УДК 517.925

В. М. Евтухов, М. А. Белозерова (Одес. нац. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Встановлено асимптотичні зображення для розв'язків одного класу нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку.

Встановлено асимптотичні зображення для розв'язків одного класу нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь другого порядку.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1.1}$$

в котором $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p\colon [a, \omega[\,\to\,]0, +\infty[$, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, — непрерывная функция, $\varphi_i\colon \Delta_{Y_i} \to \,]0, +\infty[$, $i = 0, 1$, — строго монотонные, дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \qquad \limsup_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \left|\frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)}\right| < +\infty, \quad i = 0, 1, \tag{1.2}$$

где

$$Y_i = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \qquad \Delta_{Y_i} \text{ — некоторая односторонняя окрестность } Y_i, \tag{1.3}$$

$$\sigma_i \in \mathbb{R}, \quad \text{причем} \quad \sigma_0 + \sigma_1 \ne 1.$$

В силу первого из условий (1.2) каждая из функций φ_i, $i \in \{0, 1\}$, имеет вид $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_i}\theta_i(z)$, где $\theta_i\colon \Delta_{Y_i} \to \,]0, +\infty[$ такова, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_i\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{z\theta_i'(z)}{\theta_i(z)} = 0. \tag{1.4}$$

Следовательно, для любого решения y уравнения (1.1), определенного на некотором промежутке $[t_0, \omega[\,\subset [a, \omega[$ и удовлетворяющего условиям

$$y^{(i)}\colon [t_0, \omega[\,\to \Delta_{Y_i}, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \quad i = 0, 1, \tag{1.5}$$

имеют место представления $\varphi_i\big(y^{(i)}(t)\big) = \big|y^{(i)}(t)\big|^{\sigma_i + o(1)}$, $i = 0, 1$, при $t \uparrow \omega$. Значит, простейшим частным случаем (1.1) является обобщенное уравнение Эмдена – Фаулера

$$y'' = \alpha_0 p(t)|y|^{\sigma_0}|y'|^{\sigma_1},$$

возникающее во многих областях естествознания. Основные результаты об асимптотическом поведении решений этого уравнения при $\sigma_0 > 0$ и $\sigma_1 = 0$

приведены в монографии [1] (см. также [2]). В случае произвольных σ_0 и σ_1, удовлетворяющих неравенству $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$, асимптотика его решений исследована в [3 – 10], а при $\sigma_0 + \sigma_1 = 1$ — в [11].

При $\varphi_1(y') \equiv 1$, т. е. для уравнения

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y),$$

вопросы асимптотического поведения решений со свойствами (1.5) изучались в [12 – 18].

Целью настоящей работы является распространение на общий случай уравнения (1.1) некоторых из полученных в указанных работах результатов.

Решение y уравнения (1.1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\, \subset [a, \omega[$, будем называть $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением, если для него наряду с (1.5) выполняется

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\left(y'(t)\right)^2}{y''(t)\, y(t)} = \lambda_0. \tag{1.6}$$

В силу вида уравнения (1.1) каждое его $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение является строго монотонным вместе со своей первой производной. Однако в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением лишь монотонно возрастающих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, поскольку вопрос об асимптотике монотонно убывающих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений может быть сведен к вопросу об асимптотике при $t \uparrow \omega$ монотонно возрастающих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений с помощью замены y на $-y$, что приводит к смене в уравнении (1.1) знака α_0 на противоположный.

При исследовании монотонно возрастающих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений обозначения из (1.3) можно конкретизировать следующим образом:

$$Y_i = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty, \end{cases} \qquad \Delta_{Y_i} = \begin{cases} \left[y_i^0, +\infty\right[, & \text{если } Y_i = +\infty, \\ \left[-y_0^0, 0\right[, & \text{если } i = 0,\ Y_0 = 0, \quad y_i^0 > 0. \\ \left]0, y_1^0\right], & \text{если } i = 1,\ Y_0 = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

Далее, замечаем, что согласно (1.1) знак второй производной любого $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решения совпадает со знаком α_0. Поэтому при $\alpha_0 = 1$ уравнение (1.1) не имеет монотонно возрастающих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, а при $\alpha_0 = -1$ — монотонно возрастающих $P_\omega(Y_0, +\infty, \lambda_0)$-решений. Таким образом, при изучении монотонно возрастающих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (1.1) необходимо считать, что

$$Y_1 = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha_0 = 1, \\ 0, & \text{если } \alpha_0 = -1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Теперь введем вспомогательные обозначения, положив

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \qquad I_1(t) = \int_{A_\omega^1}^{t} \frac{p(\tau)\pi_\omega(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right)}{|\pi_\omega(\tau)|^{\sigma_1}}\, d\tau,$$

$$A_\omega^1 = \begin{cases} a, & \text{если } \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(\tau)|^{1-\sigma_1} p(\tau)\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int\limits_a^\omega p(\tau)|\pi_\omega(\tau)|^{1-\sigma_1}\theta_1\left(|\pi_\omega(\tau)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)d\tau < +\infty, \end{cases}$$

$$I_0(t) = \int\limits_{A_\omega^0}^t p(\tau)\varphi_0(\pi_\omega(\tau))d\tau, \qquad A_\omega^0 = \begin{cases} a, & \text{если } \int\limits_a^\omega p(\tau)\varphi_0(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int\limits_a^\omega p(\tau)\varphi_0(\tau)d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Будем также говорить, что функция $\varphi_i(z)$, где $i \in \{0,1\}$, удовлетворяет условию S_i, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $L\colon\ \Delta_{Y_i} \to$ $\to\ ]0;+\infty[$ такой, что

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0, \tag{1.9}$$

имеет место соотношение

$$\theta_i(zL(z)) = \theta_i(z)(1+o(1)) \quad \text{при } z \to Y_i, \quad z\in\Delta_{Y_i}. \tag{1.10}$$

Условию S_i заведомо удовлетворяют функции $\varphi_i(z)$, для которых $\theta_i(z)$ имеют конечный предел при $z \to Y_i$, а также функции вида $|z|^{\sigma_i}|\ln|z||^{\mu_i}$, $|z|^{\sigma_i}|\ln|\ln|z|||^{\mu_i}$ и др.

