УДК 517.9

О. М. Станжицький, Н. В. Горбань (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ДЛЯ АВТОНОМНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ В $\mathbb{R}^n$ З НЕПЕРЕРВНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

We consider the dynamics of solutions of autonomous wave equation in $\mathbb{R}^n$ with continuous nonlinearity. The a priori estimates are obtained. The existence of compact invariant global attractor for m-semiflow is justified.

Исследована динамика решений автономного волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$ с непрерывной нелинейностью. Получены априорные оценки. Для м-полупотока обосновано существование инвариантного глобального аттрактора.

1. Вступ. Теорія глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем була започаткована в 70-х роках минулого століття в роботах О. А. Ладиженської по вивченню динаміки двовимірної системи рівнянь Нав'є – Стокса та в роботах J. K. Hale, які стосувалися дослідження якісної поведінки функціонально-диференціальних рівнянь. Проте бурхливий розвиток цієї теорії, що продовжується і сьогодні, розпочався в середині 80-х років, коли з'ясувалося, що на абстрактному рівні ті характерні риси, що дозволяли з точки зору теорії глобальних атракторів досліджувати рівняння Нав'є – Стокса та рівняння із запізненням, властиві широкому класу еволюційних рівнянь, що описують реально існуючі природні і суспільні явища: течію в'язкої нестисливої рідини, процеси хімічної кінетики, різноманітні хвильові процеси, фізичні процеси фазового переходу, коливання оболонок у надшвидких газових потоках, функціонування замкнених економічних систем тощо. Вагомий внесок у становлення та розвиток класичної теорії глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем внесли М. І. Вишик, О. А. Ладиженська, В. С. Мельник, І. Чуєшов, J. M. Ball, J. K. Hale, R.Temam, B. Wang, S. V. Zelik та їхні учні [1 – 19].

Результати щодо існування та властивостей розв'язків хвильового рівняння з дисипацією в обмеженій області у випадку гладкого за фазовою змінною нелінійного доданка, як і результати щодо існування в цьому випадку глобального атрактора, є класичними і містяться в [1, 17], для неавтономних рівнянь з майже періодичною залежністю від часової змінної — в [6], для випадку необмеженої області для однозначних напівгруп — в [19, 5]. Без додаткових умов щодо гладкості нелінійного доданка в автономному випадку існування компактного глобального атрактора для відповідної багатозначної напівгрупи для хвильового рівняння в обмеженій області було доведено в [8] і при більш загальних умовах — в [4]. Існування траєкторного атрактора було доведено в [7].

Наша задача полягає в дослідженні динаміки розв'язків хвильового рівняння в $\mathbb{R}^n$ без єдиності розв'язку.

2. Існування та властивості розв'язків. Розглянемо рівняння

$$u_{tt} + \gamma u_t - \Delta u + f(x,u) + \lambda_0 u = h(x), \quad (t,x) \in (\tau, T) \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $\gamma > 0$, $\lambda_0 > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ — початковий момент часу, $T > \tau$, $n \geq 3$, f — вимірна по x і неперервна по u функція. Нехай виконано умови

$$h \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \exists C_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n), \quad C_1 \geq 0, \quad \exists c \geq 0:$$

$$|f(x,u)| \leq C_1(x) + c|u| \quad \forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

$$\exists \alpha \in \left(0, \frac{\gamma}{2}\right), \quad \exists \lambda \in (0, \lambda_0), \quad \alpha(\gamma - \alpha) < \lambda_0 - \lambda, \tag{2}$$

