УДК 517.9

И. Шремр (Ин-т математики АН Чешской Республики, Брно)

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА*

It is proved that for the validity of a theorem on differential inequalities for the hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x} = \ell(u)(t,x) + q(t,x)$$

with a nonincreasing linear operator $\ell\colon C\big([a,b]\times[c,d];\mathbb{R}\big) \to L\big([a,b]\times[c,d];\mathbb{R}\big)$, it is necessary that the operator indicated be an (a,c)-Volterra operator.

Показано, що для того, щоб для лінійного функціонально-диференціального рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x} = \ell(u)(t,x) + q(t,x)$$

з від'ємним лінійним оператором $\ell\colon C\big([a,b]\times[c,d];\mathbb{R}\big) \to L\big([a,b]\times[c,d];\mathbb{R}\big)$ була справедливою теорема про диференціальні нерівності, необхідною є (a,c)-вольтерровість оператора ℓ.

1. Введение. На прямоугольнике $\mathcal{D} = [a,b]\times[c,d]$ рассмотрим линейное функционально-дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\,\partial x} = \ell(u)(t,x) + q(t,x), \tag{1.1}$$

где $\ell\colon C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big) \to L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ — линейный ограниченный оператор, а $q \in L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$. Как обычно в теории Каратеодори, под решением уравнения (1.1) понимаем функцию $u \in C^*\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ (см. п. 2), удовлетворяющую почти всюду на $\mathcal{D}$ этому уравнению.

Известно, что теоремы о дифференциальных неравенствах играют важную роль в теории обыкновенных и функционально-дифференциальных уравнений и имеют много полезных следствий. Эти результаты очень важны, например, для метода нижних и верхних функций и техники монотонных итераций, эффективных при доказательстве существования решений различных начальных и краевых задач (см., например, [1 – 6] и приведенную там библиографию).

Теорему о функционально-дифференциальных неравенствах гиперболического типа можно сформулировать следующим образом.

Определение 1.1 [7]. *Будем говорить, что для уравнения* (1.1) *справедлива теорема о дифференциальных неравенствах, и писать* $\ell \in \mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$, *если имеет место следующая импликация*:

*Поддержана Грантовым агентством Чешской Республики (грант № 201/06/0254) и Академией наук Чешской Республики (институциональный исследовательский план № AV0Z10190503).

$$\left.\begin{array}{l} u \in C^*(\mathcal{D};\mathbb{R}), \\ u_{tx}(t,x) \geq \ell(u)(t,x) \textit{ для почти всех } (t,x) \in \mathcal{D}, \\ u(a,c) \geq 0, \\ u_t(t,c) \geq 0 \textit{ для почти всех } t \in [a,b], \\ u_x(a,x) \geq 0 \textit{ для почти всех } x \in [c,d] \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u(t,x) \geq 0 \quad \textit{для} \quad (t,x) \in \mathcal{D}.$$

Заметим, что в отличие от скалярных обыкновенных дифференциальных уравнений можно легко построить пример уравнения (1.1), для которого теорема о дифференциальных неравенствах не будет справедливой. Следовательно, включение $\ell \in \mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$ имеет место не для всех $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$. Некоторые эффективные условия, гарантирующие справедливость включения $\ell \in \mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$, можно найти в работе [7]. Приведенные там теоремы содержат в себе предположение о том, что отрицательный оператор является так называемым (a,c)-вольтерровым оператором. Ниже мы покажем (см. теорему 3.1), что это предположение является также необходимым и, следовательно, его нельзя исключить.

Рассмотрим теперь характеристическую начальную задачу (задачу Дарбу) для уравнения (1.1). В этом случае значения решения u предписаны на характеристических кривых $t = a$ и $x = c$, т. е. рассматриваются начальные условия

$$u(t,c) = \varphi(t) \quad \text{для} \quad t \in [a,b], \qquad u(a,x) = \psi(x) \quad \text{для} \quad x \in [c,d], \tag{1.2}$$

где $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\psi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие условию $\varphi(a) = \psi(c)$.

Известно, что для задачи (1.1), (1.2) имеет место альтернатива Фредгольма (см., например, [8]).