Для монотонно возрастающих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть выполняется условие* (1.8) *и функция* $\varphi_1(z)$ *удовлетворяет условию* S_1. *Тогда для существования возрастающих* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-*решений,* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, *уравнения* (1.1) *необходимо, а если*

$$\lambda_0 \neq \sigma_1 - 1, \quad \textit{либо} \quad \lambda_0 = \sigma_1 - 1 \quad \textit{и} \quad \lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1) > 0, \tag{1.11}$$

то и достаточно выполнение условий

$$Y_0 = \begin{cases} +\infty, & \textit{если } \alpha_0\lambda_0 > 0, \\ 0, & \textit{если } \alpha_0\lambda_0 < 0, \end{cases}$$
$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)}{I_1(t)} = \frac{\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1)}{1-\lambda_0}, \quad \frac{\alpha_0\pi_\omega(t)}{\lambda_0-1} > 0 \quad \textit{при} \quad t\in[a,\omega[^1. \tag{1.12}$$

Более того, для каждого такого решения при $t\uparrow\omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$\frac{|y(t)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y(t)}{\varphi_0(y(t))} \sim \alpha_0\left|\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right|^{\sigma_1}(1-\lambda_0)(\sigma_0+\sigma_1-1)I_1(t),$$
$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}. \tag{1.13}$$

[1] При $\omega = +\infty$ считаем $a > 0$.

Теорема 1.2. *Пусть выполняется условие* (1.8). *Тогда для существования возрастающих* $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решений уравнения* (1.1) *необходимо выполнение условия*

$$Y_0 = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \omega = +\infty, \\ \\ 0, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases} \tag{1.14}$$

Если же функция $\varphi_0(z)$ *удовлетворяет условию* S_0, *то в совокупности с* (1.14) *условия*

$$\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I_0'(t)}{I_0(t)} = 0 \tag{1.15}$$

являются необходимыми и достаточными для существования $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решений уравнения* (1.1). *Более того, для каждого такого решения при* $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$\frac{\left(y'(t)\right)^{1-\sigma_0}}{\varphi_1\left(y'(t)\right)} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+o(1)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)]. \tag{1.16}$$

В силу не совсем четкого задания нелинейности уравнения (1.1) установленные результаты дают асимптотику при $t \uparrow \omega$ его возрастающих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений в неявном виде. Однако, как показано в следующих теоремах, при некоторых дополнительных ограничениях могут быть выписаны явные асимптотические формулы при $t \uparrow \omega$ для рассматриваемых решений и их первых производных.

Теорема 1.3. *Пусть выполняется условие* (1.8) *и при каждом значении* $i \in \{0, 1\}$ *функция* $\varphi_i(z)$ *удовлетворяет условию* S_i. *Тогда для существования возрастающих* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-решений,* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, *уравнения* (1.1) *необходимо, а если выполнено одно из условий* (1.11), *то и достаточно, чтобы выполнялись условия* (1.12), *причем для каждого такого решения при* $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$y(t) = \frac{\alpha_0}{\lambda_0}\left|\frac{|\lambda_0|^{1-\sigma_0}}{|1-\lambda_0|^{\sigma_1-1}}(\sigma_0+\sigma_1-1)I_1(t)\theta_0\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1-\sigma_0}}[1+o(1)],$$

$$y'(t) = \frac{\alpha_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)} \times \tag{1.17}$$

$$\times \left|\frac{|\lambda_0|^{1-\sigma_0}}{|1-\lambda_0|^{\sigma_1-1}}(\sigma_0+\sigma_1-1)I_1(t)\theta_0\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_1-\sigma_0}}[1+o(1)].$$

Теорема 1.4. *Пусть выполняется условие* (1.18) *и функции* $\varphi_i(z)$, $i = 0, 1$, *удовлетворяют условиям* S_i. *Тогда для каждого возрастающего* $P_\omega(Y_0, Y, \pm\infty)$*-решения уравнения* (1.1) *при* $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$y(t) = \pi_\omega(t)\left|(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)\theta_1\left(|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}[1+o(1)], \tag{1.18}$$

$$y'(t) = \left|(1-\sigma_0-\sigma_1)\,I_0(t)\,\theta_1\left(|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}[1+o(1)].$$

Замечания. **1.1.** В случаях, когда $\lambda_0 = \sigma_1 - 1$ и $(1-\sigma_1)(\sigma_0+\sigma_1-1) > 0$, результат, аналогичный указанному в теореме 1.1, остается в силе при некоторых дополнительных ограничениях.

1.2. Если в условиях теорем 1.1 – 1.4 α_0, Y_0, Y_1 заменить на $-\alpha_0$, $-Y_0$, $-Y_1$ (соответственно), а в асимптотических представлениях заменить на противоположные знаки при y и y', то получим соответствующие результаты для монотонно убывающих $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений.

2. Доказательства основных теорем. ***Доказательство теоремы* 1.1.** *Необходимость.* Пусть выполняется условие (1.8) и $y\colon [t_0,\omega[\, \to \mathbb{R}$ — возрастающее $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решение уравнения (1.1), для которого $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Тогда из (1.1) в силу (1.6) имеем

$$\frac{\left(y'(t)\right)^2}{y(t)} = \lambda_0\alpha_0 p(t)\varphi_0(y(t))\left|y'(t)\right|^{\sigma_1}\theta_1\left(y'(t)\right)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.1}$$

Кроме того, из (1.6) следует, что

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \tag{2.2}$$

т. е. имеет место второе из представлений (1.13). Принимая во внимание соотношения (2.1) и (2.2), а также учитывая, что функции $y'(t)$, $p(t)$, $\varphi_0(y(t))$, $\theta_1\left(y'(t)\right)$ принимают положительные значения в некоторой левой окрестности ω, получаем первое и третье из условий (1.12). В силу (2.2) из (1.6) также следует, что

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Значит, имеет место представление $y'(t) = |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} L\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)$, где L: $\Delta_{Y_0} \to\,]0;+\infty[$ удовлетворяет (1.9). Поскольку функция $\varphi_1(z)$ удовлетворяет условию S_1, это означает, что $\theta_1\left(y'(t)\right) = \left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)(1+o(1))$ при $t\uparrow\omega$. Поэтому согласно (2.2) и (2.1) при $t\uparrow\omega$ получим асимптотическое соотношение

$$\frac{y'(t)|y(t)|^{-\sigma_1}}{\varphi_0(y(t))} = \alpha_0(\lambda_0-1)\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1}\times$$
$$\times\, p(t)\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)\pi_\omega(t)|\pi_\omega(t)|^{-\sigma_1}[1+o(1)]. \tag{2.3}$$