© О. М. СТАНЖИЦЬКИЙ, Н. В. ГОРБАНЬ, 2008

$$\exists C_i \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right), \quad C_i \ge 0, \quad i = 2, 3, \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}:$$

$$F(x, u) := \int_0^u f(x, s)\,ds, \qquad F(x, u) \ge -\frac{\lambda}{2}u^2 - C_2(x),$$

$$f(x, u)u - F(x, u) \ge -\frac{\lambda}{2}u^2 - C_3(x).$$

Далі γ, C_i, $i = 1, 2, 3$, c, λ, α, λ_0 будемо називати константами задачі (1). Оскільки F задовольняє умови Каратеодорі, то

$$\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}: \quad |F(x, u)| \le C_1(x)|u| + \frac{c}{2}|u|^2. \tag{3}$$

Будемо позначати через $|\cdot|$, $(\cdot, \cdot)$ і $\|\cdot\|$, $((\cdot, \cdot))$ норму і скалярний добуток в $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ і $H^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ відповідно. Зауважимо, що

$$\forall u, v \in H^1\left(\mathbb{R}^n\right): \quad ((u, v)) = \lambda_0(u, v) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right).$$

Фазовим простором задачі (1) є простір $E = H^1\left(\mathbb{R}^n\right) \times L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Розв'язок задачі (1) будемо розуміти в сенсі наступного означення.

Означення 1. *Функцію* $\varphi(\cdot) = \left(u(\cdot), u_t(\cdot)\right)^T \in L^\infty(\tau, T; E)$ *називають розв'язком задачі* (1) *на* (τ, T), *якщо*

$$\forall \psi \in H_0^1\left(\mathbb{R}^n\right) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}_0^\infty(\tau, T):$$
$$-\int_\tau^T (u_t, \psi)\eta_t\,dt + \int_\tau^T \left(\gamma(u_t, \psi) + ((u, \psi)) + (f(x, u), \psi) - (h, \psi)\right)\eta\,dt = 0.$$

Розглянемо клас функцій $W_\tau^T = \mathbb{C}([\tau, T]; E)$. За умовами (2), (3) для довільної функції $\varphi(\cdot) = \left(u(\cdot), u_t(\cdot)\right)^T \in W_\tau^T$ коректно означено наступні функціонали:

$$V(\varphi(t)) = \frac{1}{2}|u_t(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + (F(x, u(t)), 1),$$

$$I(\varphi(t)) = V(\varphi(t)) + \frac{\gamma}{2}(u_t(t), u(t)),$$

$$H(\varphi(t)) = \gamma(F(x, u(t)), 1) - \frac{\gamma}{2}(f(x, u(t)), u(t)) + \frac{\gamma}{2}(h, u(t)) + \left(h, u_t(t)\right).$$

Лема 1. *Для довільного розв'язку* $\varphi(\cdot) = \left(u(\cdot), u_t(\cdot)\right)^T \in W_\tau^T$ *задачі* (1) *справджується оцінка*

$$\forall t \ge s, \ t, \quad s \in [\tau, T]:$$
$$|u_t(t)|^2 + \|u(t)\|^2 \le C_4\left((|u_t(s)|^2 + \|u(s)\|^2)e^{-\alpha(t-s)} + |h|^2 + 1\right),$$

де константа $C_4 > 0$ *залежить лише від констант задачі* (1).

При цьому функції $V(\varphi(\cdot))$, $I(\varphi(\cdot))$, $H(\varphi(\cdot))$ *є абсолютно неперервними на* $[\tau, T]$ *і для майже всіх* $t \in [\tau, T]$

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) = -\gamma|u_t(t)|^2 + \left(h, u_t(t)\right),$$

$$\frac{d}{dt}\big(u_t(t), u(t)\big) = |u_t(t)|^2 - \gamma(u_t(t), u(t)) - \|u(t)\|^2 -$$
$$- \big(f(x, u(t)), u(t)\big) + (h, u(t)), \tag{4}$$
$$\frac{d}{dt} I(\varphi(t)) = -\gamma I(\varphi(t)) + H(\varphi(t)).$$