Теорема 1.1 [8]. *Для того чтобы задача* (1.1), (1.2) *была однозначно разрешима при любом $q \in L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ и произвольных абсолютно непрерывных функциях $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\psi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\varphi(a) = \psi(c)$, необходимо и достаточно, чтобы однородная задача*

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\, \partial x} = \ell(u)(t,x), \tag{1.1_0}$$

$$u(t,c) = 0 \quad \textit{для} \quad t \in [a,b], \qquad u(a,x) = 0 \quad \textit{для} \quad x \in [c,d] \tag{1.2_0}$$

имела только тривиальное решение.

Из определения 1.1 и теоремы 1.1 непосредственно следует такое утверждение.

Предложение 1.1. *Нижеследующие утверждения эквивалентны*:

1. *Оператор ℓ принадлежит множеству $\mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$.*

2. *Задача* (1.1), (1.2) *однозначно разрешима при любом $q \in L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ и произвольных абсолютно непрерывных функциях $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\psi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\varphi(a) = \psi(c)$. Кроме того, решение этой задачи является*

неотрицательным на множестве $\mathcal{D}$, если неоднородная часть q неотрицательна и начальные функции φ и ψ неотрицательные и неубывающие.

3. *Оператор $K_\ell \colon C^*(\mathcal{D};\mathbb{R}) \to L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$, определенный формулой*

$$K_\ell(v)(t,x) = v_{tx}(t,x) - \ell(v)(t,x) \quad \textit{для почти всех} \quad (t,x) \in \mathcal{D},$$

является инверсно положительным на множестве B, где

$$B = \big\{v \in C^*(\mathcal{D};\mathbb{R}) \colon v(a,c) \geq 0,$$
$$v_t(t,c) \geq 0 \quad \textit{для почти всех} \quad t \in [a,b],$$
$$v_x(a,x) \geq 0 \quad \textit{для почти всех} \quad x \in [c,d]\big\}.$$

2. Обозначения и определения. Введем следующие обозначения:

1. $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
2. $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$.
3. $C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ — банахово пространство непрерывных функций $v\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|v\|_C = \max\big\{|v(t,x)| \colon (t,x) \in \mathcal{D}\big\}$.
4. $C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}_+\big) = \big\{v \in C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big) \colon v(t,x) \geq 0$ для $(t,x) \in \mathcal{D}\big\}$.
5. $C^2\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ — множество функций $v\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, непрерывных вместе со своими производными первого и второго порядка.
6. $C^*\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ — множество функций $v\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, допускающих представление

$$v(t,x) = v_1(t) + v_2(x) + \int\limits_a^t\int\limits_c^x h(s,\eta)d\eta ds, \quad (t,x) \in \mathcal{D},$$

где $v_1\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $v_2\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывные функции и $h \in L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$. Эквивалентные определения класса $C^*\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ приведены в замечании 2.1.

7. $L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ — банахово пространство функций $p\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, суммируемых в смысле Лебега, с нормой $\|p\|_L = \iint_{\mathcal{D}} |p(t,x)|dtdx$.
8. $L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}_+\big) = \big\{p \in L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big) \colon p(t,x) \geq 0$ для почти всех $(t,x) \in \mathcal{D}\big\}$.
9. $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ — множество линейных ограниченных операторов $\ell\colon C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big) \to L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$.
10. $\operatorname{mes} A$ — лебегова мера множества $A \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 2.1. *Будем говорить, что оператор $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ является положительным, если он отображает множество $C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}_+\big)$ во множество $L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}_+\big)$. Класс положительных операторов обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{D})$. Оператор $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ называется отрицательным, если $-\ell \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$.*

Определение 2.2. *Будем говорить, что оператор $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ является (a,c)-вольтерровым, если для каждого прямоугольника $[a,t_0]\times[c,x_0] \subseteq \mathcal{D}$ и произвольной функции $v \in C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$, удовлетворяющих условию*

$$v(t,x) = 0 \quad \textit{для} \quad (t,x) \in [a,t_0]\times[c,x_0],$$

выполняется условие

$$\ell(v)(t,x) = 0 \quad \textit{для почти всех} \quad (t,x) \in [a,t_0] \times [c,x_0].$$