Применяя правило Лопиталя и используя (1.2), (2.3), находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{|y(t)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y(t)}{I_1(t)\varphi_0(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\dfrac{|y(t)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} y(t)}{\varphi_0(y(t))}\right]'}{(I_1(t))'} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\dfrac{y'(t)|y(t)|^{-\sigma_1}}{\varphi_0(y(t))}\left[1-\dfrac{y(t)\varphi_0'(y(t))}{\varphi_0(y(t))}-\sigma_1\right]}{\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)\pi_\omega(t)\,p(t)|\pi_\omega(t)|^{-\sigma_1}} =$$

$$= \alpha_0(\lambda_0-1)\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1}(1-\sigma_0-\sigma_1).$$

Таким образом, имеет место первое из представлений (1.13). Отсюда, учитывая (2.2) и (2.3), получаем второе из условий (1.12).

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (1.8), (1.11), (1.12) и функция $\varphi_1(z)$ удовлетворяет условию S_1. В этом случае $\alpha_0\lambda_0(1-\sigma_0-\sigma_1)\ \pi_\omega(t)I_1(t)>0$ при $t\in\,]a,\omega[$, и поэтому в $I_1(t)$ предел интегрирования A^1_ω определяется следующим образом:

$$A^1_\omega = \begin{cases} a, & \text{если } \alpha_0\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1)<0,\\ \omega, & \text{если } \alpha_0\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1)>0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(y) = \int_{Y_0^*}^{y} \frac{|z|^{-\sigma_1}dz}{\varphi_0(z)},$$

где

$$Y_0^* = \begin{cases} y_0^0, & \text{если } \sigma_0+\sigma_1-1<0, \quad \alpha_0\lambda_0>0,\\ Y_0, & \text{если } \alpha_0\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1)>0,\\ -y_0^0, & \text{если } \sigma_0+\sigma_1-1>0, \quad \alpha_0\lambda_0<0. \end{cases}$$

Для этой функции существует обратная функция Φ^{-1}, заданная в силу (1.7) на промежутке $[0,+\infty[$, если $\alpha_0\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1)<0$, или при $\alpha_0\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1)>0$ на промежутке $\left[c_{\varphi_0},0\right[$, где $c_{\varphi_0} = -\int_{Y_0^*}^{Y_0}\frac{|z|^{-\sigma_1}dz}{\varphi(z)}$, причем

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\Phi(y) = +\infty, \qquad \lim_{z\to+\infty}\Phi^{-1}(z) = Y_0 \quad \text{при} \quad \alpha_0\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1)<0,\\ \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\Phi(y) = 0, \qquad \lim_{z\uparrow 0}\Phi^{-1}(z) = Y_0 \quad \text{при} \quad \alpha_0\lambda_0(\sigma_0+\sigma_1-1)>0,\end{gathered} \tag{2.4}$$

и, согласно правилу Лопиталя,

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\Phi(y)\varphi_0(y)\operatorname{sign} y}{|y|^{1-\sigma_1}} = \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}. \tag{2.5}$$

Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\begin{gathered}\Phi(y(t)) = \alpha_0\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1}(\lambda_0-1)I_1(t)[1+z_1(x)],\\ \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+z_2(x)],\end{gathered} \tag{2.6}$$

где

$$x = \beta \ln|\pi_\omega(t)|, \qquad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega = +\infty, \\ -1 & \text{при } \omega < +\infty, \end{cases} \tag{2.7}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= \beta\left[\frac{\lambda_0}{B(\lambda_0-1)} F(x,z_1)(1+z_2) - G(x)(1+z_1)\right], \\ z_2' &= \beta\left[\frac{(\lambda_0-1)^2 K(x,z_1,z_2)G(x)(1+z_2)^{-\sigma_1}}{\lambda_0 BF(x,z_1)} - \frac{1+(\lambda_0+1)z_2+\lambda_0 z_2^2}{\lambda_0-1}\right], \end{aligned} \tag{2.8}$$

в которой

$$B = \alpha_0(\lambda_0-1)\left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right|^{\sigma_1}, \qquad G(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))I_1'(t(x))}{I_1(t(x))},$$

$$F(x,z_1) = \frac{\alpha_0(\operatorname{sign}\lambda_0)|Y(t(x),z_1)|^{1-\sigma_1}}{I_1(t(x))\varphi_0(Y(t(x),z_1))}, \qquad K(x,z_1,z_2) = \frac{\theta_1\left(Y^{[1]}(t(x),z_1,z_2)\right)}{\theta_1\left(|\pi_\omega(t(x))|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)},$$

где

$$Y(t,z_1) = \Phi^{-1}\big(BI_1(t)(1+z_1)\big), \qquad Y^{[1]}(t,z_1,z_2) = \frac{\lambda_0 Y(t,z_1)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}(1+z_2).$$

В силу свойств функции Φ^{-1}, приведенных в формулах (2.4), $\lim\limits_{t\uparrow\omega} Y(t,\theta) = Y_0$ при $|\theta| \le \frac{1}{2}$. С использованием правила Лопитала и (1.2) для каждого такого θ находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{|Y(t,\theta)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} Y(t,\theta)}{I_1(t)\varphi_0(Y(t,\theta))} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\dfrac{|Y(t,\theta)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} Y(t,\theta)}{\varphi_0(Y(t,\theta))}\right]'}{I_1'(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} B(1+\theta)I_1'(t)\left[1-\sigma_1-\frac{Y(t,\theta)\varphi_0'(Y(t,\theta))}{\varphi_0(Y(t,\theta))}\right] =$$

$$= B(1+\theta)(1-\sigma_0-\sigma_1).$$

Отсюда, учитывая вид функции $Y(t,\theta)$ и второе из условий (1.12), получаем

$$\frac{\pi_\omega(t)Y'(t,\theta)}{Y(t,\theta)} =$$

$$= \frac{\pi_\omega(t)I_1'(t)B(1+\theta)}{I_1(t)}\frac{I_1(t)\varphi_0(Y(t,0))}{|Y(t,\theta)|^{1-\sigma_1}\operatorname{sign} Y(t,\theta)} \sim \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.9}$$