Доведення. Нехай $\varphi(\cdot) = \big(u(\cdot), u_t(\cdot)\big)^T \in W_\tau^T$ — довільний розв'язок задачі (1) на (τ, T). Тоді на підставі (2) $f(x,u) \in L^2\big(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n)\big)$. Отже, функція $t \mapsto |u_t(t)|^2 + \|u(t)\|^2$ є абсолютно неперервною на $[\tau, T]$ і майже скрізь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\{|u_t|^2 + \|u\|^2\big\} = -\gamma |u_t|^2 - \big(f(x,u), u_t\big) + (h, u_t). \tag{5}$$

Для того щоб довести, що функція $t \mapsto (F(x, u(t)), 1)$ є абсолютно неперервною на $[\tau, T]$ і майже скрізь на $[\tau, T]$ виконується рівність

$$\frac{d}{dt}(F(x,u), 1) = \big(f(x,u), u_t\big), \tag{6}$$

достатньо довести її неперервність на $[\tau, T]$ і виконання (6) у сенсі скалярних розподілів на (τ, T). Доведення є аналогічним [2, 3].

Розглянемо функцію

$$Y(t) = \frac{1}{2}|u_t(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + (F(x, u(t)), 1) + \alpha\big(u_t(t), u(t)\big).$$

На підставі рівності $\frac{d}{dt}(F(x,u(t)),1) = \big(f(x,u(t)), u_t(t)\big)$ і (5) маємо

$$\frac{dY}{dt} = -(\gamma - \alpha)|u_t|^2 - \alpha\|u\|^2 - \alpha\gamma(u_t, u) - \alpha\big(f(x,u), u\big) + \alpha(u, h) + (u_t, h).$$

За умовами на α існує таке $\varepsilon > 0$, що $\alpha(\gamma - \alpha) \le (\lambda_0 - \lambda)\left(1 - \varepsilon\frac{2}{\alpha}\right)$. Звідси

$$\frac{\gamma - \alpha}{2}|u_t|^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\frac{\lambda}{\lambda_0} - \varepsilon\right)\|u\|^2 - \alpha(\gamma - \alpha)|u_t\|u| \ge 0.$$

Це приводить до нерівності

$$\frac{dY}{dt} \le -\alpha Y - \left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right)|u_t|^2 - \left(\frac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda_0} + \varepsilon\right)\|u\|^2 - \alpha\big(f(x,u), u\big) -$$
$$- \alpha\big(F(x,u), 1\big) + \alpha(u, h) + \big(u_t, h\big).$$

Застосовуючи до останньої умови (2), отримуємо нерівність

$$\frac{dY(t)}{dt} \le -\alpha Y(t) + C_\varepsilon\big(1 + |h|^2\big). \tag{7}$$

Тут $C_\varepsilon = \max\left\{\alpha\|C_3\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};\ \frac{1}{2(\gamma - 2\alpha)} + \frac{\alpha^2}{4\lambda_0\varepsilon}\right\}$. Із (7) на підставі умов (2) для $T \ge t \ge s \ge \tau$ маємо

$$\frac{1}{2}|u_t(t)|^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)\|u(t)\|^2 + \alpha\big(u_t(t), u(t)\big) - \|C_2\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le$$
$$\le \left\{\frac{1}{2}|u_t(s)|^2 + \frac{1}{2}\|u(s)\|^2 + (F(x, u(s)), 1) + \alpha\big(u_t(s), u(s)\big)\right\} e^{-\alpha(t-s)} +$$

$$+ \frac{C_\varepsilon}{\alpha}\left(1+|h|^2\right)\left(1-e^{-\alpha(t-s)}\right).$$

Тоді існує константа $C_4 > 0$, яка залежить лише від констант задачі (1), така, що для $T \geq t \geq s \geq \tau$ справджується оцінка

$$|u_t(t)|^2 + \|u(t)\|^2 \leq C_4\left\{\left(|u_t(s)|^2 + \|u(s)\|^2\right)e^{-\alpha(t-s)} + \left(1+|h|^2\right)\left(1-e^{-\alpha(t-s)}\right)\right\} \leq$$

$$\leq C_4\left\{\left(|u_t(s)|^2 + \|u(s)\|^2\right)e^{-\alpha(t-s)} + 1 + |h|^2\right\}.$$

