УДК 517.5

О. Ю. Теплінський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ГЛАДКІСТЬ СПРЯЖЕННЯ ДИФЕОМОРФІЗМІВ КОЛА З ЖОРСТКИМИ ПОВОРОТАМИ

We prove that any $C^{3+\beta}$-smooth orientation-preserving circle diffeomorphism with rotation number from the Diophantine class D_δ, $0 < \beta < \delta < 1$, is $C^{2+\beta-\delta}$-smoothly conjugate to the rigid rotation of the circle by appropriate angle.

Доказано, что любой $C^{3+\beta}$-гладкий сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности, число вращения которого принадлежит диофантовому классу D_δ, $0 < \beta < \delta < 1$, является $C^{2+\beta-\delta}$-гладко сопряженным с жестким поворотом окружности на определенный угол.

1. Огляд проблематики і формулювання результату. *Одиничним колом* ми називаємо фактор-простір $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ із зрозумілим чином заданими орієнтацією, метрикою, мірою Лебега та операцією додавання за модулем 1. Основною арифметичною характеристикою зберігаючого орієнтацію гомеоморфізму T одиничного кола $\mathbb{T}^1$ є *число обертання* $\rho = \rho(T)$, яке визначається як границя $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{x_i}{i}$, де $x_i = L_T^i x_0$ — траєкторія *підняття* L_T гомеоморфізму T з $\mathbb{T}^1$ на $\mathbb{R}$. (Тобто L_T — строго зростаюча функція з $\mathbb{R}$ до $\mathbb{R}$, що має властивість $L_T(x+1) \equiv L_T(x) + 1$ і при факторизації по $\mathbb{Z}$ дає T.)

З часів Пуанкаре [1, 2] відомо, що число обертання $\rho(T)$ є завжди визначеним (з точністю до цілого доданка, так само, як і власне підняття L_T) і не залежить від вибору точки $x \in \mathbb{R}$. Хоча число обертання є, строго кажучи, не числом, а елементом $\mathbb{T}^1$, його зазвичай ототожнюють з відповідним дійсним числом ρ з проміжку $[0,1)$. Число обертання ρ є або раціональним p/q, і тоді гомеоморфізм T має хоча б одну q-періодичну траєкторію (тобто в його q-й ітерації є нерухома точка $\xi_* = T^q \xi_*$), або ж ірраціональним, і тоді гомеоморфізм T не має жодної періодичної точки. В останньому випадку (який є предметом розгляду цієї статті) порядок точок на колі для будь-якої траєкторії $\xi_i = T^i \xi_0$, $i \in \mathbb{Z}$, збігається з порядком точок для жорсткого повороту $R_\rho \colon \xi \mapsto \xi + \rho \mod 1$. Цей факт інколи називають *комбінаторною* (або *арифметичною*) *еквівалентністю* T та R_ρ. Іншим класичним результатом стосовно гомеоморфізму T з ірраціональним числом обертання є його строга ергодичність, тобто існування та єдиність для нього інваріантної нормованої борелівської міри $\mu = \mu_T$ на $\mathbb{T}^1$. При цьому має місце співвідношення $\rho \equiv \mu\big([\xi, T\xi]\big)$, а відображення

$$\phi \colon \xi \mapsto \eta_0 + \mu\big([\xi_0, \xi]\big) \tag{1}$$

(визначене з точністю до адитивної константи) є неперервним і переводить T в R_ρ у сенсі $\phi \circ T = R_\rho \circ T$.

Розвинена на початку XX століття теорія Данжуа [3, 2] показала, що за умов певної гладкості гомеоморфізму T (точна умова полягає в тому, що $T \in C^1(\mathbb{T}^1)$, і похідна $T' > 0$ має обмежену варіацію на $\mathbb{T}^1$) з ірраціональним числом обертання відображення (1) є гомеоморфізмом, тобто має місце спряження

$$\phi \circ T \circ \phi^{-1} = R_\rho. \tag{2}$$

Зазначений факт називають *топологічною* (або ж *неперервною*) *еквівалентністю* T та R_ρ.

Наступним логічним запитанням було виявити умови, за яких спряження ϕ має певний ступінь гладкості. Зауважимо, що з точки зору вивчення інваріантної міри неперервна диференційовність спряження ϕ згідно з (1) є еквівалентною до існування додатної неперервної *щільності* h інваріантної міри μ (при цьому маємо точно $h = \phi'$). Наявність такої щільності давала б змогу говорити про *геометричну* (або ж *гладку*[1]) *еквівалентність* T та R_ρ. Але вивчення цього питання виявилося набагато складнішим, і відповідь на нього виявляє залежність від так званих діофантових властивостей (ірраціонального) числа обертання.

Дійсне число ρ належить до *діофантового класу* D_δ, $\delta \geq 0$, якщо існує така стала $C > 0$, що $|\rho - p/q| \geq Cq^{-2-\delta}$ для будь-якого раціонального числа p/q. Легко переконатися, що $D_\delta \subset D_{\delta'}$ при $\delta < \delta'$. Якщо число $\rho \in \bigcup_{\delta \geq 0} D_\delta$, то воно називається *діофантовим*. Очевидно, всі діофантові числа є ірраціональними. Ірраціональні числа, які не є діофантовими, мають назву *ліувіллевих*.

У середині XX століття до даної задачі прийшли у зв'язку з розглядом дещо іншого кола питань. А саме, нагальні дослідження з небесної механіки змусили вивчати питання щодо гладкості заміни координат, яка лінеаризує певні слабко нелінійні системи диференціальних рівнянь. Як легко зауважити, дифеоморфізми кола природно виникають як перерізи Пуанкаре для потоків на двовимірних торах, тоді як останні є частинним випадком найбільш важливої структури, що виникає у зазначених задачах небесної механіки, а саме — гладких інваріантних торів [4]. В результаті постала відома КАМ-теорія, один із перших результатів якої був таким [5]: якщо аналітичний дифеоморфізм кола має діофантове число обертання і є достатньо близьким до лінійного (в нашій термінології — до жорсткого повороту кола на відповідний кут), то він лінеаризується за допомогою аналітичної заміни координат. У тій же статті було побудовано приклад аналітичного дифеоморфізму кола з довільним ліувіллевим числом обертання, який не лінеаризується навіть за допомогою абсолютно неперервної заміни координат, не зважаючи на свою яку завгодно близькість до лінійного.

Суттєвим недоліком наведеного результату КАМ-теорії щодо відображень кола, який називають *локальною теоремою зведення*, була саме його локальність — вимога близькості T до R_ρ, якої не було ані в теорії Пуанкаре, ані в теорії Данжуа. Справжнім проривом у тематиці в 70-х роках стали праці М. Ермана [6], який побудував теорію, що усувала цю вимогу, для випадку $\rho \in \cap_{\delta > 0} D_\delta$. Його учень Ж.-К. Йоккос [7] поширив *глобальну теорему зведення* Ермана на випадок довільних діофантових чисел обертання. Результат, який до останнього часу вважався вінцем даної теорії, було опубліковано в 1989 р. І. Катцнельсоном і Д. Орнштейном [8]: якщо $T \in C^r(\mathbb{T}^1)$, $T' > 0$, $\rho \in D_\delta$, $0 < \delta < r - 2$, то $\phi \in C^{r-1-\delta-\varepsilon}(\mathbb{T}^1)$ для як завгодно малого $\varepsilon > 0$. Крім того, в роботі [8] побудовано приклади, згідно з якими гладкість ϕ, вищу за $C^{r-1-\delta}$, одержати неможливо.