Таким образом, $|Y(t,\theta)| = |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0(1+o(1))}{\lambda_0-1}}$ при $t\uparrow\omega$. Поэтому, учитывая третье из условий (1.12), можно выбрать число $t\in[a,\omega[$ так, чтобы $Y(t(x),z_1) \in \Delta_{Y_0}$, $Y^{[1]}(t,z_1,z_2) \in \Delta_{Y_1}$, $|\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0-1}} \in \Delta_{Y_1}$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $|z_i| \le \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$. Кроме того, учитывая первое из условий (1.12), имеем $\operatorname{sign} Y(t,z_1) = \alpha_0 \operatorname{sign}\lambda_0$ также при $t\in[t_0,\omega[$ и $|z_i| \le \frac{1}{2}$, $i = 1, 2$.

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2.8) на множестве

$$\Omega = [\,x_0, +\infty[\,\times D, \quad \text{где} \quad x_0 = \beta \ln|\pi_\omega(t_0)|, \qquad D = \left\{(z_1, z_2):\ |z_i| \le \frac{1}{2},\, i = 1, 2\right\}.$$

На этом множестве правые части этой системы являются непрерывными функциями по переменной x и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным z_1, z_2, причем

$$F'_{z_1}(x, z_1) = B\left(1 - \sigma_1 - \frac{Y(t(x), z_1)\varphi_0'(Y(t(x), z_1))}{\varphi_0(Y(t(x), z_1))}\right),$$

$$F''_{z_1^2}(x, z_1) = \frac{B^2 Y(t(x), z_1)\varphi_0'(Y(t(x), z_1))}{\varphi_0(Y(t(x), z_1))F(x, z_1)}\left[1 + \frac{Y(t(x), z_1)\varphi_0'(Y(t(x), z_1))}{\varphi_0(Y(t(x), z_1))} - \right.$$

$$\left. - \frac{Y(t(x), z_1)\varphi_0''(Y(t(x), z_1))}{\varphi_0'(Y(t(x), z_1))}\right],$$

$$K'_{z_1}(x, z_1, z_2) = \frac{B}{F(x, z_1)}\,\frac{Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\theta_1'\big(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\big)}{\theta_1\left(|\pi_\omega(t(x))|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right)},$$

$$K'_{z_2}(x, z_1, z_2) = \frac{Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\theta_1'\big(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\big)}{(1 + z_2)\theta_1\left(|\pi_\omega(t(x))|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}}\right)},$$

$$K''_{z_1^2}(x, z_1, z_2) = K'_{z_1}(x, z_1, z_2)\frac{B}{F(x, z_1)}\left[\frac{Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\theta_1''\big(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\big)}{(1 + z_2)\theta_1'\big(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\big)} + \right.$$

$$\left. + \frac{Y(t(x), z_1)\varphi_0'(Y(t(x), z_1))}{\varphi_0(Y(t(x), z_1))} - \sigma_1\right],$$

$$K''_{z_2^2}(x, z_1, z_2) = K'_{z_2}(x, z_1, z_2)\frac{Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\theta_1''\big(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\big)}{(1 + z_2)\theta_1'\big(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\big)},$$

$$K''_{z_1, z_2}(x, z_1, z_2) = \frac{K'_{z_2}(x, z_1, z_2)}{1 + z_2}\left[\frac{Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\theta_1''\big(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\big)}{\theta_1'\big(Y^{[1]}(t(x), z_1, z_2)\big)} + 1\right].$$

Разложив при каждом фиксированном $x \in [\,x_0, +\infty[$ функции $F(x, z_1)$ и $\dfrac{1}{F(x, z_1)}$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности $z_1 = 0$ до второго порядка включительно, функцию $K(x, z_1, z_2)$ в окрестности точки $(z_1, z_2) = (0, 0)$, а функцию $|1 + z_2|^{-\sigma_0}$ в окрестности точки $z_2 = 0$, запишем систему (2.9) в виде

$$\begin{aligned} z_1' &= F_1(x) + A_{11}(x)z_1 + A_{12}(x)z_2 + R_1(x, z_1, z_2), \\ z_2' &= F_2(x) + A_{21}(x)z_1 + A_{22}(x)z_2 + R_2(x, z_1, z_2), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$F_1(x) = \beta\left[\frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)B}F(x, 0) - G(x)\right], \qquad F_2(x) = \beta\left[\frac{BG(x)K(x, 0, 0)}{\lambda_0 F(x, 0)} - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\right],$$

$$A_{11}(x) = \beta\left[\frac{\lambda_0}{(1 - \lambda_0)B}F'(x, 0) - G(x)\right], \qquad A_{12}(x) = \beta\frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)B}F(x, 0),$$

$$A_{21}(x) = \frac{\beta(1-\lambda_0)^2}{\lambda_0 B}\left[\frac{G(x)K'_{z_1}(x,0,0)}{F(x,0)} - \frac{G(x)F'(x,0)K(x,0,0)}{F^2(x,0)}\right],$$

$$A_{22}(x) = \beta\left[\frac{(1-\lambda_0)^2 G(x)}{\lambda_0 BF(x,0)}\left(-\sigma_1 K(x,0,0) + K'_{z_2}(x,0,0)\right) + \frac{1+\lambda_0}{1-\lambda_0}\right],$$

$$R_1(x,z_1,z_2) = \frac{\beta\lambda_0}{(\lambda_0-1)B}\left[F'(x,0)z_1z_2 + \frac{1}{2}F''(x,\theta_1)z_1^2(1+z_2)\right],$$

$$R_2(x,z_1,z_2) = \beta G(x)\frac{(\lambda_0-1)^2}{\lambda_0 B}\left(\frac{(1-z_2)^{-\sigma_1}K(x,z_1,z_2)}{2F^3(x,\theta_2)}\times\right.$$

$$\times\left(2(F'(x,\theta_2)^2 - F(x,\theta_2)F''(x,\theta_2)\right)z_1^2 + \frac{(1-z_2)^{-\sigma_1}}{2F^2(x,0)}\left(F(x,0)-F'(x,0)z_1\right)\times$$