Зауважимо, що

$$C_4 = \max\left\{1; \frac{|C_1|^2}{2}; \|C_2\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}; \frac{C_\varepsilon}{\alpha}; \frac{\lambda_0 + 2\alpha + 1 + 2c}{2\lambda_0}\right\}\Big/\varepsilon^*.$$

Тут $\varepsilon^* > 0$ задовольняє нерівність $\alpha(\gamma-\alpha)(1+\varepsilon^*)^2 \leq \lambda_0 - \lambda$.

Рівності (5), (6) дозволяють одержати (4).

Лему доведено.

Оскільки $H^1(\mathbb{R}^n)$ неперервно вкладається в $L^2(\mathbb{R}^n)$, то з умов (2) для $u \in L^\infty(\tau, T; H^1(\mathbb{R}^n))$ маємо вкладення $f(x,u) \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$. Отже, згідно з [17] для кожного розв'язку $\varphi(\cdot)$ задачі (1) маємо $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}([\tau, T]; E)$, що і обумовлює вибір класу W_τ^T. Вкладення $\varphi(\cdot) \in \mathbb{C}([\tau, T]; E)$ дозволяє для задачі (1) ставити задачу Коші вигляду

$$u|_{t=0} = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), \qquad u_t|_{t=0} = v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{8}$$

і шукати розв'язок лише у класі $L^\infty(\tau, T; E)$.

Для доведення розв'язності розглянемо задачу Діріхле в обмеженій області

$$u_{tt} + \gamma u_t - \Delta u + \lambda_0 u + f(x,u) = h(x), \qquad t>0, \quad x \in \Omega_R,$$

$$u|_{\partial\Omega_R} = 0, \quad t > 0, \tag{9}$$

$$u|_{t=0} = u_{0,R} \in H_0^1(\Omega_R), \qquad u_t|_{t=0} = v_{0,R} \in L^2(\Omega_R),$$

де $\Omega_R = B(0;R)$ — відкрита куля радіуса $R \geq 1$ з центром у нулі, $u_{0,R}(x) = u_0(x)\psi_R(|x|)$, $v_{0,R}(x) = v_0(x)\psi_R(|x|)$, ψ_R — гладка функція,

$$\psi_R(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq \xi \leq R-1, \\ 0 \leq \psi_R(\xi) \leq 1, & \text{якщо } R-1 \leq \xi \leq R, \\ 0, & \text{якщо } \xi > R. \end{cases}$$

Існування розв'язку задачі (9) встановлюється методом гальоркінських апроксимацій аналогічно до [2, 3] для довільних $u_{0,R} \in H_0^1(\Omega_R)$, $v_{0,R} \in L^2(\Omega_R)$ (означення розв'язку таке ж, як і в означенні 1, при цьому слід $\mathbb{R}^n$ замінити на Ω_R). Припустимо, що рівномірно по $R > 1$ ψ_R' обмежена на $\mathbb{R}_+$. Позначимо $E_R = H_0^1(\Omega_R) \times L^2(\Omega_R)$. Будемо позначати через $|\cdot|_R$, $(\cdot,\cdot)_R$ і $\|\cdot\|_R$, $((\cdot,\cdot))_R$ норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega_R)$ і $H_0^1(\Omega_R)$ відповідно. Зауважимо, що

$$\forall\, u, v \in H_0^1(\Omega_R): \quad ((u,v))_R = \lambda_0 (u,v)_R + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_R.$$

Теорема 1. *Для довільних* $\varphi_0 = (u_0, v_0)^T \in E$, $T > 0$ *задача* (1), (8) *за умов* (2) *має принаймні один розв'язок у класі* W_0^T.