[1]Вивчення умов, за яких топологічна еквівалентність певних математичних об'єктів обумовлює їхню гладку еквівалентність, у західній науці традиційно асоціюється з так званою теоремою Мостоу про жорсткість і відповідно називається *теорією жорсткості*.

В статті Я. Г. Синая і К. М. Ханіна [9], опублікованій водночас із [8], до близького кола задач було застосовано інший підхід. В останньому розділі [9] було анонсовано наступний результат (теорема 2): якщо дифеоморфізм $T \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T}^1)$, $T' > 0$, має число обертання $\rho \in D_\delta$, причому $\delta < \alpha$, то спряження $\phi \in C^{1+\alpha-\delta}(\mathbb{T}^1)$. Його повного доведення в роботі [9] немає, лише наведено ряд ключових ідей та оцінок, але й серед тих є серйозна помилка, а саме, у нерівності типу Данжуа (лема 12), на яку спирається вся схема доведення. (З тексту статті [9] зрозуміло, що поспіх її авторів був викликаний саме нагальною конкуренцією з авторами [8].) Процитоване твердження з [9] для $\alpha \leq 1$ вдалося довести лише нещодавно в роботі [10]. Зауважте, що воно є посиленням результату [8] у частинному випадку $0 < \delta < 1$, $2 + \delta < r \leq 3$. Метою даної статті є поширення цього твердження на випадок $3 < r < 3 + \delta$. Сформулюємо це таким чином.

Теорема 1. *Нехай T — $C^{3+\beta}$-гладкий зберігаючий орієнтацію дифеоморфізм одиничного кола з числом обертання $\rho \in D_\delta$, причому $0 < \beta < \delta < 1$. Тоді T є $C^{2+\beta-\delta}$-гладко спряженим із жорстким поворотом кола на ρ.*

Цей результат є новим і сильнішим за відповідний частинний випадок результату [8]. Крім цього, на відміну від усіх попередніх результатів, він є точним: вказана нами гладкість має місце, а більшої досягти не можна (згідно з прикладами в [8]). Підхід, що нами використовується, є відмінним від підходів [6 – 8]; він базується на ідеології [9], інструментарії викривлення подвійних відношень, успішно застосованому в [11], та певних точних співвідношеннях між елементами структури, згенерованої на колі динамікою траєкторій. Зауважимо, шо доведена нами асимптотична формула для викривлення подвійних відношень (див. нижче твердження 2) має також і самостійне значення.

Тут і далі для заданого відображення F запис F^n позначає його n-ту ітерацію $F \circ F \circ \ldots \circ F$ (n разів). Усі константи, які в неявному вигляді містяться в асимптотичних записах $\mathcal{O}(\cdot)$, залежать лише від функції f у пункті 2 та лише від дифеоморфізму T у пункті 3.

2. Асимптотика подвійних відношень. *Просте відношення* трьох попарно відмінних точок x_1, x_2, x_3 задається як

$$\mathrm{R}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_3},$$

а *викривлення простого відношення* цих точок відносно строго зростаючої функції f — як

$$\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3; f) = \frac{\mathrm{R}(f(x_1), f(x_2), f(x_3))}{\mathrm{R}(x_1, x_2, x_3)}.$$

Подвійне відношення чотирьох попарно відмінних точок x_1, x_2, x_3, x_4 задається як

$$\mathrm{Cr}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)},$$

а *викривлення подвійного відношення* цих точок відносно строго зростаючої функції f — як

$$\mathrm{Dist}(x_1, x_2, x_3, x_4; f) = \frac{\mathrm{Cr}(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4))}{\mathrm{Cr}(x_1, x_2, x_3, x_4)}.$$

Якщо функція f є гладкою й такою, що її похідна f' ніде не дорівнює нулю (тобто є строго додатною), то і викривлення простого відношення, і викривлення подвійного відношення є визначеними також у випадку, коли відповідні точки не є попарно відмінними. А саме, вони визначаються шляхом граничного переходу або ж просто формальною підстановкою $f'(a)$ замість $(f(a) - f(a))\colon (a - a)$ в означеннях, наведених вище.

Легко бачити, що завжди

$$\mathrm{Dist}(x_1, x_2, x_3, x_4; f) = \frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3; f)}{\mathrm{D}(x_1, x_4, x_3; f)}. \tag{3}$$

Обидва викривлення — і простого, і подвійного відношень — є мультиплікативними відносно суперпозиції функцій: для двох функцій f та g маємо

$$\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3; f \circ g) = \mathrm{D}(x_1, x_2, x_3; g) \cdot \mathrm{D}(g(x_1), g(x_2), g(x_3); f), \tag{4}$$

$$\mathrm{Dist}(x_1, x_2, x_3, x_4; f \circ g) =$$

$$= \mathrm{Dist}(x_1, x_2, x_3, x_4; g) \cdot \mathrm{Dist}(g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4); f). \tag{5}$$

У роботі [10] для випадку $f \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, доведено асимптотичні оцінки $\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3; f) = 1 + \mathcal{O}(x_1 - x_3)$ і $\mathrm{Dist}(x_1, x_2, x_3, x_4; f) = 1 + (x_1 - x_3)\mathcal{O}(\Delta^\alpha)$, де $\Delta = \max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} - \min\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. У випадку вищої гладкості $f \in C^{3+\beta}$, $\beta \in [0, 1]$, можливо порахувати наступні члени в обох асимптотиках.

Похідною Шварца тричі диференційовної функції f називають вираз

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right).$$

Твердження 1. *Нехай $f \in C^{3+\beta}\big([A, B]\big)$, $\beta \in [0, 1]$, і $f' > 0$. Тоді для будь-яких $x_1, x_2, x_3 \in [A, B]$ має місце асимптотична оцінка*

$$\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3; f) = 1 + (x_1 - x_3)\left(\frac{f''(x_1)}{2f'(x_1)} + \frac{1}{6}Sf(x_1)(x_2 + x_3 - 2x_1) + \mathcal{O}(\Delta^{1+\beta})\right), \tag{6}$$

де $\Delta = \max\{x_1, x_2, x_3\} - \min\{x_1, x_2, x_3\}$.

Почнемо з доведення наступної леми.