$$\times\sum_{i,j=1}^{2}K''_{z_i,z_j}(x,\theta_3,\theta_4)z_iz_j + \frac{\sigma_1(1+\sigma_1)}{2F^2(x,0)}(1+\theta_5)^{-\sigma_1-2}\left(F(x,0)-F'(x,0)z_1\right)\times$$

$$\times\left(K(x,0,0)+\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_i\right)z_2^2 +$$

$$+\frac{\sigma_1F'(x,0)}{F^2(x,0)}\left(K(x,0,0)+\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_i\right)z_1z_2 -$$

$$\left.-\frac{F'(x,0)}{F^2(x,0)}\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_1 - \frac{\sigma_1}{F^2(x,0)}\sum_{i=1}^{2}K'_{z_i}(x,0,0)z_iz_2\right) - \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}z_2^2,$$

$$|\theta_i| \le \frac{1}{2}, \quad i = 1,\ldots,5.$$

Учитывая (2.10) и то, что функция $\varphi_1(z)$ удовлетворяет условию S_1, имеем

$$\theta_1\left(\frac{\lambda_0 Y(t(x),0)}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t(x))}\right) = \theta_1\left(|\pi_\omega(t(x))|^{\frac{1}{\lambda_0-1}}\right)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Отсюда $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x,0,0) = 1$ и согласно (1.2) $\lim\limits_{x\to+\infty} K'_{z_i}(x,0,0) = 0,\ \ i\in\{1,2\}$. Поэтому в силу (2.9), свойств функции Φ^{-1}, приведенных в формулах (2.5), и условия (1.12), получаем

$$\lim_{x\to+\infty} F_i(x) = 0, \quad i = 1, 2,$$

предельная матрица коэффициентов линейной части системы (2.10) имеет вид

$$A = \lim_{x\to+\infty}\begin{pmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) \\ A_{21}(x) & A_{22}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\beta(\sigma_0+\sigma_1-1)\lambda_0}{1-\lambda_0} \\ \dfrac{\beta}{1-\lambda_0} & \dfrac{\beta(\lambda_0-\sigma_1+1)}{1-\lambda_0}\end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{R_i(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad x\in[\,x_0,+\infty[\,.$$

Запишем для матрицы A характеристическое уравнение $\det[A - \nu E_2] = 0$, где E_2 — единичная матрица второго порядка:

$$\nu^2 - \frac{\beta(\lambda_0 - \sigma_1 - 1)}{1 - \lambda_0}\nu - \lambda_0 \frac{(\sigma_0 + \sigma_1 - 1)}{(1 - \lambda_0)^2} = 0.$$

В силу (1.11) это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (2.10) выполнены все условия теоремы 2.1 из [19]. Согласно этой теореме система (2.8) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2 \colon \; [\, x_1, +\infty[\; \to \mathbb{R}^2$, $x_1 \ge x_0$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Ему вследствие замен (2.6), (2.7) соответствует решение y уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$\Phi(y(t)) = \alpha_0 \left|\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}\right|^{\sigma_1} (\lambda_0 - 1) I_1(t)[1 + o(1)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)].$$

С учетом (2.5) первое из них запишем в виде

$$\frac{|y(t)|^{1-\sigma_1} \operatorname{sign} y(t)}{\varphi_0(y(t))} = \alpha_0 \left|\frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0}\right|^{\sigma_1} (1 - \lambda_0)(\sigma_0 + \sigma_1 - 1) I_1(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этих представлений и (1.1) ясно, что полученное решение y является возрастающим $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -решением.

Теорема 1.1 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.2.** *Необходимость.* Пусть выполняется условие (1.8), $y \colon \; [\, t_0, \omega[\; \to R$ — возрастающее $P_\omega(Y_0, Y_1, \infty)$-решение уравнения (1.1). Тогда согласно (1.6) из тождества

$$\frac{y''(t)\, y(t)}{\left(y'(t)\right)^2} = \frac{\left(\dfrac{y'(t)}{y(t)}\right)'}{\left(\dfrac{y'(t)}{y(t)}\right)^2} + 1$$

следует, что

$$\frac{\left(\dfrac{y'(t)}{y(t)}\right)'}{\left(\dfrac{y'(t)}{y(t)}\right)^2} = -1 + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом (1.5) непосредственно вытекают асимптотические соотношения

$$y(t) = \pi_\omega(t)\, y'(t)(1 + o(1)), \qquad y''(t) = o\left(\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)}\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.11}$$

В силу первого из этих соотношений имеет место второе из представлений (1.16) и выполняется условие (1.14). Это означает, что существует такая удовлетворяющая (1.9) непрерывно дифференцируемая функция $L \colon \; \Delta_{Y_0} \to \; \to \,]0; +\infty[$, что $y(t) = \pi_\omega(t) L(\pi_\omega(t))$. Поэтому в силу условия S_0 $\theta_0(y(t)) = \theta_0(\pi_\omega(t))\,(1 + o(1))$ при $t \uparrow \omega$. Применяя правило Лопиталя и используя полученное представление в совокупности с формулами (1.2), (1.6), находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(y'(t)\right)^{1-\sigma_0}}{I_0(t)\varphi_1\left(y'(t)\right)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\dfrac{\left(y'(t)\right)^{1-\sigma_0}}{\varphi_1\left(y'(t)\right)}\right]'}{I_0'(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\dfrac{y''(t)\left(y'(t)\right)^{-\sigma_0}}{\varphi_1\left(y'(t)\right)}\left[1-\dfrac{y'(t)\varphi_1'\left(y'(t)\right)}{\varphi_1\left(y'(t)\right)}-\sigma_0\right]}{p(t)\varphi_0\left(\pi_\omega(t)\right)} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1),$$

т. е. имеет место первое из представлений (1.16). С учетом знака $y'(t)$ получаем также первое из условий (1.15). Кроме того, учитывая (2.11), имеем

$$\frac{\pi_\omega(t)\,p(t)\varphi_0\left(\pi_\omega(t)\right)\varphi_1\left(y'(t)\right)}{\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)\left|y'(t)\right|^{1-\sigma_0}}\to 0 \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega,$$

откуда следует второе из условий (1.15).

