{dt}+Tw(t)=g(t,u_{s_2},w),\qquad g=\begin{bmatrix}Ff-N_2u_{s_2}\\ Q_1f\end{bmatrix},\tag{4.9}$$

где $w=(v_s;v_1)$, $T=NM^{-1}\oplus B_1A_1^{-1}$. Ясно, что $T\in L(Y_s\dot{+}Y_1)$, а функция g непрерывна по совокупности переменных t,u_{s_2},w и удовлетворяет условию Липшица

$$\|g(t, u_{s_2}, w^1) - g(t, u_{s_2}, w^2)\| \leq \beta \|w^1 - w^2\|$$

для всех $t \in [0, \tau]$ и u_{s_2}, $w^k = (v_s^k; v_1^k)$ из шаров (4.8). Выберем любую непрерывную функцию $\varphi(t)\colon [0, \tau] \to B\left(X_{s_2}, S_2 u_0, \dfrac{r_s}{2}\right)$ с начальным значением $\varphi(0) = S_2 u_0$ и подставим $u_{s_2} = \varphi(t)$ в правую часть (4.9). Тогда на некотором нетривиальном интервале $0 \leq t \leq \tau_0$ уравнение (4.9) будет иметь единственное решение $w(t) = (v_s(t); v_1(t))$ с начальным условием $w(0) = (AS_1 u_0; AP_1 u_0)$. Непрерывная функция

$$u(t) = M^{-1} v_s(t) + \varphi(t) + A_1^{-1} v_1(t) + B_2^{-1} \hat{v}_2(t, v_s(t), \varphi(t), v_1(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau_0,$$

является решением уравнения (1.1). Начальное условие $u(0) = u_0$ выполняется благодаря согласованию $Q_2 B u_0 = B P_2 u_0 = Q_2 f(0, u_0)$.

Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Предположим, что в формулировке теоремы* 4.1 *для сингулярной компоненты вместо представления* (4.1) *содержится каноническое блочное представление* (4.2), *а вместо согласования начального данного* u_0 *с правой частью в начальный момент* $t = 0$ *справедливо согласование* $[Bu - f(t, u)] \in \overline{\operatorname{Im} A}$ *с замыканием образа оператора* A *для всех* $(t, u) \in [0, \tau] \times U$. *Если все остальные предположения теоремы* 4.1 *выполнены, то для любого* $y_0 \in \operatorname{Im} A$ *уравнение* (1.1) *на нетривиальном интервале* $0 \leq t \leq \tau_0$ *имеет единственное решение* $u(t)$, *удовлетворяющее начальному условию* $Au(0) = y_0$.

Умножение уравнения (1.1) на проекторы F_k, Q_k, $k = 1, 2$, приводит к четырем уравнениям, из которых уравнение с F_2 оказывается тождеством благодаря условию согласования. Остальные три уравнения имеют вид (4.5), (4.6), где $u_{s_2} = 0$, $v_s = M u_s$. Вместо (4.8) рассматриваются шары

$$\|v_s - F_1 y_0\| \leq r_s \|M^{-1}\|^{-1}, \qquad \|v^1 - Q_1 y_0\| \leq r_1.$$

Далее доказательство проводится так, как и в теореме 4.1, с учетом $\varphi(t) \equiv 0$, $u_{s_2} = 0$.

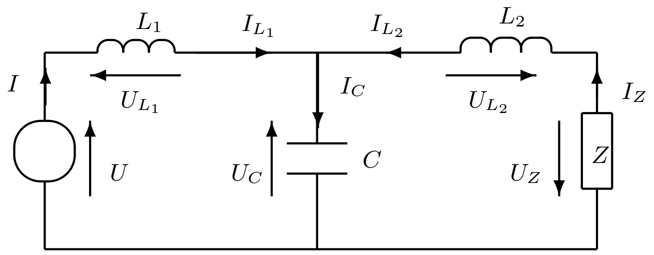
5. Приложения. ***5.1.*** На рисунке изображена электрическая цепь с известным источником тока $I(t)$, неизвестным напряжением U на входе и неизвестным импедансом Z на выходе. Уравнения нелинейных индуктивностей и емкости в неустановившемся режиме колебаний есть

$$I_C = \frac{d}{dt}(CU_C) + \psi(U_C), \qquad U_{L_k} = \frac{d}{dt}(L_k I_{L_k}) + \varphi_k(I_{L_k}), k = 1, 2, \tag{5.1}$$

где ψ, φ_k — нелинейные функции. Уравнения Кирхгофа связывают токи (напряжения) различных элементов:

$$\begin{gathered} I_{L_1} = I, \qquad I_C = I_{L_1} + I_{L_2}, \qquad U_C + U_{L_2} + U_Z = 0, \\ U_C + U_{L_1} - U = 0, \qquad I_Z = I_{L_2}\,. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Если ввести вектор состояний $u(t) = (I_{L_1}, I_{L_2}, U_C, U_Z)^{\mathrm{tr}}$, то через его компоненты однозначно выражаются остальные токи и напряжения цепи U_{L_k}, I_C, I_Z, U. Для нахождения вектора $u(t)$ с четырьмя компонентами имеются только три



