УДК 517.9 + 539.214

В. И. Борздыко (Ин-т математики АН Республики Таджикистан, Душанбе)

ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

We consider the operator which is a variable hysteron that describes, according to the Krasnosel'skii – Pokrovskii scheme, a nonstationary hysteresis nonlinearity with characteristics varying under external influences. We obtain sufficient conditions under which this operator is defined for inputs from the class of functions $H^1[t_0, T]$ that satisfy the Lipschitz condition on the interval $[t_0, T]$.

Отримано достатні умови, за яких оператор – змінний гістерон, що описує за схемою Красносельського – Покровського нестаціонарну гістерезисну нелінійність, характеристики якої змінюються під впливом зовнішніх сил, є визначеним для входів із класу функцій $H^1[t_0, T]$, що задовольняють на відрізку $[t_0, T]$ умову Ліпшиця.

Многие задачи в естественных науках — физике, механике, экологии — приводят к рассмотрению дифференциальных уравнений с особого рода сложными нелинейностями, называемыми гистерезисными. В [1, с. 99] предложена схема для описания нелинейных систем с гистерезисом, характеристики которых меняются со временем, и поставлена проблема выделения классов входов, для которых эта схема реализуется. В данной статье формулируются условия, при которых эта схема Красносельского – Покровского осуществима для любого входа, удовлетворяющего условию Липшица. Математическая теория систем с гистерезисом, заложенная в [1], основана на общей идеологии теории систем [2]. В ней каждая гистерезисная нелинейность трактуется со своим пространством состояний, операторами-гистеронами „вход-выход". Она охватывает разработанные ранее феноменологические модели. В п. 1 приведены необходимые в дальнейшем понятия [1].

1. Статический гистерон. Для описания конкретного гистерона W определяют область его возможных состояний $\Omega(W)$, расположенную на плоскости $\Pi = \{u, x\}$, и однозначные операторы

$$x(t) = W(t_0, u_0, x_0)u(t), \quad t \geq t_0, \tag{1.1}$$

сопоставляющие допустимым входам $u(t)$ из некоторого класса функций выходы $x(t)$, если преобразователь-гистерон находился в начальном состоянии $\{u_0, x_0\} \in \Omega(W)$. Имеет место полугрупповое тождество

$$W(t_0, u_0, x_0)u(t) = W[t_1, u(t_1), W(t_0, u_0, x_0)u(t_1)]u(t). \tag{1.2}$$

Область возможных состояний $\Omega(W)$ гистерона характеризуется рядом свойств [1, с. 25]. В $\Omega(W)$ выделены две кривые: Φ_l и Φ_r. Область $\Omega_0(W) = \Omega(W)/(\Phi_l \cup \Phi_r)$ расслоена в систему непересекающихся графиков непрерывных функций $\Pi(u, M)$, $M \in \Omega_0(W)$ — некоторая точка на $\Pi(u, M)$. По кривым $\Pi(u, M)$ и Φ_l, Φ_r по определенному правилу вводится система определяющих кривых $T(u, M)$, $-\infty < u < +\infty$, $M \in \Omega(W)$ — произвольная точка [1, с. 27]. Затем дается описание операторов (1.1) для гистерона W. Пусть начальное состояние гистерона задано точкой $M_0 = \{u_0, x_0\} = \{u(t_0), x_0\} \in \Omega(W)$ и вход $u(t)$ монотонен и непрерывен. Тогда вход в (1.1) определяется равенством

$$x(t) = W(t_0, u_0, x_0)u(t) = T[u(t), M_0], \quad t \geq t_0. \tag{1.3}$$

Оператор-гистерон можно определить на любом кусочно-монотонном непрерывном входе $u(t)$, разбив область определения функции $u(t)$ на промежутки ее монотонности и воспользовавшись полугрупповым тождеством (1.2). Затем оказывается возможным определение гистерона W на любом непрерывном входе $u(t)$ с помощью предельного перехода на основании свойства виброкорректности гистерона [1, с. 28]. Виброкорректность означает, что из $\{u_0, x_0\} \in \Omega(W)$ и равномерной на каждом конечном промежутке $[t_0, t_1]$ сходимости непрерывных входов $u_n(t)$, $t \geq t_0$, к входу $u^*(t)$, $t \geq t_0$, где $u_n(t_0) = u^*(t_0) = u_0$, следует равномерная на каждом промежутке сходимость непрерывных выходов $x_n(t) = W(t_0, u_0, x_0)u_n(t)$, $t \geq t_0$, $n = 1, 2, \ldots$, к непрерывному выходу $x^*(t) = W(t_0, u_0, x_0)u^*(t)$, $t \geq t_0$.

2. Переменный гистерон. ***2.1. Математическая схема для конструкции переменного гистерона.*** Пусть задано однопараметрическое семейство W^t, $t_0 \leq t \leq T$, гистеронов, при $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ для областей возможных состояний $\Omega(W^t)$ выполняется условие $\Omega(W^{t_1}) \subset \Omega(W^{t_2})$, на $[t_0, T]$ задан непрерывный вход $u(t)$ и $\tau_1 \in [t_0, T)$. Тогда для любого $\tau_2 \in [\tau_1, T)$ и произвольного начального состояния $\{u(\tau_2), x_0\} \in \Omega(W^{\tau_1})$ однозначно определен выход $x(t) = W^{\tau_1}[\tau_2, u(\tau_2), x_0]u(t)$, $\tau_2 \leq t \leq T$. В [1, с. 99] предложена следующая „схема m" для определения переменного гистерона. Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на конечное число промежутков Δ_i, $i = 1, \ldots, n$, точками $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = T$. Мелкостью этого разбиения S является число $\delta(S) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |\tau_i - \tau_{i-1}|$. Разбиению S сопоставляется переменный оператор-гистерон $\overline{W}(S)$, областью начальных состояний которого является $\Omega(W^{\tau_0})$. Выход $x(t)$ при применении $\overline{W}(S)$ к непрерывному входу $u(t)$, $t \leq t_0 \leq T$, соответствующий произвольному начальному состоянию $\{u(t_0), x_0\} \in \Omega(W^{\tau_0})$, определяется формулами

$$x(t) = \begin{cases} W^{\tau_0}[\tau_0, u(t_0), x_0]u(t) & \text{при} \quad t \in \Delta_1 = [t_0, \tau_1), \\ W^{\tau_1}[\tau_1, u(\tau_1), x(\tau_1)]u(t) & \text{при} \quad t \in \Delta_2 = [\tau_1, \tau_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W^{\tau_{i-1}}[\tau_{i-1}, u(\tau_{i-1}), x(\tau_{i-1})]u(t) & \text{при} \quad t \in \Delta_i = [\tau_{i-1}, \tau_i), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W^{\tau_{n-1}}[\tau_{n-1}, u(\tau_{n-1}), x(\tau_{n-1})]u(t) & \text{при} \quad t \in \Delta_n = [\tau_{n-1}, T]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Выход $x(t)$ непрерывен на $[t_0, T]$. Если при рассмотрении различных разбиений S отрезка $[t_0, T]$ и при стремлении мелкости разбиений $\delta(S)$ к нулю выходы $x_S(t)$, определяемые формулами (2.1), соответствующими S, сходятся в каком-либо смысле по метрике некоторого пространства непрерывных на $[t_0, T]$ функций к функции $y(t)$, то эту функцию будем обозначать через $y(t) = \overline{W}[t_0, u(t_0), x_0]u(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, и считать выходом переменного гистерона $\overline{W}$, соответствующим входу $u(t)$ и начальному состоянию $\{u(t_0), x_0\} \in \Omega(W^{\tau_0})$. В дальнейшем будем рассматривать равномерную сходимость выходов $x_S(t)$ на отрезке $[t_0, T]$ при $\delta(S) \to 0$, т. е. сходимость по метрике пространства $C[t_0, T]$. В этом случае функция $y(t)$ непрерывна на $[t_0, T]$. Областью начальных состояний переменного гистерона $\overline{W}$ является $\Omega(W^{\tau_0})$, т. е. $\Omega(\overline{W}) = \Omega(W^{\tau_0})$. В [1, с. 101] поставлена проблема нахождения условий, при которых описанная „схема m" определения переменного гистерона реализуется для любого входа $u(t)$ из какого-либо класса $L \subset C[t_0, T]$. В данной статье предлагаются некоторые достаточные условия, обеспечивающие реализацию „схемы m" для любого входа $u(t)$, принадлежащего классу функций $H^1[t_0, T]$, удовлетворяющих условию Липшица.