Доведення. Нехай u_{r_j}, $r_j \to +\infty$, — послідовність розв'язків задачі (9). Зауважимо, що

$$\left|v_0 - v_{0,r_j}\right|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 - \psi_{r_j}(|x|)\right)^2 |v_0|^2 \, dx \le$$

$$\le \int_{|x| \ge r_j - 1} |v_0|^2 dx \to 0 \quad \text{при} \quad r_j \to +\infty.$$

Аналогічно,

$$\left\|u_0 - u_{0,r_j}\right\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad r_j \to +\infty.$$

Повторивши доведення леми 1, одержимо

$$\left|\frac{d}{dt} u_{r_j}(t)\right|_{r_j}^2 + \left\|u_{r_j}(t)\right\|_{r_j}^2 \le C_4 \left\{\left(\left|v_{0,r_j}\right|^2 + \left\|u_{0,r_j}\right\|^2\right) e^{-\alpha(t-s)} + |h|^2 + 1\right\},$$

де константа $C_4 > 0$ залежить лише від констант задачі (1). Отже, функція $\varphi_{r_j}(\cdot) = \left(u_{r_j}(\cdot), \frac{d}{dt} u_{r_j}(\cdot)\right)^T$ є обмеженою в $L^\infty(\tau, T; E_{r_j})$ рівномірно по $r_j \to +\infty$.

Продовжимо розв'язки задач по $\mathbb{R}^n$. Покладемо

$$\hat{u}_{r_j}(x) = \begin{cases} u_{r_j}(x) \varphi_{r_j}(|x|) & \text{в} \quad B(0, r_j), \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\hat{\varphi}_{r_j}(x) = \begin{cases} \varphi_{r_j}(x) \psi_{r_j}(|x|) & \text{в} \quad B(0, r_j), \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Оскільки φ_{r_j} обмежені в $L^\infty(0, T; E_{r_j})$ рівномірно при $r_j \to \infty$, то $\hat{\varphi}_{r_j}$ також рівномірно обмежені в $L^\infty(0, T; E)$. Таким чином, з точністю до підпослідовності існує підпослідовність послідовності $\left\{\hat{\varphi}_{r_j}\right\}$, яку знову позначимо через $\left\{\varphi_{r_j}\right\}$, для якої

$$\varphi_{r_j} \to \varphi_\infty = \left(u_\infty, \frac{d}{dt} u_\infty\right)^T \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0, T; E),$$

тобто

$$u_{r_j} \to u_\infty \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty\left(0, T; H^1(\mathbb{R}^n)\right),$$

$$\frac{d}{dt} u_{r_j} \to \frac{d}{dt} u_\infty \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty\left(0, T; L^2(\mathbb{R}^n)\right).$$

Доведемо, що φ_∞ — розв'язок задачі (1), (8). Доведення аналогічне доведенню теореми 5 із [15]. Ідея доведення полягає у тому, щоб, зафіксувавши r_k (із $r_j \to +\infty$ можна припустити, що $r_k \le r_j - 1$), позначивши через φ_{kj} проекцію φ_{r_j} на $B(0, r_k)$ ($\varphi_{kj} = L_k \varphi_{r_j}$) і знаючи, що

$$\varphi_{kj} \to \varphi_{k\infty} = \left(u_{k\infty}, \frac{d}{dt} u_{k\infty}\right)^T \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty(0, T; E_{r_k}),$$

перевірити, що

$$L_k\varphi_\infty = \varphi_{k,\infty}, \qquad L_k\frac{\partial u_{r_j}}{\partial t} = \frac{\partial L_k u_{r_j}}{\partial t} \to \frac{\partial u_{k\infty}}{\partial t}$$

$$\text{слабко в} \quad L^\infty(0, T; L_2(B(0, r_k))),$$

$$f(x, L_k u_{r_j}) \to f(x, u_{k\infty}) \quad \text{слабко в} \quad L^2(0, T; L_2(B(0, r_k))),$$

$$L_k u_{r_j} \to u_{k\infty} \quad \text{сильно в} \quad L^2(0, T; L_2(B(0, r_k))).$$