Аналогично, $\Omega\colon L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big) \to C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ *называется* (a,c)*-вольтерровым оператором, если условие*

$$\Omega(p)(t,x) = 0 \quad \textit{для} \quad (t,x) \in [a,t_0] \times [c,x_0]$$

выполнено для всех прямоугольников $[a,t_0] \times [c,x_0] \subseteq \mathcal{D}$ *и функций* $p \in L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ *таких, что*

$$p(t,x) = 0 \quad \textit{для почти всех} \quad (t,x) \in [a,t_0] \times [c,x_0].$$

Замечание **2.1.** Нетрудно проверить (см., например, [9 – 11]), что $v \in C^*(\mathcal{D};\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $v\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

a) для всех $x \in [c,d]$ функции $v(\cdot,x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ и $v(a,\cdot)\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывны;

b) для почти всех $t \in [a,b]$ функция $v_t(t,\cdot)\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна;

c) $v_{tx} \in L(\mathcal{D};\mathbb{R})$.

В силу теоремы Фубини ясно, что можно заменить порядок интегрирования в интегральном представлении функции $v \in C^*(\mathcal{D};\mathbb{R})$ и, следовательно, условия a) – c) можно заменить на симметричные им условия:

A) функция $v(\cdot,c)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, для всех $t \in [a,b]$ функция $v(t,\cdot)\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ также абсолютно непрерывна;

B) для почти всех $x \in [c,d]$ функция $v_x(\cdot,x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна;

C) $v_{xt} \in L(\mathcal{D};\mathbb{R})$.

Заметим также, что множество $C^*(\mathcal{D};\mathbb{R})$ совпадает с классом функций двух переменных, которые являются абсолютно непрерывными на $\mathcal{D}$ в смысле Каратеодори (см., например, [10, 12 – 14]).

Определение 2.3. *Пусть однородная задача* (1.1_0), (1.2_0) *имеет только тривиальное решение. Обозначим через* Ω *оператор, который сопоставляет каждой функции* $q \in L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ *решение* u *задачи* (1.1), (1.2_0). *Оператор* Ω *называется оператором Дарбу задачи* (1.1_0), (1.2_0).

Замечание **2.2.** Из теоремы 1.1 следует, что оператор Ω корректно определен. Более того, ясно, что Ω является линейным оператором, отображающим множество $L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ во множество $C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$. С другой стороны, из следствия 6.3, доказанного в работе [8], вытекает, что этот оператор непрерывен.

Замечание **2.3.** Легко проверить, что при условии $\ell \in \mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$ оператор Дарбу Ω задачи (1.1_0), (1.2_0) отображает множество $L\big(\mathcal{D};\mathbb{R}_+\big)$ во множество $C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}_+\big)$ и, следовательно, оператор Ω положителен.

3. Основные результаты. Как было отмечено выше, эффективные условия для справедливости включения $\ell \in \mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$ указаны в работе [7], где можно найти, например, следующий результат.

Предложение 3.1 ([7], теорема 3.5). *Пусть* ℓ — *отрицательный* (a,c)*-вольтерров оператор и существует функция* $\gamma \in C^*\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ *такая, что выполнены условия*

$$\frac{\partial^2\gamma(t,x)}{\partial t\,\partial x} \le \ell(\gamma)(t,x) \quad \textit{для почти всех} \quad (t,x) \in \mathcal{D},$$

$$\gamma(t,x) > 0 \quad \textit{для} \quad (t,x) \in [a,b[\times[c,d[$$

и

$$\frac{\partial\gamma(t,c)}{\partial t} \le 0 \quad \textit{для почти всех} \quad t \in [a,b[\,,$$

$$\frac{\partial\gamma(a,x)}{\partial x} \le 0 \quad \textit{для почти всех} \quad x \in [c,d[\,.$$

Тогда оператор ℓ принадлежит множеству $\mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$.

Из следующей теоремы вытекает, что предположение, касающееся (a,c)-вольтерровости оператора ℓ в предложении 3.1, является необходимым. Аналогичный результат для функционально-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными первого и второго порядка был доказан в работах [15, 16].

Сформулируем основной результат этой работы.

Теорема 3.1. *Пусть отрицательный оператор $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ принадлежит множеству $\mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$. Тогда этот оператор необходимо является (a,c)-вольтерровым оператором.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных предложений.