***Замечание* 2.1.** В [1, с. 88 – 106] рассмотрен подход к описанию переменного гистерона, использующий виброкорректные дифференциальные уравнения с ограничителями (см. также [3]). Класс переменных гистеронов, описанный в пп. 2.1, включает в себя переменные гистероны, описываемые виброкорректными дифференциальными уравнениями.

Рассмотренная выше схема используется для описания нелинейных систем с гистерезисом, характеристики которых меняются в силу изменения со временем параметров внешней среды. В [4, 5] рассматривается нестационарность системы с гистерезисом, когда она объясняется внутренними свойствами функционирования этой системы.

2.2. *Условия реализации „схемы m" для любого входа $u(t) \in H^1[t_0, T]$.* Пусть функция $f(t) \in H^1[t_0, T]$, т. е. удовлетворяет на $[t_0, T]$ условию Липшица. Рассмотрим минимальную постоянную Липшица функции $f(t)$ на $[t_0, T]$, определяемую равенством

$$l = \sup_{t_1, t_2 \in [t_0, T], t_1 \neq t_2} |f(t_1) - f(t_2)| \, |t_1 - t_2|^{-1}, \tag{2.2}$$

и будем говорить, что $f(t) \in H_l^1[t_0, T]$.

Лемма 2.1. *Пусть $f(t) \in H_l^1[t_0, T]$. Тогда существует последовательность многочленов $P_k(t) \in H_{l_k}^1[t_0, T]$, $k = 1, 2, \ldots$, которая равномерно сходится на $[t_0, T]$ к функции $f(t)$ и*

$$l_k \to l \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{2.3}$$

***Замечание* 2.2.** Идея доказательства этой леммы принадлежит Э. М. Мухамадиеву. Первоначально теорему 2.1 доказал автор, использовав теорему В. К. Дзядыка [6, с. 271].

Лемма 2.2. *Пусть $g(x) = 1 + cx$, где $c > 0$. Тогда для любых неотрицательных чисел x_i, $i = 1, \ldots, n$, верна оценка $1 \leq g(x_1)\, g(x_2) \ldots g(x_n) \leq \exp(cM)$, где $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq M$.*

Лемма 2.3. *Пусть z_i, $i = 1, \ldots, n$, — произвольные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{n} z_i \leq d$. Тогда имеет место оценка $F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_n + (1 + cz_n) z_{n-1} + (1 + cz_n)(1 + cz_{n-1}) z_{n-2} + \ldots + (1 + cz_n) \times (1 + cz_{n-1}) (1 + cz_2) z_1 \leq d \exp(cd)$. Здесь $d > 0$ и $c > 0$ — некоторые постоянные.*

Рассмотрим некоторый гистерон W с областью возможных состояний $\Omega(W)$. Пусть $u(t) \in H^1[t_0, T]$ — некоторый допустимый для этого гистерона вход. Обозначим через $\Phi_u = \{\varphi(t)\}$, $t \in [t_0, T]$, множество выходов, соответствующих этому входу при различных начальных состояниях из области $\Omega(W)$. Пусть $0 \leq r < +\infty$ — некоторое число и данный вход удовлетворяет условию $|u(t)| \leq r$, $t \in [t_0, T]$. Обозначим через Φ_u^r множество выходов из Φ_u, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t)| \le r, \quad t \in [t_0, T]. \tag{2.4}$$

Лемма 2.4. *Пусть все кривые, определяющие гистерон* W, *удовлетворяют общему условию Липшица с одной и той же постоянной* m. *Пусть* $u(t) \in H^1[t_0, T]$ — *некоторый допустимый для гистерона* W *вход, имеющий постоянную Липшица* l. *Тогда все выходы из семейства* Φ_u *принадлежат классу* $H^1[t_0, T]$ *с одной и той же постоянной Липшица* ml.

Лемма 2.5. *Пусть все кривые, входящие в определение гистеронов из семейства* W^t, $t_0 \le t \le T$, *удовлетворяют общему условию Липшица с одной и той же постоянной* m. *Пусть существуют такие положительные константы* γ, ε, μ *и неотрицательная* B, *что для произвольной точки* $M = \{u_0, z_0\} \in \Omega(W^{t_0})$ *имеет место неравенство*

$$\left|T^{t_1}(u_0 + h, M) - T^{t_2}(u_0 + h, M)\right| \le B|h|^2|t_1 - t_2|^{\mu} \tag{2.5}$$

при $|h| \le \gamma$, $|t_1 - t_2| \le \varepsilon$, $t_1, t_2 \in [t_0, T]$. *Тогда для любого входа* $u(t) \in H^1[t_0, T]$ *и любого начального состояния* $\{u(t_0), x_0\} \in \Omega(W^{t_0})$ *существует такое положительное число* r, *что при любом разбиении* S *с* $\delta S \le \varepsilon$ *соответствующий выход удовлетворяет условию*

$$|\bar{x}_S(t)| \le r \tag{2.6}$$

при $t \in [t_0, T]$.

Подробные доказательства лемм 2.1 – 2.5 приведены в [7].

Теорема 2.1. *Пусть все кривые, определяющие гистероны, входящие в семейство* W^t, $t_0 \le t \le T$, *удовлетворяют общему условию Липшица с одной и той же постоянной. Пусть выполнены условия*:

1) *существуют такие положительные константы* γ, ε_0, μ *и неотрицательная* B, *что для произвольной точки* $M = \{u_0, z_0\} \in \Omega(W^{t_0})$ *имеет место неравенство*

$$\left|T^{t_1}(u_0 + h, M) - T^{t_2}(u_0 + h, M)\right| \le B|h|^2|t_1 - t_2|^{\mu} \tag{2.7}$$

при $|h| \le \gamma$, $|t_1 - t_2| \le \varepsilon_0$, $t_1, t_2 \in [t_0, T]$;

2) *пусть для любого неотрицательного числа* r *существуют такие постоянные числа* $0 \le K_r < +\infty$ *и* $0 < \bar{\alpha}_r < +\infty$, *что если вход* $u(t) \in H^1[t_0, T]$ *с постоянной Липшица* l *удовлетворяет условию* $|u(t)| \le r$, $t_0 \le t \le T$, *то для любых выходов* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *из семейства* $\Phi_u^r(\tau)$ (*см.* (2.4)), *построенных по гистерону* W^τ *из семейства* W^t, $t_0 \le t \le T$, *имеет место неравенство*

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \le \left[1 + c(t - t^*)\right]\left|\varphi(t^*) - \psi(t^*)\right| \tag{2.8}$$

при $t \in [t^*, t^* + \delta_r]$, *где*

$$c = lK_{r+\varepsilon}, \tag{2.9}$$

$$\delta_r = \min\left\{T - b_1, \alpha_{r+\varepsilon}(l + \varepsilon)^{-1}\right\}, \qquad \alpha_{r+\varepsilon} = \min\left\{\gamma, \bar{\alpha}_{r+\varepsilon}\right\}, \tag{2.10}$$

$b_1 \in (\tau, T)$ — *произвольное фиксированное число*, t^* — *любое число из* $[\tau, b_1]$, $\varepsilon > 0$ — *некоторое число*, $M = \{u(t^*), \varphi(t^*)\} \in \Omega(W^{t_0})$, $N = \{u(t^*), \psi(t^*)\} \in \Omega(W^{t_0})$.

Тогда „схема m*" реализуется для любого входа* $u(t)$ *из класса* $H^1[t_0, T]$.

Доказательство теоремы разобьем на два этапа. На первом этапе доказываются неравенства, которые используются в дальнейшем. Пусть задан вход

$u(t) \in H_l^1[t_0, T]$, $l > 0$, удовлетворяющий условию

$$|u(t)| \le r, \quad t \in [t_0, T], \tag{2.11}$$

где $r > 0$ — некоторая постоянная. Пусть $\tau \in [t_0, T)$, $t^* \in [\tau, b_1]$, $b_1 < T$, $\{u(t^*), z_0\} \in \Omega(W^{t_0})$. Обозначим через $x(\tau, z_0, t)$ выход гистерона W^τ при $t \ge t^*$: $x(\tau, z_0, t) = W^\tau[t^*, u(t^*), z_0]u(t)$. Пусть $\{u(t^*), z_0\}$, $\{u(t^*), y_0\} \in \Omega(W^{t_0})$ и выходы

$$|x(\tau, z_0, t)| \le r, \quad |x(\tau, y_0, t)| \le r, \quad t \in [t^*, T]. \tag{2.12}$$

Тогда в силу условия (2.8) при любом $t \in [t^*, t^* + \delta_r]$ выполняется неравенство

$$|x(\tau, z_0, t) - x(\tau, y_0, t)| \le [1 + c(t - t^*)]|z_0 - y_0|. \tag{2.13}$$