уравнения

$$I_{L_1} = I, \qquad \frac{d}{dt}(L_2 I_{L_2}) + U_C + U_Z = -\varphi_2(I_{L_2}), \qquad \frac{d}{dt}(CU_C) - I_{L_1} - I_{L_2} = -\psi(U_C). \tag{5.3}$$

Эта система уравнений имеет векторную форму (1.1), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} I(t) \\ -\varphi_2(I_{L_2}) \\ -\psi(U_C) \end{bmatrix}.$$

Отображения A, B действуют из пространства $X = \mathbb{C}^4$ в пространство $Y = \mathbb{C}^3$. Положим $h_1 = (0\ 0\ 1\ -1)^{\mathrm{tr}}$, $h_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^{\mathrm{tr}}$, $h_3 = (0\ 0\ 0\ 1)^{\mathrm{tr}}$, $h_4 = (1\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{tr}}$, $g_1 = (0\ 0\ 1)^{\mathrm{tr}}$, $g_2 = (0\ 1\ 0)^{\mathrm{tr}}$, $g_3 = (1\ 0\ -1)^{\mathrm{tr}}$. Если обозначить $x_1 = h_1$, $x_2 = -Ch_2$, $x_3 = -L_2Ch_3$, то $Bx_1 = 0$, $Ax_1 = Bx_2$, $Ax_2 = Bx_3$, $Ax_3 = 0$. Следовательно, $\{x_1, x_2, x_3\}$ — базисная сингулярная цепочка пучка $\lambda A + B$ (2.2). Подпространства (1.5) и соответствующие проекторы таковы:

$$X_s = \mathrm{span}\{h_k\}_1^3, \quad X_r = \mathrm{span}\{h_4\}, \quad Y_s = \mathrm{span}\{g_1, g_2\}, \quad Y_r = \mathrm{span}\{g_3\},$$

$$S(a\,b\,c\,d)^{\mathrm{tr}} = (0\,b\,c\,d)^{\mathrm{tr}}, \quad F(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{tr}} = (0, y_2, y_1 + y_3)^{\mathrm{tr}}, \quad Q = E - F.$$

Для разложения (4.1) и теоремы 4.1 имеем

$$X_{s_1} = \mathrm{span}\{h_1, h_2\}, \qquad X_{s_2} = \mathrm{span}\{h_3\},$$

$$X_1 = \{0\}, \qquad X_2 = X_r, \qquad Y_2 = Y_r, \qquad Q_2 = Q,$$

$$A_s = FAS\,|_{X_s} = \begin{pmatrix} L_2 & 0 & | & 0 \\ 0 & C & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & | & 0 \end{pmatrix} : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \longrightarrow Y_s,$$

$$B_s = FBS\,|_{X_s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 1 \\ -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & | & N_2 \end{pmatrix} : X_{s_1} \dot{+} X_{s_2} \longrightarrow Y_s.$$

Поскольку $L_2 \neq 0$, $C \neq 0$, оператор $M\colon X_{s_1} \longrightarrow Y_s$ обратим. Далее, $A_r = A_2 = QA|_{X_r} = 0$. Если $x_r = (a\,0\,0\,0)^{\mathrm{tr}}$ — ненулевой вектор в $X_r = X_2$, то

$B_2X_r = QBx_r = (a\,0\,-a)^{\mathrm{tr}}$ — ненулевой вектор в $Y_r = Y_2$. Следовательно, пучок $\lambda A_r + B_r\colon X_r \longrightarrow Y_r$ является регулярным, причем $A_r = 0$.

Предположим, что функция входного тока $I(t)$ непрерывна при $t \in [0, \infty)$, функции $\varphi_2(\xi), \psi(\xi)$ нелинейных элементов цепи (5.1) удовлетворяют условиям Липшица для всех $\xi \in \mathbb{C}$. Тогда (4.3) выполнено для $\tau = +\infty$, $U = \mathbb{C}^4$. Поскольку $Q_2 f(t,u) = I(t)g_3$, то (4.4) также всюду выполнено, а из равенств $Q_2Bu(t) = I_{L_1}(t)g_3$, $Q_2f(t,u(t)) = I(t)g_3$ и первого уравнения Кирхгофа в (5.2) следует условие согласования начального вектора u_0 и правой части $f(t,u)$. По теореме 4.1 на некотором нетривиальном интервале $0 \le t \le \tau_0$ в электрической цепи существуют переменные непрерывные токи и напряжения, имеющие произвольные начальные значения $I_{L_2}(0)$, $U_C(0)$, $U_Z(0)$ и единственное допустимое начальное значение $I_{L_1}(0) = I(0)$. При этом функции $I_{L_1}(t)$, $U_C(t)$ непрерывно дифференцируемы. Если выбрать и зафиксировать непрерывную функцию $U_Z(t)$, то эволюция остальных токов и напряжений в цепи однозначно определяется начальными значениями $I_{L_2}(0)$, $U_C(0)$, которые можно выбирать произвольно.