Предложение 3.2. *Пусть $(t_0,x_0) \in]a,b]\times]c,d]$ — произвольная точка и $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ — отрицательный оператор такой, что $\ell \in \mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$. Кроме того, пусть u — решение задачи* (1.1), (1.2), *где*

$$q(t,x) = 0 \quad \textit{для почти всех} \quad (t,x) \in [a,t_0]\times[c,x_0], \tag{3.1}$$

$$\varphi(t) = 0 \quad \textit{для} \quad t \in [a,t_0], \qquad \psi(x) = 0 \quad \textit{для} \quad x \in [c,x_0]. \tag{3.2}$$

Тогда u удовлетворяет условию

$$u(t,x) = 0 \quad \textit{для} \quad (t,x) \in [a,t_0]\times[c,x_0]. \tag{3.3}$$

Доказательство. Положим $\mathcal{D}_0 = [a,t_0]\times[c,x_0]$. В силу включения $\ell \in \mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$ и теоремы 1.1 ясно, что задача

$$\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t\,\partial x} = \ell(v)(t,x) + \big|q(t,x)\big|, \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} v(t,c) = \int\limits_a^t |\varphi'(s)|ds, \quad t \in [a,b], \\ v(a,x) = \int\limits_c^x |\psi'(\eta)|d\eta, \quad x \in [c,d], \end{gathered} \tag{3.5}$$

имеет единственное решение v. Кроме того, v допускает оценку

$$v(t,x) \ge 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}. \tag{3.6}$$

Тогда с учетом включения $\ell \in \mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$ нетрудно проверить, что

$$v(t,x) \geq u(t,x), \quad (t,x) \in \mathcal{D}, \tag{3.7}$$

так как u является решением задачи (1.1), (1.2), где функции q, φ и ψ удовлетворяют условиям (3.1), (3.2). Однако оператор ℓ, по предположению, отрицателен, и поэтому из условий (3.4) и (3.6) вытекает, что

$$v_{tx}(t,x) \leq \big|q(t,x)\big| \quad \text{для почти всех} \quad (t,x) \in \mathcal{D}.$$

Отсюда, в силу условий (3.1), (3.2), (3.5) и (3.6), следует

$$0 \leq v(t,x) \leq \int\limits_a^t |\varphi'(s)|ds + \int\limits_c^x |\psi'(\eta)|d\eta + \int\limits_a^t \int\limits_c^x \big|q(s,\eta)\big|d\eta ds = 0$$

для всех $(t,x) \in \mathcal{D}_0$, т. е.

$$v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}_0\,. \tag{3.8}$$

С другой стороны, с учетом условий (1.1), (3.4), (3.7) и предположения $-\ell \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ получаем

$$u_{tx}(t,x) = \ell(u-v)(t,x) + q(t,x) + \ell(v)(t,x) \geq q(t,x) + \ell(v)(t,x) =$$

$$= v_{tx}(t,x) + q(t,x) - \big|q(t,x)\big| \quad \text{для почти всех} \quad (t,x) \in \mathcal{D}.$$

Следовательно, в силу (3.1) и (3.8) ясно, что

$$u_{tx}(t,x) \geq 0 \quad \text{для почти всех} \quad (t,x) \in \mathcal{D}_0.$$

Заметив теперь, что функции φ и ψ в начальных условиях (1.2) удовлетворяют равенствам (3.2), из последнего неравенства непосредственно получим

$$u(t,x) = \int\limits_a^t \int\limits_c^x u_{s\eta}(s,\eta)d\eta ds \geq 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}_0\,. \tag{3.9}$$

Теперь справедливость требуемого равенства (3.3) вытекает из условий (3.7) – (3.9).

Из приведенного предложения, в частности, следует, что если оператор ℓ в уравнении (1.1) отрицателен и для гиперболического уравнения (1.1) справедлива теорема о дифференциальных неравенствах, то оператор Дарбу задачи (1.1_0), (1.2_0) необходимо (a,c)-вольтерров. Более точно, имеет место следующее утверждение.

***Следствие* 3.1.** *Пусть отрицательный оператор $\ell \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ принадлежит множеству $\mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$. Тогда оператор Дарбу задачи* (1.1_0), (1.2_0) *является* (a,c)-*вольтерровым оператором.*

Для доказательства теоремы 3.1 также потребуется найти гладкую аппроксимацию непрерывной функции двух переменных. Для полноты изложения приведем следующую лемму, касающуюся этого классического вопроса теории функций действительной переменной.