Докажем, что если $|\tau_1 - \tau_2| \le \varepsilon_0$, $t_0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le t^* < b_1$, и

$$|x(\tau_1, z_0, t)| \le r, \quad |x(\tau_2, z_0, t)| \le r, \quad t \in [t^*, T], \tag{2.14}$$

то при $t \in [t^*, t^* + \delta_{r+\varepsilon}]$ имеет место неравенство

$$|x(\tau_1, z_0, t) - x(\tau_2, z_0, t)| \le \lambda_u |\tau_1 - \tau_2|^\mu (t - t^*), \tag{2.15}$$

где $\mu > 0$ — постоянная из условия (2.7), а неотрицательная постоянная λ_u не зависит от t^*, z_0 и определяется заданным входом $u(t)$. Докажем неравенство (2.15) сначала для кусочно-монотонного входа $u(t)$, удовлетворяющего на $[t_0, T]$ условию Липшица с постоянной l. Введем обозначения $u_0 = u(t^*)$ и $M = \{u_0, z_0\}$. В силу (2.10) при $t \in [t^*, t^* + \delta_r]$ имеем неравенство

$$|u(t) - u_0| = |u(t) - u(t^*)| \le l(t - t^*) \le \bar{\alpha}_{r+\varepsilon}.$$

Разобьем отрезок $[t^*, t^* + \delta_r]$ на промежутки монотонности функции $u(t)$: $[t^{(i-1)}, t^{(i)}]$, $i = 1, \ldots, k$, где $t^{(0)} = t^*$, $t^{(k)} = t^* + \delta_r$. Обозначим $\Delta_i t = t^{(i)} - t^{(i-1)}$, $\Delta_i u = u(t^{(i)}) - u(t^{(i-1)})$. Тогда при $t \in [t^{(i-1)}, t^{(i)}]$

$$|u(t^{(i)}) - u(t^{(i-1)})| \le l(t - t^{(i-1)}) \le l\Delta_i t, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{2.16}$$

В силу (1.3), (2.7), (2.16) при $t \in [t^*, t^{(1)}]$

$$|x(\tau_1, z_0, t) - x(\tau_2, z_0, t)| = |T^{\tau_1}(u(t), M) - T^{\tau_2}(u(t), M)| \le$$

$$\le B|u(t) - u(t^*)|^2 |\tau_1 - \tau_2|^\mu \le Bl^2(t - t^*)|\tau_1 - \tau_2|^\mu \delta_r. \tag{2.17}$$

Введем обозначения $x_1 = T^{\tau_1}(u_0 + \Delta_1 u, M) = T^{\tau_1}(u(t^{(1)}), M)$, $y_1 = T^{\tau_2}(u_0 + \Delta_1 u, M) = T^{\tau_2}(u(t^{(1)}), M)$, $M_1 = \{u(t^{(1)}), x_1\}$, $N_1 = \{u(t^{(1)}), y_1\}$, $x_i = T^{\tau_1}[u(t^{(i-1)}) + \Delta_i u, M_{i-1}] = T^{\tau_1}(u(t^{(i)}), M_{i-1})$, $y_i = T^{\tau_2}[u(t^{(i-1)}) + \Delta_i u, N_{i-1}] = T^{\tau_2}(u(t^{(i)}), N_{i-1})$, $M_{i-1} = \{u(t^{(i-1)}), x_{i-1}\}$, $N_{i-1} = \{u(t^{(i-1)}), y_{i-1}\}$, $i = 2, \ldots, k$. Из (1.2), (1.3), (2.7), (2.8), (2.12) – (2.14) и (2.17) при $t \in [t^{(1)}, t^{(2)}]$ получаем

$$|x(\tau_1, z_0, t) - x(\tau_2, z_0, t)| = |T^{\tau_1}[u(t), M_1] - T^{\tau_2}[u(t), N_1]| \le$$

$$\le |T^{\tau_1}[u(t), M_1] - T^{\tau_1}[u(t), N_1]| + |T^{\tau_1}[u(t), N_1] - T^{\tau_2}[u(t), N_1]| \le$$

$$\le [1 + c(t - t^{(1)})]|x_1 - y_1| + Bl^2(t - t^{(1)})^2 |\tau_1 - \tau_2|^\mu \le$$

$$\le \left[1+c\left(t-t^{(1)}\right)\right]Bl^2\left|t^{(1)}-t^*\right|^2|\tau_1-\tau_2|^\mu + Bl^2\left|t-t^{(1)}\right|^2|\tau_1-\tau_2|^\mu \le$$
$$\le Bl^2|\tau_1-\tau_2|^\mu\{\Delta_2 t+[1+c\Delta_2 t]\Delta_1 t\}\left(t-t^*\right).$$

Аналогично, при $t\in\left[t^{(2)},t^{(3)}\right]$

$$|x(\tau_1,z_0,t)-x(\tau_2,z_0,t)| \le \left[1+c\left(t-t^{(2)}\right)\right]|x_2-y_2| + Bl^2\left(t-t^{(2)}\right)^2|\tau_1-\tau_2|^\mu \le$$
$$\le Bl^2\left(t-t^*\right)|\tau_1-\tau_2|^\mu\{\Delta_2 t+[1+c\Delta_2 t]\Delta_1 t\}[1+c\Delta_3 t] +$$
$$+ Bl^2\left(t-t^{(2)}\right)\Delta_3 t|\tau_1-\tau_2|^\mu \le$$
$$\le Bl^2\left(t-t^*\right)|\tau_1-\tau_2|^\mu\{\Delta_3 t+[1+c\Delta_3 t]\Delta_2 t+[1+c\Delta_3 t][1+c\Delta_2 t]\Delta_1 t\}.$$

Далее, используя метод полной математической индукции, при $t\in\left[t^{(i-1)},t^{(i)}\right]$ получаем неравенство

$$|x(\tau_1,z_0,t)-x(\tau_2,z_0,t)| \le Bl^2\left(t-t^*\right)|\tau_1-\tau_2|^\mu\left\{\Delta_i t+[1+c\Delta_i t]\Delta_{i-1}t +\right.$$
$$\left.+ [1+c\Delta_i t]\left[1+c\Delta_{i-1}t\right]\Delta_{i-2}t+\ldots+[1+c\Delta_i t]\left[1+c\Delta_{i-1}t\right]\ldots[1+c\Delta_2 t]\Delta_1 t\right\}. \tag{2.18}$$

Поскольку $\sum_{s=1}^{i}\Delta_s t \le \delta_r$ и $\Delta_s t>0$, $s=1,\ldots,i$, используя в неравенстве (2.18) лемму 2.3, в силу (2.9) при $t\in\left[t^{(i-1)},t^{(i)}\right]$ имеем следующую оценку:

$$|x(\tau_1,z_0,t)-x(\tau_2,z_0,t)| \le \bar\lambda_u|\tau_1-\tau_2|^\mu\left(t-t^*\right), \tag{2.19}$$

где

$$\bar\lambda_u = Bl^2\delta_r\exp(lk_{r+\varepsilon}\delta_r). \tag{2.20}$$

Из (2.19), (2.20) вытекает неравенство (2.15) на отрезке $\left[t^*,t^*+\delta_r\right]$ в случае кусочно-монотонного входа $u(t)\in H^1[t_0,T]$, имеющего постоянную Липшица $l>0$. Предположим теперь, что вход $u(t)$ является произвольной непрерывной на $[t_0,T]$ функцией из $H_l^1[t_0,T]$, удовлетворяющей условию (2.11). Согласно лемме 2.1 существует последовательность входов-многочленов, т. е. кусочно-монотонных функций $p_n(t)\in H_{l_n}^1[t_0,T]$, $n=1,2,\ldots$, такая, что

$$p_n(t)\to u(t) \quad \text{равномерно на} \quad [t_0,T],\ l_n\to l \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{2.3$'$}$$

В силу свойств области возможных состояний гистерона [1, с. 25] можно считать, что при фиксированном t^* точки $L_n=\left\{p_n(t^*),\ z_0\right\}\in\Omega(W^{t_0})$ при достаточно большом n. Предполагается, что выход $x(\tau,z_0,t)$, соответствующий входу $u(t)$, при любых τ_1, $\tau_2\in[t_0,T)$ и $t\ge t^*$ удовлетворяет неравенству (2.12). Обозначим соответственно

$$\begin{aligned} x_n(\tau_1,z_0,t) &= W^{\tau_1}\left[t^*,p_n(t^*),z_0\right]p_n(t),\\ x_n(\tau_2,z_0,t) &= W^{\tau_2}\left[t^*,p_n(t^*),z_0\right]p_n(t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

В силу виброкорректности (п. 1) гистеронов W^{τ_1}, W^{τ_2} из (2.3′) вытекает, что

$$\begin{aligned} x_n(\tau_1,z_0,t) &\to x(\tau_1,z_0,t),\\ x_n(\tau_2,z_0,t) &\to x(\tau_2,z_0,t) \quad \text{при} \quad n\to\infty \end{aligned} \tag{2.22}$$

равномерно на отрезке $\left[t^*, T\right]$.