Далі, використавши те, що

$$\forall\, v \in C_0^\infty([0, T] \times B(0, r_k)) :$$

$$\int_0^T \left(L_k u_{r_j}, v_{tt}\right) dt - \int_0^T \left(\gamma(L_k u_{r_j}, v_t) + (L_k u_{r_j}, \Delta v - \lambda_0 v) - (f(x, L_k u_{r_j}), v) - (h, v)\right) dt = 0$$

і перейшовши до границі, одержимо шукане твердження.

Теорему доведено.

Поєднуючи теорему 1 та лему 1, одержуємо, що для довільних $\varphi_0 = (u_0, v_0)^T \in E$ задача (1), (8) за умов (2) має принаймні один розв'язок у класі $C((0, +\infty); E) \cap L^\infty((0; +\infty); E)$.

Лема 2. *Для довільного* $(u_0, v_0)^T \in B$ ($B \subset E$ *є обмеженою*) *і довільного розв'язку* $\varphi \in C((0, +\infty); E)$ *задачі* (1), (8) *за умов* (2) *для довільного* $\varepsilon > 0$ *існують* $T(\varepsilon, B)$, $K(\varepsilon, B)$ *такі, що*

$$\forall\, t \geq T, \quad k \geq K : \int_{|x| \geq \sqrt{2}k} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) \right|^2 + \lambda_0 |u(t, x)|^2 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx \leq \varepsilon.$$

Доведення випливає з леми 1 та з результатів [15, 2, 3].

Із леми 2, аналогічно до [15, 2, 3], можна одержати таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $\{\varphi^n\} \subset W_\tau^T$ — *послідовність розв'язків задачі* (1), *причому* $\varphi^n(\tau) \to \varphi_\tau$ *слабко в* E. *Нехай задано послідовність* $\{t_n\} \subset [\tau, T]$ *таку, що* $t_n \to t_0 \in [\tau, T]$. *Тоді існує розв'язок* $\varphi \in W_\tau^T$ *задачі* (1) *такий, що* $\varphi(\tau) = \varphi_\tau$ *і принаймні по підпослідовності* $\varphi^n(t_n) \to \varphi(t_0)$ *слабко в* E.

Якщо ж $\varphi^n(\tau) \to \varphi_\tau$ *сильно в* E, *то принаймні по підпослідовності* $\varphi^n(t_n) \to \varphi(t_0)$ *сильно в* E.

Покладемо $W_0^\infty = C((0, +\infty); E)$. Тепер для довільних $t \geq 0$, $\varphi_0 \in E$ розглянемо множину

$$G(t, \varphi_0) = \left\{\varphi(t) \,\middle|\, \varphi(\cdot) \in W_0^\infty \text{ — розв'язок (1)}, \ \varphi(0) = \varphi_0\right\} \subset E. \tag{10}$$

Наслідок. *Множина* $G(t, \varphi_0)$ — *компакт в* E.

3. Побудова автономної динамічної системи та існування глобального атрактора. Нехай (X, ρ) — метричний простір. Для непорожніх $A, B \subset X$

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y), \qquad \operatorname{dist}_H(A, B) = \max\{\operatorname{dist}(A, B), \operatorname{dist}(B, A)\},$$

$$O_\delta(A) = \{x \in X \,|\, \operatorname{dist}(x, A) < \delta\}, \qquad B_r = \{x \in X \,|\, \rho(x, 0) \leq r\},$$

$\overline{A} = \mathrm{cl}_X A$ — замикання A в X, $P(X)$ — сукупність усіх непорожніх підмножин X, $\beta(X)$ — сукупність усіх непорожніх обмежених підмножин X, $C(X)$ — сукупність усіх непорожніх замкнених підмножин в X, $K(X)$ — сукупність усіх непорожніх компактних підмножин X, $\Im$ — нетривіальна підгрупа адитивної групи в $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\Im_+ = \Im \cap \mathbb{R}_+$.