Достаточность. Предположим, что функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию S_0, а также выполняются условия (1.8), (1.14) и (1.15). Тогда в силу первого из условий (1.15) в $I_0(t)$ предел интегрирования A_ω^0 определяется следующим образом:

$$A_\omega^0 = \begin{cases} a, & \text{если } \alpha_0(\sigma_0+\sigma_1-1)<0, \\ \omega, & \text{если } \alpha_0(\sigma_0+\sigma_1-1)>0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \int_{Y_1^*}^{z}\frac{(\tau)^{-\sigma_0}d\tau}{\varphi_1(\tau)}, \quad \text{где} \quad Y_1^* = \begin{cases} y_1^0>0, & \text{если } \alpha_0(\sigma_0+\sigma_1-1)>0, \\ Y_1, & \text{если } \alpha_0(\sigma_0+\sigma_1-1)<0. \end{cases}$$

Из формул (1.2) следует, что для этой функции существует обратная функция Φ^{-1}, заданная на промежутке Δ, где

$$\Delta = \begin{cases} [\,0,+\infty\,[, & \text{если } \sigma_0+\sigma_1<1 \text{ и } \alpha_0=1, \\ ]-\infty,0\,], & \text{если } \sigma_0+\sigma_1>1 \text{ и } \alpha_0=-1, \\ \left[c_{\varphi_1},0\right[, & \text{если } \sigma_0+\sigma_1>1 \text{ и } \alpha_0=1, \\ \left]0,c_{\varphi_1}\right], & \text{если } \sigma_0+\sigma_1<1 \text{ и } \alpha_0=-1, \end{cases} \qquad c_{\varphi_1} = -\int_{y_1^0}^{Y_1}\frac{|\tau|^{-\sigma_0}d\tau}{\varphi_0(\tau)},$$

причем

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}}\Phi(z) = Y_1, \qquad \lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta}}\Phi^{-1}(z) = Y_1 \quad \text{при} \quad \sigma_0+\sigma_1-1<0,$$

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}}\Phi(z) = -\infty, \qquad \lim_{z\to-\infty}\Phi^{-1}(z) = Y_1 \quad \text{при} \quad \sigma_0+\sigma_1-1>0 \quad \text{и} \quad \alpha_0=-1, \tag{2.12}$$

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}}\Phi(z) = 0, \qquad \lim_{z\uparrow 0}\Phi^{-1}(z) = Y_1 \quad \text{при} \quad \sigma_0+\sigma_1-1>0 \quad \text{и} \quad \alpha_0=1,$$

и, согласно правилу Лопиталя,

$$\lim_{z\to Y_1}\frac{\Phi(z)\varphi_1(z)}{z^{1-\sigma_0}} = \frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}. \qquad (2.13)$$

Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\Phi\big(y'(t)\big) = \alpha_0 I_0(t)[1+z_1(x)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+z_2(x)], \qquad (2.14)$$

где

$$x = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \quad \beta = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega=+\infty, \\ -1 & \text{при } \omega<+\infty, \end{cases} \qquad (2.15)$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} z_1' &= \beta G(x)\big[K(x,z_1,z_2)(1+z_2)^{-\sigma_0} - (1+z_1)\big], \\ z_2' &= -\beta\left[z_2 + z_2^2 - \frac{K(x,z_1,z_2)G(x)(1+z_2)^{1-\sigma_0}}{\alpha_0 F(x,z_1)}\right], \end{aligned} \qquad (2.16)$$

в которой

$$G(x) = \frac{\pi_\omega(t(x))I_0'(t(x))}{I_0(t(x))}, \qquad F(x,z_1) = \frac{Y^{[1]}(t(x),z_1)^{1-\sigma_0}}{I_0(t(x))\varphi_0\big(Y^{[1]}(t(x),z_1)\big)},$$

$$Y^{[1]}(t,z_1) = \Phi^{-1}(\alpha_0 I_0(t)(1+z_1)), \qquad K(x,z_1,z_2) = \frac{\theta_0\left(\dfrac{\pi_\omega(t(x))Y^{[1]}(t(x),z_1)}{1+z_2(x)}\right)}{\theta_0(\pi_\omega(t(x)))}.$$

В силу свойств функции Φ^{-1}, приведенных в формулах (2.12), $\lim\limits_{x\to+\infty} Y^{[1]}(x,\theta) = Y_1$ при $|\theta|\le\frac{1}{2}$. Учитывая вид функции Φ и (1.2), с использованием правила Лопиталя находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\big(Y^{[1]}(t,\theta)\big)^{1-\sigma_0}}{I_0(t)\varphi_1\big(Y^{[1]}(t,\theta)\big)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left[\dfrac{\big(Y^{[1]}(t,\theta)\big)^{1-\sigma_0}}{\varphi_1\big(Y^{[1]}(t,\theta)\big)}\right]'}{I_0'(t)} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)(1+\theta).$$

Используя это предельное соотношение, аналогично тому, как было установлено (2.9), получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\big(Y^{[1]}(t,\theta)\big)'}{Y^{[1]}(t,\theta)} = 0. \qquad (2.17)$$

Это означает, что $Y^{[1]}(t,\theta) = |\pi_\omega(t)|^{o(1)}$ при $t\uparrow\omega$. Поэтому с учетом (1.14) можно выбрать число $t_0\in[a,\omega[$ так, чтобы $Y^{[1]}(t,z_1)\in\Delta_{Y_1}$, $\dfrac{\pi_\omega(t)Y^{[1]}(t,z_1)}{1+z_2}\in$ $\in\Delta_{Y_0}$, $\pi_\omega(t)\in\Delta_{Y_0}$ при $t\in[t_0,\omega[$ и $|z_i|\le\frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений (2.16) на множестве

$$\Omega = [x_0,+\infty[\times D, \quad \text{где} \quad x_0 = \beta\ln|t_0|, \quad D = \{(z_1,z_2)\colon |z_i|\le\delta, \quad i=1,2\}.$$

На этом множестве правые части системы являются непрерывными функциями по переменной x и дважды непрерывно дифференцируемыми по переменным z_1, z_2.