Вследствие (2.11), (2.12), (2.3′) и (2.22) можно считать, что при заданном $\varepsilon > 0$ для достаточно большого n имеют место неравенства

$$|p_n(t)| \le r + \varepsilon,$$

$$|x_n(\tau_1, z_0, t)| \le r + \varepsilon, \tag{2.23}$$

$$|x_n(\tau_2, z_0, t)| \le r + \varepsilon, \quad t \in [t_0, T],$$

$$[l_n - l] \le \varepsilon. \tag{2.24}$$

В силу кусочной монотонности входов $p_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, условий (2.23), (2.24), соотношений (2.19), (2.20), доказанных при этих условиях, имеет место неравенство

$$|x_n(\tau_1, z_0, t) - x_n(\tau_2, z_0, t)| \le Bl_n^2\, \delta_{r+\varepsilon}^{(n)} \exp(l_n k_{r+2\varepsilon} \delta_{r+\varepsilon}), \tag{2.25}$$

где $\delta_{r+\varepsilon}^{(n)} = \min\left\{T - b_1,\, \alpha_{r+2\varepsilon}(l_n + 2\varepsilon)^{-1}\right\} > 0$, $\alpha_{r+2\varepsilon} > 0$, $k_{r+2\varepsilon} \ge 0$ определяются по $r + \varepsilon$ согласно условию 2 теоремы. Переходя в (2.25) к пределу при $n \to \infty$, из (2.3′), (2.22) получаем, что для произвольного непрерывного входа (2.11) при условии на выходы (2.12) на отрезке $\left[t^*, t^* + \delta_{r+\varepsilon}\right]$ имеет место неравенство (2.15), в котором постоянные переобозначены так, как они используются в дальнейшем:

$$c = lk_{r+2\varepsilon}, \qquad \lambda_u = Bl^2\, \delta_{r+\varepsilon} \exp(lk_{r+2\varepsilon}\delta_{r+\varepsilon}), \tag{2.26}$$

где постоянная $B \ge 0$ из (2.7), $b_1 \in (\tau_2, T)$, $\varepsilon > 0$, $r + \varepsilon > 0$, $l + \varepsilon > 0$, а $\delta_{r+\varepsilon} > 0$ — определяемое по ним и $\alpha_{r+2\varepsilon}$ число в соответствии с формулой (2.10). Отметим, что в силу условия 2 теоремы $\delta_r \ge \delta_{r+\varepsilon} > 0$.

Приведем еще одно неравенство, используемое ниже. Пусть, как и ранее, $\left\{u(t^*),\, z_0\right\}$, $\left\{u(t^*), y_0\right\} \in \Omega(W^{t_0})$, $t_0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le t^* < t^* + \delta_{r+\varepsilon}$, причем выходы, соответствующие входу (2.11), удовлетворяют оценке (2.12) ($\varepsilon > 0$ — заданное число). Тогда, как следует из неравенства (2.15) и условия 2 теоремы, при $t \in \left[t^*, t^* + \delta_{r+\varepsilon}\right]$ имеет место неравенство

$$|x(\tau_1, z_0, t) - x(\tau_2, y_0, t)| \le$$

$$\le |x(\tau_1, z_0, t) - x(\tau_2, z_0, t)| + |x(\tau_2, z_0, t) - x(\tau_2, y_0, t)| \le$$

$$\le \lambda_u |\tau_1 - \tau_2|^{\mu}\left(t - t^*\right) + \left[1 + c\left(t - t^*\right)\right]|z_0 - y_0|, \tag{2.27}$$

где c, λ_u определены формулой (2.26).

Перейдем теперь ко второму этапу доказательства теоремы. Пусть имеются два различных разбиения отрезка $[t_0, T]$:

$$S_1\colon\ t_0 \le \tau_0^{(1)} < \tau_1^{(1)} < \ldots < \tau_k^{(1)} < \ldots < \tau_{m_1}^{(1)} = T,$$

$$S_2\colon\ t_0 \le \tau_0^{(2)} < \tau_1^{(2)} < \ldots < \tau_i^{(2)} < \ldots < \tau_{m_2}^{(2)} = T$$

с мелкостью разбиений $\delta(S_1)$, $\delta(S_2)$ соответственно. Обозначим через S смешанное разбиение отрезка $[t_0, T]$, в котором участвуют точки деления обоих разбиений S_1, S_2. Пусть задан вход $u(t) \in H_l^1[t_0, T]$, удовлетворяющий условию (2.11). Обозначим через $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $\bar{x}(t)$ выходы, соответствующие этому входу, начальному состоянию $\left\{u(t_0), x_0\right\} \in \Omega(W^{t_0})$ и разбиениям соответственно S_1, S_2 по правилу (2.1). Введем обозначение $\delta_0 = \max\left\{\delta(S_1),\, \delta(S_2)\right\}$.

Тогда мелкость смешанного разбиения $\bar{\delta} = \bar{\delta}(S) \le \delta_0$. Зафиксируем некоторое $b_1 \in (t_0, T)$ и определим по нему и $\varepsilon > 0$, $l + \varepsilon$, $r + \varepsilon$ число $\delta_{r+\varepsilon}$ согласно (2.10) из условия 2 теоремы. Пусть

$$\delta_0 \le \min\left\{\delta_{r+\varepsilon}, \varepsilon_0\right\}. \tag{2.28}$$

Оценим разность $|x_1(t) - \bar{x}(t)|$ на отрезке $\left[t_0, b_1 + \delta_{r+\varepsilon}\right]$. Для этого приведем формулу, соответствующую смешанному разбиению S: $t_0 = \tau_0^{(1)} < \tau_1^{(1)} < \ldots$ $\ldots < \tau_{k_1}^{(1)} < \tau_1^{(2)} < \tau_2^{(2)} < \ldots < \tau_{i_1}^{(2)} < \tau_{k_1+1}^{(1)} < \tau_{k_1+2}^{(1)} < \ldots < \tau_{k_1+s}^{(1)} < \tau_{k_1+s+1}^{(1)} < \ldots$ $\ldots < \tau_{k_2}^{(1)} < \tau_{i_1+1}^{(2)} < \tau_{i_1+2}^{(2)} < \ldots < \tau_{i_2}^{(2)} < \tau_{k_2+1}^{(1)}$:

$$\bar{x}(t) - x_1(t) =$$

$$= \begin{cases} 0, & t_0 = \tau_0^{(1)} \le t \le \tau_1^{(2)}, \\ W^{\tau_1^{(2)}}\left[\tau_1^{(2)}, u\left(\tau_1^{(2)}\right), x_1\left(\tau_1^{(2)}\right)\right]u(t) - W^{\tau_{k_1}^{(1)}}\left[\tau_1^{(2)}, u\left(\tau_1^{(2)}\right), x_1\left(\tau_1^{(2)}\right)\right]u(t), & \\ & \tau_1^{(2)} \le t \le \tau_2^{(2)}, \\ W^{\tau_2^{(2)}}\left[\tau_2^{(2)}, u\left(\tau_2^{(2)}\right), \bar{x}\left(\tau_2^{(2)}\right)\right]u(t) - W^{\tau_{k_1}^{(1)}}\left[\tau_2^{(2)}, u\left(\tau_2^{(2)}\right), x_1\left(\tau_2^{(2)}\right)\right]u(t), & \\ & \tau_2^{(2)} \le t \le \tau_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ W^{\tau_{i_1}^{(2)}}\left[\tau_{i_1}^{(2)}, u\left(\tau_{i_1}^{(2)}\right), \bar{x}\left(\tau_{i_1}^{(2)}\right)\right]u(t) - W^{\tau_{k_1}^{(1)}}\left[\tau_{i_1}^{(2)}, u\left(\tau_{i_1}^{(2)}\right), x_1\left(\tau_{i_1}^{(2)}\right)\right]u(t), & \\ & \tau_{i_1}^{(2)} \le t \le \tau_{k_1+1}^{(1)}, \\ W^{\tau_{k_1+1}^{(1)}}\left[\tau_{k_1+1}^{(1)}, u\left(\tau_{k_1+1}^{(1)}\right), \bar{x}\left(\tau_{k_1+1}^{(1)}\right)\right]u(t) - W^{\tau_{k_1+1}^{(1)}}\left[\tau_{k_1+1}^{(1)}, u\left(\tau_{k_1+1}^{(1)}\right), x_1\left(\tau_{k_1+1}^{(1)}\right)\right]u(t), & \\ & \tau_{k_1+1}^{(1)} \le t \le \tau_{k_1+2}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ W^{\tau_{k_1+s}^{(1)}}\left[\tau_{k_1+s}^{(1)}, u\left(\tau_{k_1+s}^{(1)}\right), \bar{x}\left(\tau_{k_1+s}^{(1)}\right)\right]u(t) - W^{\tau_{k_1+s}^{(1)}}\left[\tau_{k_1+s}^{(1)}, u\left(\tau_{k_1+s}^{(1)}\right), x_1\left(\tau_{k_1+s}^{(1)}\right)\right]u(t), & \\ & \tau_{k_1+s}^{(1)} \le t \le \tau_{k_1+s+1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ W^{\tau_{k_2}^{(1)}}\left[\tau_{k_2}^{(1)}, u\left(\tau_{k_2}^{(1)}\right), \bar{x}\left(\tau_{k_2}^{(1)}\right)\right]u(t) - W^{\tau_{k_2}^{(1)}}\left[\tau_{k_2}^{(1)}, u\left(\tau_{k_2}^{(1)}\right), x_1\left(\tau_{k_2}^{(1)}\right)\right]u(t), & \\ & \tau_{k_2}^{(1)} \le t \le \tau_{i_1+1}^{(2)}, \\ W^{\tau_{i_1+1}^{(2)}}\left[\tau_{i_1+1}^{(2)}, u\left(\tau_{i_1+1}^{(2)}\right), \bar{x}\left(\tau_{i_1+1}^{(2)}\right)\right]u(t) - W^{\tau_{k_2}^{(1)}}\left[\tau_{i_1+1}^{(2)}, u\left(\tau_{i_1+1}^{(2)}\right), x_1\left(\tau_{i_1+1}^{(2)}\right)\right]u(t), & \\ & \tau_{i_1+1}^{(2)} \le t \le \tau_{i_1+2}^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases} \tag{2.29}$$

Теперь, использовав (2.29), оценим $|\bar{x}(t) - x_1(t)|$. Отметим, что в силу условий (2.7), (2.28) и леммы 2.5 можно считать, что при всех трех разбиениях S_1, S_2 и S соответствующие им выходы удовлетворяют условиям $|x_i(t)| \le r$, $i = 1, 2$; $|\bar{x}(t)| \le r$, $t \in [t_0, T]$. Поэтому для оценок можно применять неравенства (2.15), (2.26) и (2.27). При $t \in \left[t_0, \tau_1^{(2)}\right]$ имеем

$$|\bar{x}(t) - x_1(t)| = 0, \tag{2.30}$$

при $t \in \left[\tau_1^{(2)}, \tau_2^{(2)}\right]$ —

$$|\bar{x}(t) - x_1(t)| \le \lambda_u \left|\tau_1^{(2)}, \tau_{k_1}^{(1)}\right|^{\mu} \left|t - \tau_1^{(2)}\right| \le \lambda_u \left|\tau_1^{(2)}, \tau_0^{(2)}\right|^{\mu} \left|t - \tau_1^{(2)}\right|. \tag{2.31}$$

Из (2.29), (2.31) в силу леммы 2.3 следует, что при $t \in \left[\tau_2^{(2)}, \tau_3^{(2)}\right]$

$$\begin{aligned}
|\bar{x}(t) - x_1(t)| &= \left| W^{\tau_2^{(2)}}\left[\tau_2^{(2)}, u\left(\tau_2^{(2)}\right), \bar{x}\left(\tau_2^{(2)}\right)\right]u(t) - W^{\tau_{k_1}^{(1)}}\left[\tau_2^{(2)}, u\left(\tau_2^{(2)}\right), x_1\left(\tau_2^{(2)}\right)\right]u(t) \right| \le \\
&\le \left[1 + c\left(t - \tau_2^{(2)}\right)\right]\left|\bar{x}\left(\tau_2^{(2)}\right) - x_1\left(\tau_2^{(2)}\right)\right| + \lambda_u \left|\tau_2^{(2)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right|^{\mu}\left|t - \tau_2^{(2)}\right| \le \\
&\le \left[1 + c\left(\tau_3^{(2)} - \tau_2^{(2)}\right)\right]\lambda_u \left|\tau_1^{(2)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right|^{\mu}\left|\tau_2^{(2)} - \tau_1^{(2)}\right| + \\
&+ \lambda_u \left|\tau_2^{(2)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right|^{\mu}\left|\tau_3^{(2)} - \tau_2^{(2)}\right| \le \\
&\le \lambda_u \left|\tau_2^{(2)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right|^{\mu}\left\{\left(\tau_3^{(2)} - \tau_2^{(2)}\right) + \left[1 + c\left(\tau_3^{(2)} - \tau_2^{(2)}\right)\right]\left(\tau_2^{(2)} - \tau_1^{(2)}\right)\right\} \le \\
&\le \lambda_u \left|\tau_2^{(2)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right|^{\mu}\left|\tau_3^{(2)} - \tau_1^{(2)}\right| \exp\left[c\left(\tau_3^{(2)} - \tau_1^{(2)}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.32}$$

и так далее до промежутка $\tau_{i_1}^{(2)} \le t \le \tau_{k_1+1}^{(1)}$. При $t \in \left[\tau_{i_1}^{(2)}, \tau_{k_1+1}^{(1)}\right]$ по индукции получаем

$$\begin{aligned}
|\bar{x}(t) - x_1(t)| &\le \lambda_u \left|\tau_{i_1}^{(2)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right|^{\mu} \times \\
&\times \left\{\left(\tau_{i_1}^{(2)} - \tau_{i_1-1}^{(2)}\right) + \left[1 + c\left(\tau_{i_1}^{(2)} - \tau_{i_1-1}^{(2)}\right)\right]\left(\tau_{i_1-1}^{(2)} - \tau_{i_1-2}^{(2)}\right) + \ldots\right. \\
&\ldots + \left[1 + c\left(\tau_{i_1}^{(2)} - \tau_{i_1-1}^{(2)}\right)\right]\left[1 + c\left(\tau_{i_1-1}^{(2)} - \tau_{i_1-2}^{(2)}\right)\right]\ldots\left[1 + c\left(\tau_3^{(2)} - \tau_2^{(2)}\right)\right] \times \\
&\times \left.\left(\tau_2^{(2)} - \tau_1^{(2)}\right)\right\}\left[1 + c\left(\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{i_1}^{(2)}\right)\right] + \lambda_u \left|\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{i_1}^{(2)}\right|^{\mu}\left(t - \tau_{i_1}^{(2)}\right) \le \\
&\le \lambda_u \left|\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right|^{\mu}\left\{\left(\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{i_1}^{(2)}\right) + \right. \\
&+ \left[1 + c\left(\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{i_1}^{(2)}\right)\right]\left(\tau_{i_1}^{(2)} - \tau_{i_1-1}^{(2)}\right) + \\
&+ \left[1 + c\left(\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{i_1}^{(2)}\right)\right]\left[1 + c\left(\tau_{i_1}^{(2)} - \tau_{i_1-1}^{(2)}\right)\right]\left(\tau_{i_1-1}^{(2)} - \tau_{i_1-2}^{(2)}\right) + \ldots \\
&\ldots + \left.\left[1 + c\left(\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{i_1}^{(2)}\right)\right]\left[1 + c\left(\tau_{i_1}^{(2)} - \tau_{i_1-1}^{(2)}\right)\right]\ldots\left[1 + c\left(\tau_3^{(2)} - \tau_2^{(2)}\right)\right]\left(\tau_2^{(2)} - \tau_1^{(2)}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Оценивая правую часть этого неравенства согласно лемме 2.3 при $d = \tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{k_1}^{(1)} \ge \tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_1^{(2)}$ и используя также оценки (2.30) – (2.32), при $t \in \left[\tau_{k_1}^{(1)}, \tau_{k_1+1}^{(1)}\right]$ получаем неравенство

$$|\bar{x}(t) - x_1(t)| \le \lambda_u \left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)^{1+\mu} \exp\left[c\left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)\right] \le$$

$$\le \lambda_u \bar{\delta}^{\mu}\left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right) \exp[c(T - t_0)]. \tag{2.33}$$

Рассмотрим следующий временной интервал $\tau^{(1)}_{k_1+1} \le t \le \tau^{(2)}_{i_1+1}$. Как следует из (2.27), (2.29) и (2.33), имеют место неравенства:

при $\tau^{(1)}_{k_1+1} \le t \le \tau^{(1)}_{k_1+2}$

$$|\bar{x}(t) - x_1(t)| \le \left[1 + c\left(t - \tau^{(1)}_{k_1+1}\right)\right] \lambda_u \left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)^{1+\mu} \exp\left[c\left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)\right], \tag{2.34}$$

при $\tau^{(1)}_{k_1+2} \le t \le \tau^{(1)}_{k_1+3}$

$$|\bar{x}(t) - x_1(t)| \le \left[1 + c\left(t - \tau^{(1)}_{k_1+2}\right)\right]\left[1 + c\left(\tau^{(1)}_{k_1+2} - \tau^{(1)}_{k_1+1}\right)\right] \times$$

$$\times \lambda_u \left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)^{1+\mu} \exp\left[c\left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)\right] \tag{2.35}$$

и т. д. Наконец, при $\tau^{(1)}_{k_2} \le t \le \tau^{(2)}_{i_1+1}$ имеем

$$|\bar{x}(t) - x_1(t)| \le \left[1 + c\left(t - \tau^{(1)}_{k_2}\right)\right]\left[1 + c\left(\tau^{(1)}_{k_2} - \tau^{(1)}_{k_2-1}\right)\right] \ldots$$

$$\ldots \left[1 + c\left(\tau^{(1)}_{k_1+3} - \tau^{(1)}_{k_1+2}\right)\right]\left[1 + c\left(\tau^{(1)}_{k_1+2} - \tau^{(1)}_{k_1+1}\right)\right] \times$$

$$\times \lambda_u \left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)^{1+\mu} \exp\left[c\left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)\right]. \tag{2.36}$$

Из леммы 2.2 и неравенств (2.34) – (2.36) следует, что имеет место оценка:

при $\tau^{(1)}_{k_1+1} \le t \le \tau^{(2)}_{i_1+1}$

$$|\bar{x}(t) - x_1(t)| \le \lambda_u \left|\tau^{(2)}_{i_1+1} - \tau^{(1)}_{k_2}\right|^{\mu}\left(t - \tau^{(2)}_{i_1+1}\right) +$$

$$+ \lambda_u \left[1 + c\left(t - \tau^{(2)}_{i_1+1}\right)\right]\left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)^{1+\mu} \exp\left[c\left(\tau^{(2)}_{i_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)\right], \tag{2.37}$$

при $\tau^{(2)}_{i_1+2} \le t \le \tau^{(2)}_{i_1+3}$

$$|\bar{x}(t) - x_1(t)| =$$

$$= \left| W^{\tau^{(1)}_{k_2}}\left(\tau^{(2)}_{i_1+2}, u\left(\tau^{(2)}_{i_1+2}\right), x_1\left(\tau^{(2)}_{i_1+2}\right)\right)u(t) - W^{\tau^{(2)}_{i_1+2}}\left(\tau^{(2)}_{i_1+2}, u\left(\tau^{(2)}_{i_1+2}\right), \bar{x}\left(\tau^{(2)}_{i_1+2}\right)\right)u(t) \right| \le$$

$$\le \lambda_u \left\{ \left|\tau^{(2)}_{i_1+2} - \tau^{(1)}_{k_2}\right|^{\mu}\left(t - \tau^{(2)}_{i_1+2}\right) + \left[1 + c\left(t - \tau^{(2)}_{i_1+2}\right)\right]\left(\tau^{(2)}_{i_1+1} - \tau^{(1)}_{k_2}\right)^{\mu}\left(\tau^{(2)}_{i_1+2} - \tau^{(2)}_{i_1+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[1 + c\left(t - \tau^{(2)}_{i_1+2}\right)\right]\left[1 + c\left(\tau^{(2)}_{i_1+2} - \tau^{(2)}_{i_1+1}\right)\right]\left(\tau^{(1)}_{k_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)^{1+\mu} \exp\left[c\left(\tau^{(2)}_{i_1+1} - \tau^{(1)}_{k_1}\right)\right]\right\} \tag{2.38}$$

и т. д. Применяя леммы 2.2 и 2.3, при $\tau^{(1)}_{i_2} \le t \le \tau^{(1)}_{k_2+1}$ получаем оценку

$$|\bar{x}(t) - x_1(t)| =$$

$$= \left| W^{\tau_{k_2}^{(1)}}\left[\tau_{i_2}^{(2)}, u\left(\tau_{i_2}^{(2)}\right), x_1\left(\tau_{i_2}^{(2)}\right)\right]u(t) - W^{\tau_{i_2}^{(2)}}\left[\tau_{i_2}^{(2)}, u\left(\tau_{i_2}^{(2)}\right), \bar{x}\left(\tau_{i_2}^{(2)}\right)\right]u(t) \right| \le$$

$$\le \lambda_u \left\{ \left(\tau_{i_2}^{(2)} - \tau_{k_2}^{(1)}\right)^{\mu} \left(t - \tau_{i_2}^{(2)}\right) + \right.$$

$$+ \left[1 + c\left(t - \tau_{i_2}^{(2)}\right)\right]\left(\tau_{i_2-1}^{(2)} - \tau_{k_2}^{(1)}\right)^{\mu}\left(\tau_{i_2}^{(2)} - \tau_{i_2-1}^{(2)}\right) + \left[1 + c\left(t - \tau_{i_2}^{(2)}\right)\right] \times$$

$$\times \left[1 + c\left(\tau_{i_2}^{(2)} - \tau_{i_2-1}^{(2)}\right)\right]\left(\tau_{i_2-2}^{(2)} - \tau_{k_2}^{(1)}\right)^{\mu}\left(\tau_{i_2-1}^{(2)} - \tau_{i_2-2}^{(2)}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left[1 + c\left(t - \tau_{i_2}^{(2)}\right)\right]\left[1 + c\left(\tau_{i_2}^{(2)} - \tau_{i_2-1}^{(2)}\right)\right] \ldots \left[1 + c\left(\tau_{i_1+3}^{(2)} - \tau_{i_1+2}^{(2)}\right)\right] \times$$

$$\left. \times \left(\tau_{i_1+1}^{(2)} - \tau_{k_2}^{(1)}\right)^{\mu}\left(\tau_{i_1+2}^{(2)} - \tau_{i_1+1}^{(2)}\right)\right\} + \lambda_u\left[1 + c\left(t - \tau_2^{(2)}\right)\right]\left[1 + c\left(\tau_{i_2}^{(2)} - \tau_{i_2-1}^{(2)}\right)\right] \ldots$$

$$\ldots \left[1 + c\left(\tau_{i_1+2}^{(2)} - \tau_{i_1+1}^{(2)}\right)\right]\left(\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right)^{1+\mu} \exp\left[c\left(\tau_{i_1+1}^{(2)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right)\right] \le$$

$$\le \lambda_u\left(\tau_{k_2+1}^{(1)} - \tau_{k_2}^{(1)}\right)^{\mu}\left(t - \tau_{i_1+1}^{(2)}\right)\exp\left[c\left(t - \tau_{i_1+1}^{(2)}\right)\right] +$$

$$+ \lambda_u\left(\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right)^{1+\mu} \exp\left[c\left(t - \tau_{k_1}^{(1)}\right)\right] \le$$

$$\le \lambda_u \bar{\delta}^{\mu}\left[\left(\tau_{k_2+1}^{(1)} - \tau_{k_2}^{(1)}\right) + \left(\tau_{k_1+1}^{(1)} - \tau_{k_1}^{(1)}\right)\right] \le \lambda_u \bar{\delta}^{\mu}(T - t_0)\exp[c(T - t_0)]. \quad (2.39)$$

Из леммы 2.3 и неравенств (2.37) – (2.39) следует, что оценка (2.39) имеет место при любом $t \in \left[\tau_{k_2}^{(1)}, \tau_{k_2+1}^{(1)}\right]$. Поскольку интервалы видов $\left[\tau_{k_1}^{(1)}, \tau_{k_1+1}^{(1)}\right]$, $\left[\tau_{k_1+1}^{(1)}, \tau_{i_1+1}^{(2)}\right]$ и $\left[\tau_{k_2}^{(1)}, \tau_{k_2+1}^{(1)}\right]$ чередуются, то $|\bar{x}(t) - x_1(t)| \le \lambda_u \bar{\delta}^{\mu}(T - t_0) \times \exp[c(T - t_0)]$ при любом $t \in \left[t_0, b_1 + \delta_{r+\varepsilon}\right]$.