Означення 2. *Відображення* $G\colon \Im_+ \times X \mapsto P(X)$ *називають багатозначним напівпотоком* (м-*напівпотоком*) *на* X, *якщо:*

1) $G(0, \cdot) = I_X$ — *тотожне відображення* X;

2) $G(t+s, x) \subset G(t, G(s, x))$ $\forall\, t, s \in \Im_+$ $\forall\, x \in X$.

М-*напівпотік називають строгим, якщо* $G(t+s, x) = G(t, G(s, x))$ $\forall\, t, s \in \Im_+$ $\forall\, x \in X$.

Означення 3. *Множину* $A \subset X$ *називають притягуючою множиною для* м-*напівпотоку* G, *якщо для довільного* $B \in \beta(X)$ *і довільного околу* $N(A)$ *множини* A *в* X *існує* $T = T(N(A), B) \in \Im_+$ *така, що* $G(t, B) \subset N(A)$ $\forall\, t \geq T$.

***Зауваження* 1.** Останнє означає, що

$$\operatorname{dist}(G(t, B), A) \to 0, \quad t \to +\infty,$$

тобто для всіх $\varepsilon > 0$, $B \in \beta(X)$ існує $T = T(\tau, \varepsilon, B)$ таке, що $G(t, B) \subset O_\varepsilon(A)$ $\forall\, t \geq T$.

Для фіксованих $B \subset X$ та $s \in \Im_+$ розглянемо такі множини:

$$\gamma_s(B) = \bigcup_{t \geq s} G(t, B), \qquad \omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \operatorname{cl}_X(\gamma_s(B)).$$

Очевидно, що

$$\gamma_s(B) \subset \gamma_{s'}(B), \quad s \geq s', \qquad \forall\, p \geq 0: \ \omega(B) = \bigcap_{s \geq p} \operatorname{cl}_X(\gamma_s(B)).$$

Означення 4. *Множину* $\Theta \subset X$ *називають глобальним атрактором для* м-*напівпотоку* G, *якщо*:

1) Θ — *притягуюча множина*;

2) *для довільної притягуючої множини* Y $\Theta \subset \operatorname{cl}_X Y$ (*мінімальність*);

3) $\Theta \subset G(t, \Theta)$ *для всіх* $t \geq 0$ (*напівінваріантність*).

Означення 5. М-*напівпотік* G *називають асимптотично компактним, якщо для довільного* $B \in \beta(X)$ *існує* $A(B) \in K(X)$ *таке, що*

$$\operatorname{dist}(G(t, B), A(B)) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

***Зауваження* 2.** М-напівпотік G є асимптотично компактним, якщо довільна послідовність $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$, $\xi_n \in G(t_n, B)$, $t \to +\infty$, передкомпактна в X.

Теорема 3 [9]. *Нехай* м-*напівпотік* G *задовольняє наступні умови*:

1) G *є асимптотично компактним*;

2) $\exists R_0 > 0$ $\forall R > 0$ $\exists T = T(R)$ $\forall t > T$: $G(t, B_R) \subset B_{R_0}$;

3) *для* $t \in \Im_+$ *відображення* $X \ni x \mapsto G(t, x)$ *має замкнений графік*.

Тоді множина $\Theta = \bigcup_{B \in \beta(X)} \omega(B)$ *є компактним глобальним атрактором. Більш того, якщо* м-*напівпотік* G *є строгим, то* Θ — *інваріант, тобто* $\Theta = G(t, \Theta)$ $\forall\, t \in \Im_+$.

Основним результатом щодо аналізу якісної поведінки розв'язків задачі (1) є наступна теорема про існування глобального атрактора.