Лемма 3.1. *Пусть $(t_0,x_0) \in\,]a,b] \times\,]c,d]$ — произвольная точка, а $v_0 \in C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ — функция, удовлетворяющая условию*

$$v_0(t,x)=0, \quad (t,x)\in\mathcal{D}_0, \tag{3.10}$$

где $\mathcal{D}_0=[a,t_0]\times[c,x_0]$. *Тогда существует последовательность* $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *функций класса* $C^2\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ *такая, что*

$$v_n(t,x)=0 \quad \textit{для} \quad (t,x)\in\mathcal{D}_0, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{3.11}$$

и

$$\lim_{n\to+\infty}\|v_n-v_0\|_C=0. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, — функции, определенные равенством

$$f_n(s)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad s\le 0,\\ \exp\left(\dfrac{n^3s^3}{n^3s^3-1}\right), & \text{если} \quad 0<s<\dfrac{1}{n},\\ 0, & \text{если} \quad s\ge\dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

Ясно, что функции f_n, $n\in\mathbb{N}$, непрерывны вместе со своими производными первого и второго порядка и допускают оценку

$$0\le f_n(s)\le 1, \qquad s\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ положим

$$\chi_n(t,x)=1-f_n(t-t_0)f_n(x-x_0), \quad (t,x)\in\mathcal{D}.$$

Тогда $\chi_n\in C^2\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и, кроме того, выполнены условия

$$0\le\chi_n(t,x)\le 1, \qquad (t,x)\in\mathcal{D}, \quad n\in\mathbb{N},$$

$$\chi_n(t,x)=0, \qquad (t,x)\in\mathcal{D}_0, \quad n\in\mathbb{N},$$

и

$$\chi_n(t,x)=1, \qquad (t,x)\in\mathcal{D}\setminus\Big([a,t_0+1/n]\times[c,x_0+1/n]\Big), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Из функционального анализа известно, что для функции v_0 можно указать такую последовательность $\{w_n\}_{n=1}^{+\infty}$ функций класса $C^2\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$, что

$$\lim_{n\to+\infty}\|w_n-v_0\|_C=0. \tag{3.14}$$

Положим теперь

$$v_n(t,x)=\chi_n(t,x)w_n(t,x), \qquad (t,x)\in\mathcal{D}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Ясно, что $v_n\in C^2\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и выполняются равенства (3.11). Докажем справедливость условия (3.12). Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Функция v_0 непрерывна на прямоугольнике $\mathcal{D}$, и поэтому существует такое $\delta>0$, что

$$\big|v_0(t_2,x_2)-v_0(t_1,x_1)\big|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{для}\quad (t_1,x_1),\ (t_2,x_2)\in\mathcal{D},\quad |t_2-t_1|+|x_2-x_1|<\delta. \tag{3.15}$$

Кроме того, в силу условия (3.14) существует $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что $n_0>\dfrac{2}{\delta}$ и

$$\big|w_n(t,x)-v_0(t,x)\big|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad (t,x)\in\mathcal{D},\quad n\geq n_0. \tag{3.16}$$

Отсюда с учетом (3.10) и (3.15) получаем

$$\big|v_0(t,x)\big|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{для}\quad (t,x)\in\Big([a,t_0+1/n]\times[c,x_0+1/n]\Big)\cap\mathcal{D},\quad n\geq n_0. \tag{3.17}$$

С другой стороны, ясно, что для всех $(t,x)\in\mathcal{D}$ и $n\in\mathbb{N}$ выполняется соотношение

$$\big|v_0(t,x)-v_n(t,x)\big|\leq\big|v_0(t,x)\big|\big(1-\chi_n(t,x)\big)+\big|v_0(t,x)-w_n(t,x)\big|\chi_n(t,x)\leq$$
$$\leq\big|v_0(t,x)\big|\big(1-\chi_n(t,x)\big)+\big|v_0(t,x)-w_n(t,x)\big|.$$

Следовательно, в силу условий (3.13), (3.16) и (3.17) получим

$$\big|v_0(t,x)-v_n(t,x)\big|<\varepsilon,\qquad (t,x)\in\mathcal{D},\quad n\geq n_0\,,$$

что и устанавливает справедливость условия (3.12).