Очевидно, что на том же промежутке имеет место такая же оценка для $\left|\bar{x}(t) - x_2(t)\right|$. Отсюда следует, что при $t_0 \le t \le b_1 + \delta_{r+\varepsilon} \le T$ имеет место неравенство

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le |x_1(t) - \bar{x}(t)| + |\bar{x}(t) - x_2(t)| \le 2\lambda_u \bar{\delta}^{\mu}(T - t_0)\exp[c(T - t_0)]. \quad (2.40)$$

В силу полноты пространства непрерывных функций $C\left[t_0, b_1 + \delta_{r+\varepsilon}\right]$ из (2.40) следует, что если мелкость $\delta(S)$ произвольного разбиения S отрезка $[t_0, T]$ стремится к нулю, то выход $x_s(t)$, соответствующий входу $u(t) \in H_l^1[t_0, T]$, удовлетворяющему условию (2.11) и данному разбиению S, построенный согласно формулам (2.1), равномерно стремится на отрезке $\left[t_0, b_1 + \delta_{r+\varepsilon}\right]$ к некоторой непрерывной функции $y_1(t)$. Если $b_1 + \delta_{r+\varepsilon} = T$, то это доказывает теорему; построенная функция $y_1(t)$ служит выходом переменного гистерона $\overline{W}$ и „схема m" реализуется.

Предположим, что $b_1 + \delta_{r+\varepsilon} < T$. Тогда введем обозначения для $b_1^{(1)} = b_1 + \delta_{r+\varepsilon}$ и $\delta_{r+\varepsilon}^{(1)} > 0$, числа, построенного согласно формуле (2.10) по $b_1^{(1)}$,

$\alpha_{r+2\varepsilon} > 0$ и $l + 2\varepsilon > 0$. Повторяя приведенную выше процедуру и сравнивая $\delta^{(1)}_{r+\varepsilon}$ с $\delta_{r+\varepsilon}$, приходим к выводу, аналогичному приведенному выше: выход $x_s(t)$ при $\delta(s) \to 0$ на отрезке $\left[t_0, b_1^{(1)} + \delta^{(1)}_{r+\varepsilon}\right]$ равномерно стремится к непрерывной функции $y_2(t)$. На $\left[t_0, b_1^{(1)}\right]$ функции $y_2(t)$ и $y_1(t)$ совпадают. При $b_1^{(2)} = b_1^{(1)} + \delta^{(1)}_{r+\varepsilon} = T$ процедура закончена. Если же $b_1^{(2)} < T$, то ее можно продолжить далее. Поскольку $\alpha_{r+2\varepsilon}(l + 2\varepsilon)^{-1} > 0$ не зависит от выбора точки $b_1 \in (t_0, T)$, процедура закончится через конечное число p шагов, где p равно либо $n = E\left[(T - b_1)(l + 2\varepsilon)\alpha^{-1}_{r+2\varepsilon}\right]$ — целой части дроби, либо $n + 1$.

Построенная на k-м шаге непрерывная функция $y_k(t)$ служит продолжением построенной на предыдущем шаге функции $y_{k-1}(t)$. Построенная на p-м шаге функция $y_p(t)$ является выходом переменного гистерона, соответствующим заданному входу $u(t) \in H_l^1[t_0, T]$. Итак, „схема m" реализуется.

Теорема доказана.

***Пример* 2.1.** Рассмотрим семейство гистеронов W^τ, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1. При каждом фиксированном $\tau \in [t_0, T], \tau_0 > 0$, гистерон W^τ представляет собой систему, аналогичную обобщенному люфту [1, с. 13] на плоскости $\Pi = \{u, z\}$ с определяющими кривыми: $\Phi_e = \{(u, z);\ z = u + H, H > 0\}$, $\Phi_r = \left\{(u, z);\ z = u - d_0,\ 0 < d_0 < \dfrac{1}{4T}\right\}$;

$$\Pi(u, M) = \begin{cases} z_0 & \text{при} \quad z_0 - H \le u \le z_0, \\ (u - u_0)^2\tau + z_0 & \text{при} \quad z_0 \le u \le u_\tau^* = z_0 + \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4\tau d_0}}{2\tau}, \end{cases}$$

где $M = \{u_0, z_0\} \in \Omega(W^\tau)$ при $u_0 = z_0$, u_τ^* — абсцисса первой точки пересечения параболы $z = (u - z_0)^2\tau + z_0$ с прямой $z = u - d_0$. Как следует из [1, с. 27],

$$T(u, M) = \begin{cases} u + H & \text{при} \quad u \le z_0 - H, \\ \Pi(u, M) & \text{при} \quad z_0 - H \le u \le u_\tau^*, \\ u - d_0 & \text{при} \quad u_\tau^* \le u. \end{cases}$$

Поэтому при любых τ_1, $\tau_2 \in [\tau_0, T)$, $M \in \Omega(W^\tau)$

$$\left| T^{\tau_1}(u_0 + h, M) - T^{\tau_2}(u_0 + h, M) \right| =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad u_0 + h \le z_0, \\ h^2|\tau_1 - \tau_2| & \text{при} \quad z_0 \le u_0 + h \le \min\left\{u^*_{\tau_1}, u^*_{\tau_2}\right\}, \\ \le h^2|\tau_1 - \tau_2| & \text{при} \quad \min\left\{u^*_{\tau_1}, u^*_{\tau_2}\right\} \le u_0 + h. \end{cases} \tag{2.41}$$

Отсюда следует выполнение для семейства гистеронов W^τ условия (2.7) при $B = 1$, $\mu = 1$. Пусть $\tau \in [\tau_0, T)$, $M = \{u_0, z_0\} \in \Omega(W^\tau)$, $N = \{u_0, y_0\} \in \Omega(W^\tau)$; $u(t)$, $u(t^*) = u_0$, $t^* \in [\tau_0, T)$, — монотонный непрерывный на $[\tau_0, T)$ вход. Тогда в силу (2.41) имеет место неравенство

$$\left| W^\tau(t^*, u_0, z_0)u(t) - W^\tau(t^*, u_0, y_0)u(t) \right| \le |z_0 - y_0|. \tag{2.42}$$

Используя (1.2) и виброкорректность гистеронов W^τ, это неравенство можно перенести на кусочно-монотонные входы, а затем на произвольные непрерывные на $[\tau_0, T)$ входы $u(t)$. Из (2.42) следует, что семейство гистеронов W^τ удовлетворяет условию (2.8). Поэтому по нему можно построить переменный гистерон $\overline{W}$, множество допустимых входов которого содержит класс функций $H^1[\tau_0, T]$. Переменный гистерон $\overline{W}(0, u_0, \omega_0) = \overline{W}$, $u_0 \le \omega_0$, определен для монотонного входа $u(t) \in H^1[0, T]$, $u(0) = u_0$, $u(\tau_0) = \omega_0$, формулой

$$\overline{W}u(t) = \begin{cases} \omega_0, & 0 \le t \le \tau_0, \quad u(\tau_0) = \omega_0, \\ t[u(t) - u(\tau_0)]^2 + \omega_0, & \tau_0 \le t \le T. \end{cases}$$

В следующей лемме формулируются достаточные условия, при которых гистероны из семейства W^τ удовлетворяют условию (2.8).

Лемма 2.6. *Пусть кривые, определяющие гистерон* W, *удовлетворяют общему условию Липшица с одной и той же постоянной. Пусть для любого неотрицательного числа* r *существуют такие постоянные* $0 \le k_r < +\infty$ *и* $0 < \alpha_r < +\infty$, *что*

$$\left| \left[(T(u_0 + h, M) - T(u_0 + h, N)) - (T(u_0, M) - T(u_0, N)) \right] (z_0 - y_0)^{-1} h^{-1} \right| \le k_r \tag{2.43}$$

при любом $h\,(0 \le |h| \le \alpha_r)$, *для любых* z_0, y_0 $(z_0 \ne y_0)$, u_0 *таких, что* $|z_0| \le r$, $|y_0| \le r$, $|u_0| \le r$, $M = \{u_0, z_0\} \in \Omega(W)$, $N = \{u_0, y_0\} \in \Omega(W)$, *и пусть* $b_1 \in (t_0, T)$. *Тогда для любых выходов* $\varphi(t)$, $\psi(t) \in \Phi_u^{(r)}$ *имеет место неравенство* (2.8) *при условиях* (2.9), (2.10).

Доказательство леммы содержится в [7] (лемма 2.2).

***Замечание* 2.2.** I. Из леммы 2.6 следует, что условие 2 в теореме 2.1 можно заменить следующим:

$2'$) пусть для каждого $t \in [t_0, T]$ система определяющих кривых $T(u, M)$ гистерона W^t удовлетворяет неравенству (2.43).