Как и при доказательстве теоремы 1.1, разложив при каждом фиксированном $x \in [\, x_0, +\infty [$ функцию $\dfrac{1}{F(x, z_1)}$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в окрестности $z_1 = 0$ до второго порядка включительно, функцию $K(x, z_1, z_2)$ в окрестности точки $(z_1, z_2) = (0, 0)$, а функцию $(1+z_2)^{-\sigma_0}$ в окрестности точки $z_2 = 0$, запишем систему (2.16) в виде

$$z_1' = F_1(x) + A_{11}(x) z_1 + A_{12}(x) z_2 + R_1(x, z_1, z_2) G(x),$$
$$z_2' = F_2(x) + A_{21}(x) z_1 + A_{22}(x) z_2 + R_2(x, z_1, z_2),$$

где

$$F_1(x) = \beta G(x)[K(x,0,0) - 1], \qquad F_2(x) = \beta\alpha_0 G(x) \frac{K(x,0,0)}{F(x,0)},$$

$$A_{11}(x) = \beta G(x)\Big[K'_{z_1}(x,0,0) - 1\Big], \qquad A_{12}(x) = \beta G(x)\Big[K'_{z_2}(x,0,0) - \sigma_0 K(x,0,0)\Big],$$

$$A_{21}(x) = \beta\alpha_0 G(x)\left[\frac{K'_{z_1}(x,0,0)}{F(x,0)} - K(x,0,0)\frac{F'(x,0)}{F^2(x,0)}\right],$$

$$A_{22}(x) = -\beta + \beta\alpha_0 G(x)\left[\frac{K'_{z_1}(x,0,0)}{F(x,0)} + (1-\sigma_0)\frac{K(x,0,0)}{F(x,0)}\right],$$

$$R_1(x, z_1, z_2) = \beta\Bigg[K(x, z_1, z_2)\,\frac{\sigma_0(1+\sigma_0)}{2}\, z_2^2\,(1+\theta_4)^{-\sigma_0-2} -$$

$$- \sigma_0\big(K(x, z_1, z_2) - K(x,0,0)\big) z_2 + \sum_{i,j=1}^{2} K''_{z_i z_j}(x, z_1, z_2) z_i z_j\Bigg],$$

$$R_2(x, z_1, z_2) = -\beta z_2^2 + \beta\alpha_0 G(x)\Bigg[\Big((1+z_2)^{1-\sigma_0} - 1 - (\sigma_0 - 1) z_2\Big)\frac{K(x, z_1, z_2)}{F(x, z_1)} +$$

$$+ \frac{(\sigma_0 - 1) z_2}{F(x, z_1)}\big(K(x, z_1, z_2) - K(x,0,0)\big) + (\sigma_0 - 1) z_2\, K(x,0,0)\left(\frac{1}{F(x, z_1)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{F(x,0)}\right) + \frac{K(x, z_1, z_2)}{2F(x, \theta_1)}\Big(F(x,\theta_1) F''(x,\theta_1) - 2\big(F'(x,\theta_1)\big)^2\Big) z_1^2 -$$

$$- \frac{F(x,0)}{F^2(x,0)}\, z_1\big(K(x, z_1, z_2) - K(x,0,0)\big) +$$

$$+ \frac{1}{F(x,0)} \sum_{i,j=1}^{2} K''_{z_1 z_2}(x, \theta_2, \theta_3) z_i z_j\Bigg],$$

$$|\theta_i| \le \frac{1}{2}, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Поскольку в силу (2.17) $\lim\limits_{x\to+\infty} K(x,0,0) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} K'_{z_i}(x,0,0) = 0$, $i \in \{1, 2\}$, учитывая (1.15) и (1.2), получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F_i(x)}{A_{ii}(x)} = 0, \quad i=1,2, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{A_{11}(x)} = -\beta, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{A_{22}(x)} = -\beta,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{A_{12}(x)}{A_{11}(x)} = \sigma_0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{A_{21}(x)}{A_{22}(x)} = 0, \qquad \int_{z_0}^{+\infty}\left|A_{ii}(x)\right|dx = +\infty, \quad i=1,2,$$

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{R_i(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|} = 0, \quad i=1,2, \quad \text{равномерно по} \quad x\in[x_0,+\infty[.$$

Тогда согласно теореме 1.3 и замечанию 1.4 из [19] система (2.16) имеет хотя бы одно решение $\{z_i\}_{i=1}^2$: $[x_1,+\infty[\ \to \mathbb{R}^2$, $x_1\ge x_0$, стремящееся к нулю при $x\to$ $\to+\infty$. Ему в силу замен (2.14), (2.15) соответствует решение y уравнения (1.1), допускающее при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$\Phi\big(y'(t)\big) = \alpha_0 I_0(t)[1+o(1)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)].$$

С учетом (2.13) первое из них перепишем в виде

$$\frac{\big(y'(t)\big)^{1-\sigma_0}}{\varphi_1\big(y'(t)\big)} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)I_0(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

В силу этих представлений и (1.1) y является возрастающим $P_\omega(Y_0,Y_1,+\infty)$-решением.

Теорема 1.2 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.3.** Из теоремы 1.1 следует, что при выполнении условий (1.8), (1.12) каждое возрастающее $P_\omega(Y_0,Y_1,\lambda_0)$-решение y: $\big[t_y,\omega\big[\ \to\ ]0,+\infty[$, где $\lambda_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ и удовлетворяет (1.11), допускает при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (1.13). Интегрируя второе из них по промежутку $\big[t_y,t\big]\subset\big[t_y,\omega\big[$, получаем

$$y(t) = |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}+\varepsilon(t)}, \tag{2.18}$$

где $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\varepsilon(t)=0$.

Положим $L(z) = |\pi_\omega(t(z))|^{\varepsilon(t(z))}$, где $t(z)$ — функция обратная к $z =$ $= |\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}$. Тогда согласно (2.18) и второму из соотношений (1.13)

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}}\frac{zL'(z)}{L(z)} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\pi_\omega(t)\left(\varepsilon'(t)\ln|\pi_\omega(t)|+\frac{\varepsilon(t)}{\pi_\omega(t)}\right) =$$

$$= \frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}\lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)}-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}\right) = 0.$$

Отсюда, учитывая, что функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию S_0, в силу (1.10) имеем

$$\theta_0(y(t)) = \theta_0\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}L\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)\right) = \theta_0\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)(1+o(1))$$

при $t \uparrow \omega.$

В силу этого соотношения первое из представлений (1.13) можно записать в виде

$$|y(t)|^{1-\sigma_1-\sigma_0} \operatorname{sign} y(t) \sim \alpha_0 \left|\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\right|^{\sigma_1} (1-\lambda_0)(\sigma_0+\sigma_1-1) I_1(t) \theta_0\left(|\pi_\omega(t)|^{\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}}\right)$$

при $t \uparrow \omega,$

откуда с учетом знака $y,$ который определяется вторым из условий (1.12), следует первое из представлений (1.17). Подставляя его во второе из представлений (1.13), получаем второе из представлений (1.17).