Теорема 4. *Нехай для задачі* (1) *виконано умови* (2). *Тоді відображення* G, *означене формулою* (10), *є* м-*напівпотоком, для якого в фазовому просторі* $E = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ *існує компактний інваріантний глобальний атрактор.*

Доведення випливає з теорем 1 – 3 і лем 1, 2 аналогічно [15].

Приклад. Розглянемо рівняння

$$u_{tt} + \gamma u_t - \Delta u + \frac{\alpha \sin u + \beta\sqrt{|u|}}{1+|x|^2} + \lambda_0 u = h(x), \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n,$$

де $\gamma > 0,\ \lambda_0 > 0,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ n \geq 3,\ h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Оскільки виконано умови (2), то за теоремою 4 відображення G, означене формулою (10), є м-напівпотоком, для якого у фазовому просторі $E = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ існує компактний інваріантний глобальний атрактор.

1. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989. – 293 с.
2. *Капустян О. В., Іоване Ж.* Глобальний атрактор для неавтономного хвильового рівняння без єдиності розв'язку // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2006. – № 2. – С. 107 – 120.
3. *Капустян О. В.* Властивість Кнезера для неавтономного хвильового рівняння без єдиності розв'язку // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 2007. – № 2. – С. 137 – 141.
4. *Ball J. M.* Global attractors for damped semilinear wave equations // Discrete and Contin. Dynam. Syst. – 2004. – **10**. – P. 31 – 52.
5. *Belleri V., Pata V.* Attractors for semilinear strongly damped wave equations on $\mathbb{R}^3$ // Ibid. – 2001. – **7**, № 4. – P. 719 – 735.
6. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors on non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. math. pures et appl. – 1994. – **73**, № 3. – P. 279 – 333.
7. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Evolution equations and their trajectory attractors // Ibid. – 1997. – **76**, № 10. – P. 913 – 964.
8. *Kapustyan O. V.* The global attractors of multi-valued semiflows, which are generated by some evolutionary equations // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – № 11. – С. 65 – 70.
9. *Kapustyan A. V., Melnik V. S., Valero J.* Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations // Int. Bifurcat. Chaos. – 2003. – **13**. – P. 1969 – 1983.
10. *Kapustyan A. V., Melnik V. S., Valero J.* A weak attractor ans properties of solutions for the three-dimensional Bénard problem // Discrete and Contin. Dynam. Syst. – 2007. – **18**. – P. 449 – 481.
11. *Melnik V. S.* Multivalued dynamics of nonlinear infinite-dimensional. – Kyiv, 1994. – (Preprint / Acad. Sci. Ukraine. Inst. Cybernetics, № 94 -17).
12. *Melnik V. S.* Estimates of the fractal and Hausdorff dimensions of sets invariant under multimappings // Math. Notes. – 1998. – **63**. – P. 190 – 196.
13. *Melnik V. S., Slastikov V. V., Vasilkevich S. I.* On global attractors of multivalued semi-processes // Dokl. Akad. Nauk Ukrainy. – 1999. – № 7. – P. 12 – 17.
14. *Melnik V. S., Valero J.* On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Anal. – 1998. – **6**. – P. 83 – 111.
15. *Morillas F., Valero J.* Attractors for reaction-diffusion equation in $\mathbb{R}^n$ with continuous nonlinearity // Asympt. Anal. – 2005. – **44**. – P. 111 – 130.
16. *Rodriguez-Bernal A., Wang B.* Attractors for partly dissipative reaction-diffusion systems in $\mathbb{R}^n$ // J. Math. Anal. and Apll. – 2000. – **252**. – P. 790 – 803.
17. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – Berlin: Springer, 1988. – 500 p.
18. *Wang B.* Attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains // Physica D. – 1999. – **128**. – P. 41 – 52.
19. *Zelik S. V.* The attractor for nonlinear hyperbolic equation in the unbounded domain // Discrete and Contin. Dynam. Syst. – 2001. – **7**, № 3. – P. 593 – 641.

Одержано 17.10.07