II. Обозначим $T(u_0 + h, M) = z_h(h, u_0, z_0)$. Пусть функция $z_h(h, u_0, z_0)$ удовлетворяет следующим условиям: если $|u_0| \le r$, $|u| = |u_0 + h| \le r$, $|z_0| \le r$, $r > 0$, $\{u, z_0\} \in \Omega(W)$, то функция $z_h(h, u_0, z_0)$ непрерывна, имеет непрерывную первую частную производную $\partial z_h / \partial z_0$, а смешанная производная $\dfrac{\partial}{\partial h}\left(\dfrac{\partial z_h}{\partial z_0}\right)$ непрерывна везде в $\Omega(W)$, за исключением конечного множества точек $M^{(z_0)}$ на каждом отрезке $L_{z_0} = \left\{(\bar{u}_0 + h, z_0) \in \overline{\Omega}(W);\ 0 \le h \le h_{z_0}\right\}$, причем $\{(\bar{u}_0 + h, z_0\} \in \Omega(W)$, $0 < h < h_{z_0}$; точки $(\bar{u}_0, z_0)$, $(\bar{u}_0 + h_{z_0}, z_0)$, в которых предполагается существование соответственно производных

$$\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial z_h}{\partial z_0}\right)_{h \to +0}, \qquad \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial z_h}{\partial z_0}\right)_{h \to h_{z_0} - 0}, \tag{2.44}$$

принадлежат границе множества $\overline{\Omega}(W)$, и при этом производные $\dfrac{\partial}{\partial h}\left(\dfrac{\partial z_h}{\partial z_0}\right)$ и (2.44) ограничены по модулю постоянной c, $0 \le c < +\infty$, не зависящей от выбора точки $(u_0, z_0) \in \Omega(W)$. Предполагается также, что для любого интервала $F = \left\{(u_0 + h, z_0) \,\overline{\in}\, \Omega(W);\ h_0 < h < \bar{h};\ (u_0 + h_0, z_0),\ (u_0 + \bar{h}, z_0) \in \overline{\Omega}(W)\right\}$ имеет место неравенство

$$\left|\left(\frac{\partial z_h(\bar{h}, u_0, z_0)}{\partial z_0} - \frac{\partial z_h}{\partial z_0}(h_0, u_0, z_0)\right)(\bar{h} - h_0)^{-1}\right| \leq c,$$

где c — константа, определенная выше. Тогда для функций $T(u_0 + h, M) = z_h(h, u_0, z_0)$ имеет место неравенство (2.43).

Утверждение II можно доказать, использовав тот факт, что левая часть в (2.43) равна [8, с. 459 – 461]

$$\left|\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial z_h\left[h_0 + \theta_1 h_{z_0}, u_0, y_0 + \theta_2(z_0 - y_0)\right]}{\partial z_0}\right)\right|, \quad 0 < \theta_1, \ \theta_2 < 1,$$

и свойства области $\Omega(W)$.

***Пример* 2.2.** На основе замечания 2.2 (II) можно построить конкретный пример гистерона W, для которого имеет место условие леммы 2.6, обеспечивающей выполнение неравенства (2.8). Пусть W — гистерезисная система, аналогичная обобщенному люфту [1, с. 13] с определяющими кривыми $\Phi_e = \{(u, z);\ z = \sqrt{3}u + H,\ H > 0\}$, $\Phi_r = \{(u, z)\,;\ z = \sqrt{3}u\}$,

$$\Pi(u, M) =$$

$$= \begin{cases} z_0 & \text{при} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z_0 - \frac{5}{6}H\right) \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z_0 - \frac{H}{6}\right), \\ z_c^{(1)} - \sqrt{r^2 - \left(u - u_c^{(1)}\right)^2} & \text{при} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z_0 - \frac{H}{6}\right) \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left[z_0 + \frac{H\left(1 + \sqrt{3}\right)}{12}\right], \\ z_c^{(2)} + \sqrt{r^2 - \left(u - u_c^{(2)}\right)^2} & \text{при} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\left[z_0 - \frac{H}{12}\left(13 + \sqrt{3}\right)\right] \leq u \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z_0 - \frac{5}{6}H\right), \end{cases}$$

где $r = \frac{H}{6}(2 + \sqrt{3})$, $z_c^{(1)} = z_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}r$, $u_c^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z_0 - \frac{H}{6}\right) - \frac{r}{2}$, $z_c^{(2)} = z_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}r$, $u_c^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z_0 - \frac{5}{6}H\right) + \frac{r}{2}$, $M = (u_0, z_0) \in \Omega(W)$ при $z_0 = \sqrt{3}u_0 + \frac{H}{2}$. Нетрудно проверить, что функции $z_h(h, u_0, z_0) = T(u, M)$ для гистерона W обладают тем свойством, что производные $\frac{\partial z_h}{\partial z_0}$, $\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{\partial z_h}{\partial z_0}\right)$ непрерывны, а потому ограничены на каждом замкнутом ограниченном множестве

$$\{(u, z_0) \in \Omega(W);\ |u| = |u_0 + h| \leq A;\ |z_0| \leq A,\ A > 0\}.$$

Следовательно, гистерон W удовлетворяет условиям замечания 22 (II).

Достаточные условия реализации „схемы m”, содержащиеся в теореме 2.1 и лемме 2.6, не были приведены в таком виде ни в одной из предыдущих работ автора, посвященных этой теме [9 – 11].

***Замечание* 2.3.** Переменный гистерон $\overline{W}$, определенный в п. 2.1, обладает рядом свойств, присущих статическому гистерону:

1) если при начальном состоянии $(u_0, x_0) \in \Omega(W^{t_0})$ допустимый вход $u(t)$ постоянен, $u(t) \equiv u_0$, $t_0 \leq t \leq T$, то $\overline{W}[t_0, u(t_0), x_0]u(t) \equiv x_0$, $t_0 \leq t \leq T$;

2) для гистерона $\overline{W}$ справедливо полугрупповое тождество (см. соответственно (1.2));

3) пусть все определяющие кривые всех гистеронов W^t, $t_0 \leq t \leq T$, удовлетворяют условию Липшица с одной и той же постоянной m и „схема m” реализуется для некоторого входа $u(t) \in H_l^1[t_0, T]$ и начального состояния $\{u(t_0), x_0\} \in W^{t_0}$; тогда соответствующий выход $y(t)$ переменного гистерона $\overline{W}$ принадлежит классу $H^1[t_0, T]$ с постоянной Липшица ml;

4) если все функции, графики которых участвуют в определении гистеронов, входящих в семейство W^t, $t_0 \le t \le T$, удовлетворяют общему условию Липшица, то гистерон $\overline{W}$ удовлетворяет условию Липшица вида

$$\left| \overline{W}[t_0, u(t_0), x_0]u(t) - \overline{W}[t_0, v(t_0), z_0]v(t) \right| \le$$

$$\le \lambda \max\left\{ |x_0 - z_0|, \max_{t_0 \le s \le t} |u(s) - v(s)| \right\},$$

где λ — некоторая постоянная, $u(t)$ и $v(t)$ — произвольные непрерывные входы, допустимые соответственно при начальных состояниях $\{u(t_0), x_0\}$, $\{v(t_0), z_0\} \in \Omega(W^{t_0})$ (см. соответствующее свойство статического гистерона [1, с. 35]).

Эти свойства вытекают из свойств статического гистерона, конструкции переменного гистерона (п. 2.1) и леммы 2.4 для доказательства свойства 3.

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб А.* Очерки по математической теории систем. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
3. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Виброустойчивость решений дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1970. – **195**, № 3. – С.544 – 547.
4. *Красносельский М. А., Черноруцкий В. В.* Об одном классе гистерезисных нелинейностей // Там же. – 1989. – **305**, № 5. – С. 1065 – 1069.
5. *Chernorutskii V. V., Krasnosel'skii M. A.* Histeresis systems with variable characteristics // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. – 1992. – **18**, № 6. – P. 543 – 557.
6. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 511 с.
7. *Борздыко В. И.* Дифференциальные уравнения со сложными нелинейностями: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Душанбе, 2000.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т. – М.: 1960. – Т. 1.
9. *Борздыко В. И.* Переменный гистерон // Докл. РАН. – 1992. – **324**, № 2. – С. 269 – 272.
10. *Борздыко В. И.* Нелинейные нестационарные системы с гистерезисом // Автоматика и телемеханика. – 1994. – № 5. – С. 20 – 26.
11. *Борздыко В. И.* Переменный гистерон // Моделирование и исследование физических процессов: Тез. докл. науч. шк.-сем., (Киев, 28 – 30 мая 1991 г.). – С. 9.

Получено 09.07.07