Лема 1. *Для довільного $\theta \in [A, B]$ маємо*

$$\frac{f''(\theta)}{2f'(\theta)} + \frac{f'''(\theta)}{6f'(\theta)}(x_1 + x_2 + x_3 - 3\theta) - \left(\frac{f''(\theta)}{2f'(\theta)}\right)^2 (x_2 + x_3 - 2\theta) =$$

$$= \frac{f''(x_1)}{2f'(x_1)} + \frac{1}{6}Sf(x_1)(x_2 + x_3 - 2x_1) + \mathcal{O}(\Delta_\theta^{1+\beta}), \tag{7}$$

де $\Delta_\theta = \max\{x_1, x_2, x_3, \theta\} - \min\{x_1, x_2, x_3, \theta\}$.

Доведення. З очевидних асимптотик $f''(x_1) = f''(\theta) + f'''(\theta)(x_1 - \theta) + \mathcal{O}(|x_1 - \theta|^{1+\beta})$ і $f'(x_1) = f'(\theta) + f''(\theta)(x_1 - \theta) + \mathcal{O}((x_1 - \theta)^2)$ випливає

$$\frac{f''(x_1)}{2f'(x_1)} = \frac{f''(\theta)}{2f'(\theta)} + \left(\frac{f'''(\theta)}{2f'(\theta)} - \frac{(f''(\theta))^2}{2(f'(\theta))^2}\right)(x_1 - \theta) + \mathcal{O}(\Delta_\theta^{1+\beta}). \tag{8}$$

З іншого боку, $Sf(x_1) = Sf(\theta) + \mathcal{O}(|x_1 - \theta|^\beta)$ і $|x_2 + x_3 - 2x_1| \leq 2\Delta_\theta$, отже,

$$\frac{1}{6}Sf(x_1)(x_2 + x_3 - 2x_1) = \left(\frac{f'''(\theta)}{6f'(\theta)} - \frac{(f''(\theta))^2}{4(f'(\theta))^2}\right)(x_2 + x_3 - 2x_1) + \mathcal{O}(\Delta_\theta^{1+\beta}). \tag{9}$$

Додавши (8) і (9), одержимо (7).

Лему доведено.

Зауваження **1.** Лема 1, зокрема, дозволяє дати альтернативне, більш загальне (але менш компактне) формулювання твердження 1, оскільки ми можемо вибрати $\theta = x_2$ чи x_3, або будь-яку іншу точку між $\min\{x_1, x_2, x_3\}$ та $\max\{x_1, x_2, x_3\}$ й отримати таку саму оцінку $\mathcal{O}(\Delta^{1+\beta})$, як у (6).

Доведення твердження **1.** Використавши x_2 як референтну точку для взяття похідних, одержимо

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} =$$
$$= f'(x_2) + \frac{1}{2}f''(x_2)(x_1 - x_2) + \frac{1}{6}f'''(x_2)(x_1 - x_2)^2 + \mathcal{O}(|x_1 - x_2|^{2+\beta}),$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3} =$$
$$= f'(x_2) + \frac{1}{2}f''(x_2)(x_3 - x_2) + \frac{1}{6}f'''(x_2)(x_3 - x_2)^2 + \mathcal{O}(|x_3 - x_2|^{2+\beta})$$

і, поділивши перший вираз на другий відповідно до розкладу $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \mathcal{O}(t^3)$, будемо мати

$$\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3; f) = 1 + (x_1 - x_3)\left[\frac{f''(x_2)}{2f'(x_2)} + \frac{f'''(x_2)}{6f'(x_2)}(x_1 + x_3 - 2x_2) - \left(\frac{f''(x_2)}{2f'(x_2)}\right)^2 (x_3 - x_2)\right] + \mathcal{O}(\Delta^{2+\beta}). \tag{10}$$

Якщо x_2 лежить між x_1 та x_3, то з оцінки (10) випливає

$$\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3; f) = 1 + (x_1 - x_3)\left[\frac{f''(x_2)}{2f'(x_2)} + \frac{f'''(x_2)}{6f'(x_2)}(x_1 + x_3 - 2x_2) - \left(\frac{f''(x_2)}{2f'(x_2)}\right)^2 (x_3 - x_2) + \mathcal{O}(\Delta^{1+\beta})\right]. \tag{11}$$

Легко бачити, що вираз у квадратних дужках (не рахуючи $\mathcal{O}(\cdot)$) є в точності лівою частиною (7) для $\theta = x_2$, отже, (6) доведено.

Припустимо тепер, що x_1 лежить між x_2 та x_3. Тоді варіант оцінки (6) для $\mathrm{D}(x_2, x_1, x_3; f)$ доведено. Також доведено варіант оцінки (10) для $\mathrm{D}(x_1, x_3, x_2; f)$.

Як неважко перевірити, виконується точне співвідношення

$$\mathrm{D}(x_1,x_2,x_3;f) = 1 + \frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}(\mathrm{D}(x_2,x_1,x_3;f)-1)\mathrm{D}(x_1,x_3,x_2;f). \tag{12}$$

Підставляючи

$$\mathrm{D}(x_2,x_1,x_3;f)-1 =$$
$$= (x_2-x_3)\left(\frac{f''(x_2)}{2f'(x_2)} + \frac{1}{6}Sf(x_2)(x_1+x_3-2x_2) + \mathcal{O}(\Delta^{1+\beta})\right)$$

та

$$\mathrm{D}(x_1,x_3,x_2;f) = 1 + (x_1-x_2)\frac{f''(x_2)}{2f'(x_2)} + \mathcal{O}(\Delta^{1+\beta})$$

у (12), одержуємо (11), і (6) знову випливає з леми 1.

Випадок, коли x_3 лежить між x_1 та x_2, розглядається аналогічно.

У випадку, коли дві чи три з точок x_1, x_2 і x_3 збігаються, всі наведені міркування зберігають свою силу (з очевидними змінами).

Твердження доведено.

Твердження 2. *Нехай* $f \in C^{3+\beta}\big([A,B]\big)$, $\beta \in [0,1]$, *і* $f' > 0$. *Тоді для будь-яких* x_1, x_2, x_3, $x_4 \in [A,B]$ *має місце асимптотична оцінка*

$$\mathrm{Dist}(x_1,x_2,x_3,x_4;f) = 1 + (x_1-x_3)\left(\frac{1}{6}(x_2-x_4)Sf(\theta) + \mathcal{O}(\Delta^{1+\beta})\right), \tag{13}$$

де $\Delta = \max\{x_1,x_2,x_3,x_4\} - \min\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, *тоді як* θ *може бути довільною точкою на відрізку між* $\min\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ *та* $\max\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

Доведення. З твердження 1 і леми 1 випливає

$$\mathrm{D}(x_1,x_2,x_3;f) = 1 + (x_1-x_3)\left[\frac{f''(\theta)}{2f'(\theta)} + \frac{f'''(\theta)}{6f'(\theta)}(x_1+x_2+x_3-3\theta) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{f''(\theta)}{2f'(\theta)}\right)^2 (x_2+x_3-2\theta) + \mathcal{O}(\Delta^{1+\beta})\right],$$

$$\mathrm{D}(x_1,x_4,x_3;f) = 1 + (x_1-x_3)\left[\frac{f''(\theta)}{2f'(\theta)} + \frac{f'''(\theta)}{6f'(\theta)}(x_1+x_4+x_3-3\theta) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{f''(\theta)}{2f'(\theta)}\right)^2 (x_4+x_3-2\theta) + \mathcal{O}(\Delta^{1+\beta})\right].$$

Поділивши згідно з (3) перший вираз на другий відповідно до розкладу $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \mathcal{O}(t^3)$, отримаємо (13).