Перейдем к доказательству теоремы 3.1.

***Доказательство теоремы* 3.1.** Предположим противное, т. е. оператор ℓ не является (a,c)-вольтерровым. Тогда существуют функция $v_0\in C\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ и точка $(t_0,x_0)\in\,]a,b]\times\,]c,d]$ такие, что $(t_0,x_0)\neq(b,d)$, выполняется равенство (3.10) и

$$\operatorname{mes}\big\{(t,x)\in\mathcal{D}_0\colon \ell(v_0)(t,x)\neq0\big\}>0,$$

где $\mathcal{D}_0=[a,t_0]\times[c,x_0]$. Не ограничивая общности, можем считать, что

$$\operatorname{mes}\big\{(t,x)\in\mathcal{D}_0\colon \ell(v_0)(t,x)<0\big\}>0. \tag{3.18}$$

Сначала покажем, что

$$\Omega\big(\ell(|v_0|)\big)(t,x)=0,\quad (t,x)\in\mathcal{D}_0, \tag{3.19}$$

где Ω обозначает оператор Дарбу задачи (1.1_0), (1.2_0). В силу леммы 3.1 существует последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{+\infty}$ функций класса $C^2\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ такая, что выполняются равенства (3.11) и

$$\lim_{n\to+\infty}\big\|v_n-|v_0|\big\|_C=0. \tag{3.20}$$

Отсюда имеем

$$\lim_{n\to+\infty}\big\|\Omega\big(\ell(v_n)\big)-\Omega\big(\ell(|v_0|)\big)\big\|_C=0, \tag{3.21}$$

так как операторы ℓ и Ω непрерывны (см. замечание 2.2).

Пусть теперь $z_n = \Omega\big(\ell(v_n)\big)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для каждого натурального n функция z_n, очевидно, является решением задачи

$$\frac{\partial^2 z_n(t,x)}{\partial t\,\partial x} = \ell(z_n)(t,x) + \ell(v_n)(t,x), \tag{3.22}$$

$$z_n(t,c) = 0 \quad \text{для} \quad t \in [a,b], \qquad z_n(a,x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in [c,d]. \tag{3.23}$$

Положим

$$w_n(t,x) = v_n(t,x) + z_n(t,x), \qquad (t,x) \in \mathcal{D}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $w_n \in C^*\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поскольку все функции v_n принадлежат множеству $C^2\big(\mathcal{D};\mathbb{R}\big)$. Кроме того, в силу условий (3.22) и (3.23) получим

$$\frac{\partial^2 w_n(t,x)}{\partial t\,\partial x} = \ell(w_n)(t,x) + \frac{\partial^2 v_n(t,x)}{\partial t\,\partial x} \quad \text{для почти всех} \quad (t,x) \in \mathcal{D},$$

$$w_n(t,c) = v_n(t,c) \quad \text{для} \quad t \in [a,b], \qquad w_n(a,x) = v_n(a,x) \quad \text{для} \quad x \in [c,d].$$

Поэтому с учетом равенств (3.11) из предложения 3.2 находим

$$w_n(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \mathcal{D}_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Подставляя (3.11) в последнее условие, получаем

$$\Omega\big(\ell(v_n)\big)(t,x) = z_n(t,x) = -v_n(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \mathcal{D}_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, в силу условия (3.21) имеет место равенство (3.19).

Обозначим через u решение задачи (1.1), (1.2_0), где

$$q(t,x) = \begin{cases} -\ell(|v_0|)(t,x), & (t,x) \in \mathcal{D}_0, \\ 0, & (t,x) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0. \end{cases} \tag{3.24}$$

В силу включения $\ell \in \mathcal{S}_{ac}(\mathcal{D})$ и теоремы 1.1 это решение существует и единственно. Кроме того, легко проверить, что

$$u(t,x) \geq 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}, \tag{3.25}$$

ибо оператор ℓ, согласно предположению, отрицателен.