5.2. Бесконечная система полулинейных дифференциальных уравнений

$$n\frac{du_{n+1}(t)}{dt} + u_n = f_n(t,u), \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad u = (u_1, u_2, \ldots), \quad 0 \le t \le \tau, \tag{5.4}$$

записывается как неявное дифференциальное векторное уравнение в l_2 с неограниченным матричным оператором $\hat{\mathcal{T}}$ из (2.6)

$$\frac{d}{dt}(\hat{\mathcal{T}}u) + u = f(t,u), \quad f = (f_1, f_2, \ldots). \tag{5.5}$$

Характеристический пучок $\lambda\hat{\mathcal{T}} + E$ в l_2 имеет аннулирующую голоморфную при всех $\lambda \ne 0$ функцию $w(\lambda) = v(\lambda^{-1})$ и бесконечную сингулярную цепочку $\{x_k\}_0^\infty$ в точке $\lambda = \infty$, где x_k и $v(z)$ определены в (2.7). Используя блочное каноническое представление сингулярного пучка $\lambda\hat{\mathcal{T}} + E$, построенное в пункте 4, мы можем исследовать разрешимость уравнения (5.5) с помощью теоремы 4.1. Именно, здесь $X = X_s = Y = Y_s = l_2$, $A_s = A = \hat{\mathcal{T}}$, $B_s = B = E$, $S = F = E$, $Q = Q_1 = Q_2 = 0$, $X_{s_2} = \mathrm{span}\{e_1\}$, $X_{s_1} = X_{s_2}^\perp$. Проекторы S_k, $k = 1, 2$, ортогональны: $S_1\left(\sum_{n=1}^\infty x_ne_n\right) = \sum_{n=2}^\infty x_ne_n$, $S_2\left(\sum_{n=1}^\infty x_ne_n\right) = x_1e_1$. Линеал D является областью определения оператора $\hat{\mathcal{T}}$ в l_2. Если $u_0 \in D$, а функция $f(t,u)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в области $[0,\tau] \times U$, $U = \{u \in l_2\colon \|u - u_0\| < r\}$, то все условия теоремы 4.1 выполнены. Следовательно, на некотором интервале $0 \le t \le \tau_0$ существует решение $u(t)$ уравнения (5.5) с начальным условием $u(0) = u_0$. Мы можем выбрать в качестве компоненты $S_2u(t)$ любую непрерывную функцию $\alpha(t)e_1$, $\alpha(t)\colon [0,\tau_0] \to \mathbb{C}$, такую, что $\alpha(0)e_1 = S_2u_0$. Компонента $S_1u(t) = u(t) - \alpha(t)e_1$ есть непрерывно дифференцируемая функция. В частности, линейное уравнение (5.5) с непрерывной правой частью $f(t)$, $0 \le t \le \tau$, имеет решение $u(t)$ с указанными свойствами всюду в интервале $[0,\tau]$, которое допускает явное представление

$$u(t) = \alpha(t)e_1 + M^{-1}e^{-NM^{-1}t}MS_1u_0 + M^{-1}\int\limits_0^t e^{NM^{-1}(s-t)}\big[f(s) - \alpha(s)e_1\big]ds.$$

Здесь матричные операторы M^{-1}, NM^{-1} определены в пункте 4.

Заметим, что после выбора конкретной сингулярной компоненты решения $u_1(t) = \alpha(t)$ система (5.4) превращается в бесконечную регулярную систему полулинейных уравнений. Более общие признаки ее разрешимости и качественные свойства решений можно получить как следствие результатов, содержащихся в монографии [14].

1. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – Київ: Вища шк., 2000. – 296 с.
2. *Kronecker L.* Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen // Sitzungber. Akademie Berlin. – 1890. – S. 763 – 776.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
4. *Caroll R. W., Showalter R. E.* Singular and degenerate Cauchy problem. – New York; London: Acad. Press, 1976.
5. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. – New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999. – 313 p.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач: Пер. с франц. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
7. *Власенко Л. А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Систем. технологии, 2006. – 273 с.
8. *Кабалянц П. С., Руткас А. Г.* Две теоремы существования решения квазилинейного сингулярного дифференциально-операторного уравнения // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 3. – С. 358 – 364.
9. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
10. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
11. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. – 1951. – **77**, № 1. – С. 11 – 14.
12. *Шварц Л.* Анализ: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 824 с.
13. *Rutkas A. G., Vlasenko L. A.* Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations // Nonlinear Anal. – 2003. – **55**. – P. 125 – 139.
14. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины,1993. – 308 с.

Получено 10.10.07