Зауваження 2. Очевидно, що оцінку (13) можна записати у вигляді

$$\log \mathrm{Dist}(x_1,x_2,x_3,x_4;f) = (x_1-x_3)\left(\frac{1}{6}(x_2-x_4)Sf(\theta) + \mathcal{O}(\Delta^{1+\beta})\right). \tag{14}$$

3. Дифеоморфізми кола. ***3.1. Головні конструкції.*** Будемо використовувати розклад ірраціонального числа обертання у *неперервний* (або *ланцюговий*) *дріб* [12]:

$$\rho = [k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots] = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\cfrac{\cdots}{k_n + \cfrac{1}{\cdots}}}}} \in (0, 1). \tag{15}$$

Числовим значенням виразу (15) за означенням є границя послідовності *раціональних наближень* $p_n/q_n = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$. Додатні числа k_n, $n \geq 1$, що мають назву *неповних кратних*, для ірраціонального ρ визначаються однозначно. Взаємопрості натуральні числа p_n та q_n задовольнять рекурентні співвідношення $p_n = k_n p_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = k_n q_{n-1} + q_{n-2}$ для $n \geq 1$, де для зручності покладено $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ та $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$.

Для заданого гомеоморфізму T з ірраціональним ρ можна розглянути траєкторію $\xi_i = T^i \xi_0$, $i \geq 0$, довільним чином *відміченої точки* $\xi_0 \in \mathbb{T}^1$ і вибрати з неї послідовність *динамічних наближень* ξ_{q_n}, $n \geq 0$, індексами яких є знаменники відповідних раціональних наближень до ρ. Зручно також використовувати $\xi_{q_{-1}} = \xi_0 - 1$. Добре вивчені арифметичні властивості раціональних наближень з огляду на комбінаторну еквівалентність між T та R_ρ показують, що динамічні наближення наближаються до відміченої точки по черзі з двох боків:

$$\xi_{q_{-1}} < \xi_{q_1} < \xi_{q_3} < \ldots < \xi_{q_{2m+1}} < \ldots < \xi_0 < \ldots < \xi_{q_{2m}} < \ldots < \xi_{q_2} < \xi_{q_0}. \tag{16}$$

У відповідності з (16) означимо n-й *фундаментальний відрізок* $\Delta^{(n)}(\xi)$ як дугу $[\xi, T^{q_n}\xi]$ для парного n та як дугу $[T^{q_n}\xi, \xi]$ для n непарного, $\xi \in \mathbb{T}^1$. Якщо є відмічена точка, то позначатимемо $\Delta_0^{(n)} = \Delta^{(n)}(\xi_0)$, $\Delta_i^{(n)} = \Delta^{(n)}(\xi_i) = T^i \Delta_0^{(n)}$.

Ітерації T^{q_n} та $T^{q_{n-1}}$, обмежені на фундаментальні відрізки $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$ відповідно, є нічим іншим як двома неперервними компонентами відображення першого повернення для T на їхнє об'єднання $\Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$ (із ототожненими між собою кінцевими точками $\xi_{q_{n-1}}$, ξ_{q_n}). Послідовні образи відрізків $\Delta_0^{(n-1)}$ та $\Delta_0^{(n)}$ до свого поверненням на $\Delta_0^{(n-1)} \cup \Delta_0^{(n)}$ цілком вкривають коло $\mathbb{T}^1$ без взаємоперекриття (окрім кінців), формуючи таким чином n-те *динамічне розбиття*

$$\mathcal{P}_n = \left\{\Delta_i^{(n-1)}, 0 \leq i < q_n\right\} \cup \left\{\Delta_i^{(n)}, 0 \leq i < q_{n-1}\right\}$$

одиничного кола $\mathbb{T}^1$. Кінці відрізків з $\mathcal{P}_n$ складають множину

$$\Xi_n = \{\xi_i, 0 \leq i < q_{n-1} + q_n\}.$$

Позначимо через Δ_n довжину відрізків $\Delta^{(n)}(\xi)$ для жорсткого повороту R_ρ. Легко обчислити, що $\Delta_n = |q_n \rho - p_n|$. З теорії неперервних дробів випливає, що $\Delta_n \sim \dfrac{1}{q_{n+1}}$ (тут символ "$\sim$" означає "порівнюване", тобто запис $A \sim B$ означає, що $A = \mathcal{O}(B)$ і $B = \mathcal{O}(A)$ водночас), а отже, умову належності ρ до діофантового класу D_δ можна еквівалентним чином записати як

$$\Delta_{n-1}^{1+\delta} = \mathcal{O}(\Delta_n). \tag{17}$$

Також матимемо на увазі універсальну властивість

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-k}} \le \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^k}, \tag{18}$$

яка випливає з очевидної оцінки $\Delta_n \le \dfrac{1}{2}\Delta_{n-2}$.

Важливу роль у дослідженнях властивостей дифеоморфізмів кола відіграють *нерівності типу Данжуа*. Так називають оцінки близькості похідної $(T^{q_n})'$ до 1 (оригінальна нерівність Данжуа [3] була власне оцінкою величини $(T^{q_n})'$). У [10] було показано, що для довільного дифеоморфізму $T \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T}^1), T' > 0, \alpha \in (0,1]$, з ірраціональним числом обертання має місце оцінка типу Данжуа

$$(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon_{n,\alpha}), \tag{19}$$

де $\varepsilon_{n,\alpha} = l_{n-1}^{\alpha} + \dfrac{l_n}{l_{n-1}} l_{n-2}^{\alpha} + \dfrac{l_n}{l_{n-2}} l_{n-3}^{\alpha} + \ldots + \dfrac{l_n}{l_0}$ та $l_m = \max_{\xi \in \mathbb{T}^1} \left|\Delta_m(\xi)\right|$.

Зауважте, що оцінка (19) не вимагає накладання жодних діофантових умов на $\rho(T)$. На жаль, покращити цю оцінку для випадку більш гладкого $T \in C^{3+\beta}(\mathbb{T}^1)$, $\beta \in [0,1]$, без додаткових припущень неможливо. Ми припускатимемо, що спряження є принаймні C^1-гладким: $\phi \in C^{1+\gamma}(\mathbb{T}^1)$, $\phi' > 0$, з деяким $\gamma \in [0,1]$. (Нагадаємо, що за умови $\beta < \delta < 1$ це припущення виконується з $\gamma = 1 - \delta$ відповідно до результату [10], і нашою метою є збільшити значення цього γ до $1 - \delta + \beta$.)