Далее, с учетом (3.18) из (3.24) получаем

$$\operatorname{mes}\big\{(t,x) \in \mathcal{D}_0 \colon q(t,x) > 0\big\} > 0. \tag{3.26}$$

Поскольку $u = \Omega(q)$, а оператор Ω является (a,c)-вольтерровым (см. следствие 3.1), из (3.19) и (3.24) нетрудно получить равенство

$$u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}_0. \tag{3.27}$$

С другой стороны, в силу условия (3.25) и предположения $-\ell \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ из уравнения (1.1) вытекает оценка

$$u_{tx}(t,x) \le q(t,x) \quad \text{для почти всех} \quad (t,x) \in \mathcal{D},$$

и поэтому в силу условий (3.24) и (3.27)

$$u_{tx}(t,x) \le 0 \quad \text{для почти всех} \quad (t,x) \in \mathcal{D}. \tag{3.28}$$

Однако функция u удовлетворяет однородным начальным условиям (1.2_0), и поэтому в силу (3.28)

$$u(t,x) = \int\limits_a^t \int\limits_c^x u_{s\eta}(s,\eta)d\eta ds \le 0, \quad (t,x) \in \mathcal{D}. \tag{3.29}$$

Из (3.29), принимая во внимание (3.25), заключаем, что $u \equiv 0$ на множестве $\mathcal{D}$, и поэтому в силу уравнения (1.1) имеем $q \equiv 0$ на $\mathcal{D}$, что противоречит неравенству (3.26).

Полученное противоречие доказывает теорему.

1. *Bernfeld S., Lakshmikantham V.* Monotone methods for nonlinear boundary value problems in Banach spaces // Nonlinear Anal. – 1979. – **3**. – P. 303 – 316.
2. *Deimling K., Lakshmikantham V.* Existence and comparision theorems for differential equations in Banach spaces // Ibid. – 1979. – **3**. – P. 569 – 575.
3. *Lakshmikantham V., Pandit S. G.* The method of upper, lower solutions and hyperbolic partial differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1985. – **105**. – P. 466 – 477.
4. *Mawhin J., Ortega R., Robles-Pérez A. M.* A maximum principle for bounded solutions of the telegraph equations and applications to nonlinear forcings // Ibid. – 2000. – **251**. – P. 695 – 709.
5. *Ortega R., Robles-Pérez A. M.* A maximum principle for periodic solutions of the telegraph equation // Ibid. – 1998. – **221**. – P. 625 – 651.
6. *Sattinger D.* Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems // Indiana Univ. Math. J. – 1972. – **21**. – P. 979 – 1000.
7. *Lomtatidze A., Mukhigulashvili S., Šremr J.* Nonnegative solutions of the characteristic initial value problem for linear partial functional-differential equations of hyperbolic type // Math. Comput. Modelling. – 2007. doi:10.1016/j.mcm.2007.07.003 (см. также Preprint / Acad. Sci. Czech Republic. Inst. Math., № 160, 2005).
8. *Šremr J.* On the characteristic initial value problem for linear partial functional-differential equations of hyperbolic type // Proc. Edinburgh Math. Soc. (to appear) (см. также Preprint / Acad. Sci. Czech Republic. Inst. Math., № 161, 2005).
9. *Deimling K.* Absolutely continuous solutions of Cauchy problem for $u_{xy} = f(x,y,u,u_x,u_y)$ // Ann. mat. pura ed appl. – 1971. – **89**. – P. 381 – 391.
10. *Dzagnidze O.* Some new results on the continuity and differentiability of functions of several real variables // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2004. – **134**. – P. 1 – 144.
11. *Толстов Г. П.* О второй смешанной производной // Мат. сб. – 1949. – **24**, № 1. – С. 27 – 51.
12. *Carathéodory C.* Vorlesungen über relle Funktionen. – Leipzig; Berlin: Verlag und Druck Von B. G. Teubner, 1918.
13. *Lojasiewicz S.* An introduction to the theory of real functions. – Chichester: Wiley Int. Publ., 1988.
14. *Walczak S.* Absolutely continuous functions of several variables and their application to to differential equations // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1987. – **35**, № 11–12. – P. 733 – 744.
15. *Bravyi E., Lomtatidze A., Půža B.* A note on the theorem on differential inequalities // Georg. Math. J. – 2000. – **7**, № 4. – C. 627 – 631.
16. *Štěpánková H.* A note on the theorem on differential inequalities // Electron. J. Qual. Theory Different. Equat. – 2005. – **7**. – P. 1 – 8.

Получено 16.10.07