Дане припущення є еквівалентним до наявності в інваріантної міри додатної неперервної щільності $h = \phi' \in C^{\gamma}(\mathbb{T}^1)$. Ця щільність задовольняє *гомологічне рівняння*

$$h(\xi) = T'(\xi) h(T\xi). \tag{20}$$

Неперервність і додатність h одразу приводить до оцінки $h(\xi) \sim 1$, з якої випливає, що $(T^i)'(\xi) = \dfrac{h(\xi)}{h(T^i\xi)} \sim 1$ та

$$\left|\Delta^{(n)}(\xi)\right| \sim l_n \sim \Delta_n \sim \frac{1}{q_{n+1}}$$

$\left(\text{внаслідок рівності } \Delta_n = \displaystyle\int_{\Delta^{(n)}(\xi)} h(\eta)\, d\eta\right)$. Згідно з цими фактами введемо до розгляду величину

$$E_{n,\sigma} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-k}} \Delta_{n-k-1}^{\sigma},$$

тоді $\varepsilon_{n,\alpha}$ в (19) можна замінити на $E_{n,\alpha}$ (якщо, звичайно, C^1-гладкість спряження є відомою).

З нашого припущення також випливає, що $(T^i)' \in C^{\gamma}(\mathbb{T}^1)$ рівноступенево відносно $i \in \mathbb{Z}$, тобто

$$(T^i)'(\xi) - (T^i)'(\eta) = \mathcal{O}(|\xi - \eta|^\gamma) \tag{21}$$

внаслідок $(T^i)'\xi - (T^i)'\eta = \dfrac{h(\xi)}{h(T^i\xi)} - \dfrac{h(\eta)}{h(T^i\eta)}$ та $T^i\xi - T^i\eta \sim \xi - \eta$.

Додаткову гладкість T буде використано через наступні вирази: $p_n = p_n(\xi_0) = \sum_{i=0}^{q_n-1} \dfrac{ST(\xi_i)}{h(\xi_i)}(\xi_i - \xi_{i+q_{n-1}})$, $\bar{p}_n = \bar{p}_n(\xi_0) = \sum_{i=0}^{q_{n-1}-1} \dfrac{ST(\xi_{i+q_n})}{h(\xi_{i+q_n})}(\xi_{i+q_n} - \xi_i)$. Маємо

$$p_n + \bar{p}_n = \sum_{\xi \in \Xi_n} ST(\hat{\xi}) \frac{\hat{\xi} - \xi}{h(\hat{\xi})}, \tag{22}$$

де $\hat{\xi}$ позначає точку з множини Ξ_n яка іде після ξ у (циклічному) порядку

$$\ldots \to \xi_{q_{n-1}} \to \xi_0 \to \xi_{q_n} \to \ldots .$$

Легко бачити, що $\hat{\xi}_i = \xi_{i+q_n}$ для $0 \le i < q_{n-1}$ та $\hat{\xi}_i = \xi_{i-q_{n-1}}$ для $q_{n-1} \le i < q_n + q_{n-1}$.

У наступних двох підпунктах буде встановлено певну логічну залежність між оцінками типу Данжуа у двох різних формах, а саме: $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_n^\nu)$ та $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(E_{n,\sigma})$.

3.2. Твердження, що використовують показники гладкості. В усіх твердженнях цього підпункту ми вважаємо, що $T \in C^{3+\beta}$ та $h \in C^\gamma$ з деякими константами $\beta, \gamma \in [0,1]$, але не робимо жодних припущень щодо діофантових властивостей ρ.

Наступна лема відповідає точному інтегральному співвідношенню $\int_{\mathbb{T}^1} ST(\xi)\dfrac{1}{h(\xi)}d\xi$ (див. лему 16 в [9]). Зауважимо, що вона не використовує значення показника γ.

Лема 2. *Якщо* $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_n^\nu)$, $\nu \in [0,1]$, *то* $p_n + \bar{p}_n = \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\min\{\beta, 2\nu-1\}})$.

Доведення. Використовуючи подання $ST = \left(\dfrac{T''}{T'}\right)' - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{T''}{T'}\right)^2$, з (22) виводимо

$$p_n + \bar{p}_n = \sum_{\xi \in \Xi_n} \left[\left(\frac{T''(\hat{\xi})}{T'(\hat{\xi})} - \frac{T''(\xi)}{T'(\xi)} \right) - \frac{1}{h(\hat{\xi})} + \mathcal{O}(|\hat{\xi} - \xi|^{1+\beta}) \right] -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{\xi \in \Xi_n} \left(\frac{T''(\xi)}{T'(\xi)} \right)^2 \frac{\hat{\xi} - \xi}{h(\hat{\xi})} =$$

$$= \sum_{\xi \in \Xi_n} \frac{T''(\xi)}{T'(\xi)} \left[\frac{1}{h(\xi)} - \frac{1}{h(\hat{\xi})} - \frac{1}{2} \frac{T''(\xi)}{T'(\xi)} \frac{\hat{\xi} - \xi}{h(\hat{\xi})} \right] + \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^\beta).$$

Зауважимо, що

$$h(\xi) - h(\hat{\xi}) = \mathcal{O}(|\hat{\xi} - \xi|^{\nu}) \tag{23}$$

внаслідок (20). Зокрема, (23) свідчить про те, що вираз в останніх квадратних дужках є $\mathcal{O}(|\hat{\xi} - \xi|^{\nu})$, тому з оцінки $T''(\xi) = \dfrac{T'(\hat{\xi}) - T'(\xi)}{\hat{\xi} - \xi} + \mathcal{O}(\hat{\xi} - \xi)$ випливає

$$p_n + \bar{p}_n =$$

$$= \sum_{\xi \in \Xi_n} \left(\frac{T'(\hat{\xi})}{T'(\xi)} - 1 \right) \frac{1}{\hat{\xi} - \xi} \left[\frac{1}{h(\xi)} - \frac{1}{h(\hat{\xi})} - \frac{1}{2} \left(\frac{T'(\hat{\xi})}{T'(\xi)} - 1 \right) \frac{1}{h(\hat{\xi})} \right] + \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\min\{\beta,\nu\}}).$$

Підстановки $T'(\xi) = \dfrac{h(\xi)}{h(T\xi)}$ та $T'(\hat{\xi}) = \dfrac{h(\hat{\xi})}{h(T\hat{\xi})}$ перетворюють (точно) останню оцінку на таку:

$$p_n + \bar{p}_n = \frac{1}{2} \sum_{\xi \in \Xi_n} \frac{h(\hat{\xi})}{(h(\xi))^2 (\hat{\xi} - \xi)} \left[\left(\frac{h(\xi)}{h(\hat{\xi})} - 1 \right)^2 - \left(\frac{h(T\xi)}{h(T\hat{\xi})} - 1 \right)^2 \right] + \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\min\{\beta,\nu\}}). \tag{24}$$

З умов леми випливає, що кожен із двох останніх виразів у круглих дужках є $\mathcal{O}\big(|\hat{\xi} - \xi|^{\nu}\big)$. Це означає, по-перше, що

$$p_n + \bar{p}_n = \frac{1}{2} \sum_{\xi \in \Xi_n} \left(\frac{h(T\xi)}{h(T\hat{\xi})} - 1 \right)^2 \left[\frac{h(T\hat{\xi})}{(h(T\xi))^2 (T\hat{\xi} - T\xi)} - \frac{h(\hat{\xi})}{(h(\xi))^2 (\hat{\xi} - \xi)} \right] +$$
$$+ \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\min\{\beta,2\nu-1\}}), \tag{25}$$

оскільки, як легко переконатися, суми в (24) та (25) відрізняються лише скінченною кількістю членів порядку $\mathcal{O}(|\hat{\xi} - \xi|^{2\nu-1})$ кожний і $2\nu - 1 \le \nu$. По-друге, оскільки

$$\frac{h(T\hat{\xi})}{(h(T\xi))^2 (T\hat{\xi} - T\xi)} : \frac{h(\hat{\xi})}{(h(\xi))^2 (\hat{\xi} - \xi)} - 1 = \frac{T'(\xi)}{T'(\hat{\xi})} \left(T'(\xi) : \frac{T\hat{\xi} - T\xi}{\hat{\xi} - \xi} \right) - 1 = \mathcal{O}(\hat{\xi} - \xi),$$

то вирази в квадратних дужках у формулі (25) є обмеженими, а отже вся сума в ній є $\sum_{\xi \in \Xi_n} \mathcal{O}(|\hat{\xi} - \xi|^{2\nu}) = \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{2\nu-1})$.

Лема 3. *Якщо* $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_n^{\nu})$, *то* $p_n = \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\min\{\beta,2\nu-1,\gamma\}})$.

Доведення. З оцінки (21) випливає

$$\frac{|\Delta_i^{(n)}|}{|\Delta_0^{(n)}|} : \frac{|\Delta_i^{(n-2)}|}{|\Delta_0^{(n-2)}|} = 1 + \mathcal{O}(\Delta_{n-2}^{\gamma}). \tag{26}$$

Разом із $ST(\xi_{i+q_n}) - ST(\xi_i) = \mathcal{O}(\Delta_n^{\beta})$ та (23), оцінка (26) приводить до наступної:

$$\bar{p}_n + \frac{|\Delta_0^{(n)}|}{|\Delta_0^{(n-2)}|} p_{n-1} = \sum_{i=0}^{q_{n-1}-1} \mathcal{O}(\Delta_n (\Delta_{n-2}^{\gamma} + \Delta_n^{\beta} + \Delta_n^{\nu})) =$$

$$= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-2}} \mathcal{O}(\Delta_{n-2}^{\min\{\beta,\gamma,\nu\}}) = \mathcal{O}(\Delta_n^{\min\{\beta,\gamma,\nu\}}).$$

З огляду на це лема 2 засвідчує, що $p_n = \dfrac{|\Delta_0^{(n)}|}{|\Delta_0^{(n-2)}|} p_{n-1} + \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\omega})$, де $\omega = \min\{\beta, 2\nu - 1, \gamma\} \le 1$. Ітеруючи останню оцінку, одержуємо

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{|\Delta_0^{(n)}|\,|\Delta_0^{(n-1)}|}{|\Delta_0^{(n-k)}|\,|\Delta_0^{(n-k-1)}|} \mathcal{O}(\Delta_{n-k-1}^{\omega}) =$$

$$= \mathcal{O}\left(\Delta_{n-1}^{\omega} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-k}} \left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-k-1}}\right)^{1-\omega}\right),$$

де остання сума обмежена внаслідок (18).

Лема 4. *Якщо* $p_n = \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\omega})$, *де* $\omega \in [0,1]$, *то*

$$\operatorname{Dist}(\xi_0, \xi, \xi_{q_{n-1}}, \eta; T^{q_n}) = 1 + (\xi - \eta)\mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\min\{\beta,\gamma,\omega\}}), \quad \xi, \eta \in \Delta_0^{(n-1)},$$

$$\operatorname{Dist}(\xi_0, \xi, \xi_{q_n}, \eta; T^{q_{n-1}}) = 1 + (\xi - \eta)\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-2}}\mathcal{O}(\Delta_{n-2}^{\min\{\beta,\gamma,\omega\}}), \quad \xi,\ \eta \in \Delta_0^{(n-2)}.$$

Доведення. Відповідно до (14) та (5) маємо

$$\log \operatorname{Dist}(\xi_0, \xi, \xi_{q_{n-1}}, \eta; T^{q_n}) =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{q_n - 1} (\xi_i - \xi_{i+q_{n-1}})(T^i\xi - T^i\eta) ST(\xi_i) + (\xi - \eta)\mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\beta}).$$

З іншого боку,

$$\sum_{i=0}^{q_n - 1} (\xi_i - \xi_{i+q_{n-1}})(T^i\xi - T^i\eta) ST(\xi_i) - h(\xi_0)(\xi - \eta) p_n =$$

$$= (\xi - \eta) \sum_{i=0}^{q_n - 1} (\xi_i - \xi_{i+q_{n-1}}) ST(\xi_i) \left[\frac{T^i\xi - T^i\eta}{\xi - \eta} - (T^i)'(\xi_0)\right] = (\xi - \eta)\mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\gamma})$$

внаслідок (21). Звідси випливає перша оцінка леми. Щоб довести другу оцінку, аналогічним чином помічаємо, що

$$\log \operatorname{Dist}(\xi_0, \xi, \xi_{q_n}, \eta; T^{q_{n-1}}) =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{q_{n-1} - 1} (\xi_i - \xi_{i+q_n})(T^i\xi - T^i\eta) ST(\xi_i) + (\xi - \eta)\mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\beta})$$

та

$$\sum_{i=0}^{q_{n-1} - 1} (\xi_i - \xi_{i+q_n})(T^i\xi - T^i\eta) ST(\xi_i) - h(\xi_0)(\xi - \eta)\frac{|\Delta_0^{(n)}|}{|\Delta_0^{(n-2)}|} p_{n-1} =$$

$$= (\xi - \eta) \sum_{i=0}^{q_{n-1}-1} (\xi_i - \xi_{i+q_n}) ST(\xi_i) \left[\frac{T^i\xi - T^i\eta}{\xi - \eta} - (T^i)'(\xi_0) \frac{|\Delta_i^{(n-2)}|}{|\Delta_0^{(n-2)}|} : \frac{|\Delta_i^{(n)}|}{|\Delta_0^{(n)}|} \right] =$$

$$= (\xi - \eta) \sum_{i=0}^{q_{n-1}-1} (\xi_i - \xi_{i+q_n}) ST(\xi_i) \mathcal{O}(\Delta_{n-2}^{\gamma}) = (\xi - \eta) \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-2}} \mathcal{O}(\Delta_{n-2}^{\gamma})$$

(див. (26)).

Лему доведено.

Введемо до розгляду функції

$$M_n(\xi) = \mathrm{D}(\xi_0, \xi, \xi_{q_{n-1}}; T^{q_n}), \quad \xi \in \Delta_0^{(n-1)},$$

$$K_n(\xi) = \mathrm{D}(\xi_0, \xi, \xi_{q_n}; T^{q_{n-1}}), \quad \xi \in \Delta_0^{(n-2)},$$

де відмічену точку ξ_0 зафіксовано довільним чином. У справедливості наступних трьох точних співвідношень неважко переконатися безпосередньо:

$$M_n(\xi_0) M_n(\xi_{q_{n-1}}) = K_n(\xi_0) K_n(\xi_{q_n}), \tag{27}$$

$$K_{n+1}(\xi_{q_{n-1}}) - 1 = \frac{|\Delta_0^{(n+1)}|}{|\Delta_0^{(n-1)}|} \left(M_n(\xi_{q_{n+1}}) - 1 \right), \tag{28}$$

$$\frac{(T^{q_{n+1}})'(\xi_0)}{M_{n+1}(\xi_0)} - 1 = \frac{|\Delta_0^{(n+1)}|}{|\Delta_0^{(n)}|} \left(1 - \frac{(T^{q_n})'(\xi_0)}{K_{n+1}(\xi_0)} \right). \tag{29}$$

Зауважимо також, що

$$\frac{M_n(\xi)}{M_n(\eta)} = \mathrm{Dist}(\xi_0, \xi, \xi_{q_{n-1}}, \eta; T^{q_n}), \qquad \frac{K_n(\xi)}{K_n(\eta)} = \mathrm{Dist}(\xi_0, \xi, \xi_{q_n}, \eta; T^{q_{n-1}}). \tag{30}$$

Лема 5. *Якщо* $p_n = \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\omega})$, $\omega \in [0, 1]$, *то*

$$(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(E_{n, 1+\min\{\beta, \gamma, \omega\}}).$$

Доведення. Покладемо $\sigma = 1 + \min\{\beta, \gamma, \omega\}$. З огляду на (30) лема 4 засвідчує, що $M_n(\xi)/M_n(\eta) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\sigma})$ та $K_n(\xi)/K_n(\eta) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_n \Delta_{n-2}^{\sigma-1})$. Оскільки за наших припущень $(T^i)'(\xi) \sim 1$, то й $M_n(\xi) \sim 1$ та $K_n(\xi) \sim 1$. Це дає можливість записати

$$M_n(\xi) = m_n + \mathcal{O}(\Delta_{n-1}^{\sigma}), \qquad K_n(\xi) = m_n + \mathcal{O}(\Delta_n \Delta_{n-2}^{\sigma-1}), \tag{31}$$

де m_n^2 — значення добутків у (27). Внаслідок (28) та (31) одержуємо оцінку

$$m_{n+1} - 1 = \frac{|\Delta_0^{(n+1)}|}{|\Delta_0^{(n-1)}|} (m_n - 1) + \mathcal{O}(\Delta_{n+1} \Delta_{n-1}^{\sigma-1}), \tag{32}$$

що ітерується в оцінку $m_n - 1 = \mathcal{O}(\Delta_n E_{n-1, \sigma-1})$, яка у свою чергу приводить до оцінок

$$M_n(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_{n-1}E_{n,\sigma-1}), \qquad K_n(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_n E_{n-1,\sigma-1}) \tag{33}$$

(зауважте, що $\Delta_{n-1}E_{n,\sigma-1} = \Delta_{n-1}^{\sigma} + \Delta_n E_{n-1,\sigma-1}$). Внаслідок (29) та (33) одержуємо оцінку

$$(T^{q_{n+1}})'(\xi_0) - 1 = \frac{|\Delta_0^{(n+1)}|}{|\Delta_0^{(n)}|}(1 - (T^{q_n})'(\xi_0)) + \mathcal{O}(\Delta_n E_{n+1,\sigma-1}), \tag{34}$$

що ітерується в

$$(T^{q_n})'(\xi_0) - 1 = \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-k}} \Delta_{n-k-1} E_{n-k,\sigma-1}\right) =$$

$$= \mathcal{O}\left(\Delta_n \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} \frac{\Delta_{n-k-1}}{\Delta_{n-k-m}} \Delta_{n-k-m-1}^{\sigma-1}\right) = \mathcal{O}\left(\Delta_n \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=k}^{n} \frac{\Delta_{n-k-1}}{\Delta_{n-s}} \Delta_{n-s-1}^{\sigma-1}\right) =$$

$$= \mathcal{O}\left(\Delta_n \sum_{s=0}^{n} \frac{\Delta_{n-s-1}^{\sigma-1}}{\Delta_{n-s}} \sum_{k=0}^{s} \Delta_{n-k-1}\right) = \mathcal{O}(E_{n,\sigma}),$$

оскільки $\sum_{k=0}^{s} \Delta_{n-k-1} = \mathcal{O}(\Delta_{n-s-1})$ внаслідок (18).

Лему доведено.

Підсумком даного підпункту є наступне твердження.

Твердження 3. *Припустимо, що для дифеоморфізму* $T \in C^{3+\beta}(\mathbb{T}^1)$, $T' > 0$, $\beta \in [0, 1]$, *з ірраціональним числом обертання існує щільність* $h \in C^{\gamma}(\mathbb{T}^1)$, $h > 0$, $\gamma \in [0, 1]$, *інваріантної міри і виконується асимптотична оцінка* $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_n^{\nu})$ *з певною дійсною сталою* ν. *Тоді* $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(E_{n,1+\min\{\beta,\gamma,2\nu-1\}})$.

Доведення безпосередньо випливає з лем 3 та 5.

***Зауваження* 3.** В роботі [7] для довільного дифеоморфізму $T \in C^3(\mathbb{T}^1)$ доведено оцінку $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(l_n^{1/2})$, яка за нашого припущення щодо існування додатної щільності h рівносильна такій: $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_n^{1/2})$. Отже, насправді показник $\nu \geq \dfrac{1}{2}$, але ми не використовуємо цей факт.

3.3. Твердження, що використовують діофантів показник. У цьому підпункті ми використовуємо припущення $\rho \in D_\delta$, $\delta \geq 0$, але тимчасово не зважаємо на ступінь гладкості T та умову Гельдера для h.

Лема 6. *Якщо* $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_n^{\nu})$, $\nu \in \left[\dfrac{\delta}{1+\delta}, 1\right]$, *то* $h \in C^{\nu(1+\delta)-\delta}(\mathbb{T}^1)$.

Доведення. Розглянемо дві точки $\xi_0, \xi \in \mathbb{T}^1$ і таке $n \geq 0$, що $\Delta_n \leq \left|\phi(\xi) - \phi(\xi_0)\right| < \Delta_{n-1}$. Нехай k — найбільше натуральне число таке, що $\left|\phi(\xi) - \phi(\xi_0)\right| \geq k\Delta_n$. (Очевидно, що $1 \leq k \leq k_{n+1}$.) Внаслідок комбінаторики траєкторій, неперервності h і гомологічного рівняння (20) маємо

$$\log h(\xi) - \log h(\xi_0) = \mathcal{O}\left(k\Delta_n^{\nu} + \sum_{s=n+1}^{+\infty} k_{s+1}\Delta_s^{\nu}\right),$$

і така сама оцінка є правильною для $h(\xi) - h(\xi_0)$, тому що $\log h(\xi) = \mathcal{O}(1)$.

Оскільки $k_{n+1} < \Delta_{n-1}/\Delta_n = \mathcal{O}\big(\Delta_n^{-\frac{\delta}{1+\delta}}\big)$, то

$$k\Delta_n^{\nu} = k^{\nu(1+\delta)-\delta}\Delta_n^{\nu(1+\delta)-\delta}k^{(1+\delta)(1-\nu)}\Delta_n^{\delta(1-\nu)} = \mathcal{O}\left((k\Delta_n)^{\nu(1+\delta)-\delta}\right),$$

$$\sum_{m=n+1}^{+\infty} k_{m+1}\varepsilon_m = \mathcal{O}\left(\sum_{m=n+1}^{+\infty} \Delta_m^{\frac{\nu(1+\delta)-\delta}{1+\delta}}\right) =$$

$$= \mathcal{O}\left(\sum_{m=n+1}^{+\infty} \Delta_{m-1}^{\nu(1+\delta)-\delta}\right) = \mathcal{O}\left(\Delta_n^{\nu(1+\delta)-\delta}\right)$$

внаслідок (17) та (18). Зрештою, одержуємо

$$h(\xi) - h(\xi_0) = \mathcal{O}((k\Delta_n)^{\nu(1+\delta)-\delta}) =$$

$$= \mathcal{O}(|\phi(\xi) - \phi(\xi_0)|^{\nu(1+\delta)-\delta}) = \mathcal{O}(|\xi - \xi_0|^{\nu(1+\delta)-\delta}).$$

Лему доведено.

Лема 7. *Якщо* $\sigma \in [0, 1+\delta)$, *то* $E_{n,\sigma} = \mathcal{O}\big(\Delta_n^{\frac{\sigma}{1+\delta}}\big)$.

Доведення. З (17) випливає

$$E_{n,\sigma} = \mathcal{O}\left(\Delta_n \sum_{k=0}^{n} \Delta_{n-k}^{\frac{\sigma}{1+\delta}-1}\right).$$

Твердження леми тепер випливає з оцінки $\sum_{k=0}^{n} \Delta_{n-k}^{\frac{\sigma}{1+\delta}-1} = \mathcal{O}\big(\Delta_n^{\frac{\sigma}{1+\delta}-1}\big)$, що є наслідком (18).

Підсумком цього підпункту є наступне твердження.

Твердження 4. *Припустимо, що для дифеоморфізму* $T \in C^1(\mathbb{T}^1)$, $T' > 0$, *з числом обертання* $\rho \in D_\delta$, $\delta \geq 0$, *існує додатна неперервна щільність* h *інваріантної міри і виконується асимптотична оцінка* $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(E_{n,\sigma})$ *з певною сталою* $\sigma \in [0, 1+\delta)$. *Тоді* $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}\big(\Delta_n^{\frac{\sigma}{1+\delta}}\big)$ *і* $h \in C^{\max\{0,\sigma-\delta\}}(\mathbb{T}^1)$.

Доведення безпосередньо випливає з лем 7 та 6.

***3.4. Доведення теореми* 1.** Застосуємо скінченну індуктивну процедуру почергового застосування тверджень 3 та 4 для того, щоб крок за кроком покращити оцінку типу Данжуа у формі

$$(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(E_{n,\sigma}). \tag{35}$$

З результату [10] випливає, що (35) має місце для $\sigma = 1$ (див. (19)), і це буде базою нашої індукції. Розглянемо рекурентну послідовність $\sigma_0 = 1$, $\sigma_{i+1} = \min\left\{1+\beta, \dfrac{2}{1+\delta}\sigma_i\right\}$, $i \geq 0$. Крок індукції запишемо у вигляді наступного твердження.

Лема 8. *Припустимо, що* $\sigma_i \in [1, 1+\beta]$ *та оцінка* (35) *виконується для* $\sigma = \sigma_i$. *Тоді* $\sigma_{i+1} \in [1, 1+\beta]$ *та оцінка* (35) *виконується для* $\sigma = \sigma_{i+1}$.

Доведення. Насамперед зазначимо, що $\sigma_i < 1+\delta$, оскільки $\beta < \delta$. З твердження 4 випливає, що $h \in C^{\gamma_i}(\mathbb{T}^1)$ із $\gamma_i = \sigma_i - \delta \in (0,1)$ та $(T^{q_n})'(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\Delta_n^{\nu_i})$ із $\nu_i = \dfrac{\sigma_i}{1+\delta} \in (0,1)$. Тоді твердження 3 приводить до оцінки (35) для $\sigma =$

$= \min\{1+\beta, 1+\gamma_i, 2\nu_i\}$, але це і є в точності σ_{i+1}, тому що $1+\sigma_i-\delta > \dfrac{2\sigma_i}{1+\delta}$ (дійсно, $(1+\sigma_i-\delta)(1+\delta)-2\sigma_i=(1-\delta)(1+\delta-\sigma_i)>0$). Обмеження на σ_{i+1} доводяться тривіально.

Лему доведено.

Єдине, що залишилося зазначити для доведення теореми 1, — це те, що

$$\sigma_i = \min\left\{1+\beta, \left(\frac{2}{1+\delta}\right)^i\right\},$$

де $\dfrac{2}{1+\delta} > 1$, і тому ця послідовність досягає значення $1+\beta$ за скінченну кількість кроків. А як тільки одержано оцінку (35) із $\sigma = 1+\beta$, твердження 4 одразу ж засвідчує, що $h \in C^{1+\beta-\delta}$.

Теорему доведено.

1. *Poincare H.* Memoire sur les courbes definie par une equation differentielle I – IV // J. math. pures et appl. – 1881–1886.
2. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
3. *Denjoy A.* Sur les courbes definies par les equation differentielles a la surface du tore // J. math. pures et appl. – 1932. – **11**. – P. 333 – 375.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 244 с.
5. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21 – 86.
6. *Herman M.-R.* Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotations // I. H. E. S. Publ. Math. – 1979. – **49**. – P. 5 – 233.
7. *Yoccoz J.-C.* Conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle dont le nombre de rotation verifie une condition diophantienne // Ann. sci. Ecole norm. supér. Ser. 4. – 1984. – **17**, № 3. – P. 333 – 359.
8. *Katznelson Y., Ornstein D.* The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle // Erg. Theory and Dynam. Sys. – 1989. – **9**, № 4. – P. 643 – 680.
9. *Синай Я. Г., Ханин К. М.* Гладкость сопряжений диффеоморфизмов окружности с поворотами // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 1. – С. 57 – 82.
10. *Khanin K., Teplinsky A.* Herman's theory revisited. – Toronto, 2007. – 11 p. – Preprint / Univ. Toronto (arXiv: math. DS/0707.0075).
11. *De Melo W., van Strien S.* A structure theorem in one dimensional dynamics // Ann. Math. – 1989. – **129**, № 3. – P. 519 – 546.
12. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Физматгиз, 1960. – 112 с.

Одержано 18.06.07