Теорема 1.3 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.4.** Из теоремы 1.2 следует, что если функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условию $S_0,$ а также выполняются условия (1.8), (1.14), (1.15), то каждое возрастающее $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$-решение $y\colon [t_0, \omega[\;\to\;]0, +\infty[$ допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (1.16). Учитывая, что $\varphi_1(y'(t))|y'(t)|^{-\sigma_1} = \theta_1(y'(t)),$ записываем первое из них в виде

$$y'(t) = \left|\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)\theta_1(y'(t)) I_0(t)(1+\varepsilon(t))\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}. \tag{2.19}$$

Положим $L(z) = \left|\alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1)\theta_1(y'(t(z)))(1+\varepsilon(t(z)))\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$ где $t(z)$ — функция, обратная к $z = |I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$ Тогда, учитывая (1.4), (2.19) и второе из представлений (1.16), имеем

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{I_0(t)}{\alpha_0 I_0'(t)}\left(\frac{\varepsilon'(t)}{1+\varepsilon(t)} + \frac{y''(t)\theta_1'(y'(t))}{\theta_1(y'(t))}\right) =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{I_0(t)y''(t)}{\alpha_0 I_0'(t)y'(t)}\left(\frac{\varepsilon(t)(1-\sigma_0-\sigma_1)}{1+\varepsilon(t)} - \frac{y'(t)\theta_1'(y'(t))}{\theta_1(y'(t))}\frac{2\varepsilon(t)+1}{1+\varepsilon(t)}\right) - \varepsilon(t)\right) =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\left(\frac{\alpha_0\varphi_0(y(t))|y'(t)|^{-\sigma_0}}{(1-\sigma_0-\sigma_1)\varphi_0(\pi_\omega(t))}\left(\frac{\varepsilon(t)(1-\sigma_0-\sigma_1)}{(1+\varepsilon(t))^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\theta_1'(y'(t))}{\theta_1(y'(t))}\frac{2\varepsilon(t)+1}{(1+\varepsilon(t))^2}\right) - \varepsilon(t)\right) = 0.$$

Поэтому первое из представлений (1.16) в силу условия S_1 можно представить в виде

$$|y'(t)|^{1-\sigma_0-\sigma_1} = \alpha_0(1-\sigma_0-\sigma_1) I_0(t)\theta_1\left(|I_0(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\right)[1+o(1)]$$

при $t \uparrow \omega,$

откуда следует второе из представлений (1.18). Подставляя его во второе из представлений (1.16), получаем второе из представлений (1.18).

Теорема 1.4 доказана.

3. Пример уравнения со степенным коэффициентом. В качестве примера рассмотрим на промежутке $]0, +\infty[$ дифференциальное уравнение

$$y'' = At^{\gamma}|y|^{\sigma_0}|\ln|y||^{\mu_0}|y'|^{\sigma_1}|\ln|y'||^{\mu_1}, \tag{3.1}$$

где $A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\sigma_0, \sigma_1, \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$. Это уравнение является уравнением (1.1), в котором $\alpha_0 = \operatorname{sign} A$, $p(t) = |A|t^{\gamma}$, $\varphi_i(z) = |z|^{\sigma_1}|\ln|z||^{\mu_i}$, $i = 0, 1$. В силу структуры функций φ_i, $i = 0, 1$, уравнение (3.1) допускает применение теорем 1.3 и 1.4. При их использовании нам потребуются следующие вспомогательные обозначения:

$$D_0 = \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\gamma+2-\sigma_1}\left(|A|\left|\frac{\gamma+2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right|^{\mu_0-\sigma_0}\left|\frac{\sigma_0+\gamma+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}\right|^{\mu_1-1}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_1-\sigma_0}} \times$$

$$\times \operatorname{sign}\left(\frac{A(1-\sigma_0-\sigma_1)}{(\sigma_0+\gamma+1)}\right),$$

$$D_1 = \left|A\frac{|1-\sigma_0-\sigma_1|^{1-\mu_1}}{\mu_0+1}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign}\left(\frac{A(1-\sigma_0-\sigma_1)}{\mu_0+1}\right),$$

$$D_2 = |A(1-\sigma_0-\sigma_1)|^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}\operatorname{sign}\big(A(1-\sigma_0-\sigma_1)\big).$$

Сначала исследуем вопрос о наличии и асимптотике $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, где $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. При этом можно считать, что $a = 2$.

В данном случае

$$\pi_\omega(t) = t, \qquad I_1(t) = |A|\left|\frac{1}{\lambda_0-1}\right|^{\mu_1}\int_{A^1_{+\infty}}^{t}\tau^{\gamma+1-\sigma_1}\ln^{\mu_1}\tau\, d\tau,$$

$$I_0(t) = |A|\int_{A^0_{+\infty}}^{t}\tau^{\sigma_0+\gamma}\ln^{\mu_0}\tau\, d\tau.$$

Поэтому с учетом выбора пределов интегрирования $A^k_{+\infty}$, $k = 0, 1$, при $t \to +\infty$ получаем представления

$$I_1(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|A|}{\gamma+2-\sigma_1}\left|\dfrac{1}{\lambda_0-1}\right|^{\mu_1} t^{\gamma+2-\sigma_1}\ln^{\mu_1} t, & \text{если } \gamma-\sigma_1 \neq -2,\\ \dfrac{|A|}{\mu_1+1}\left|\dfrac{1}{\lambda_0-1}\right|^{\mu_1}\ln^{\mu_1+1} t, & \text{если } \gamma-\sigma_1 = -2, \quad \mu_1 \neq 1,\\ |A||\lambda_0-1|\ln\ln t, & \text{если } \gamma-\sigma_1 = -2, \quad \mu_1 \neq -1, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$I_0(t) \sim \begin{cases} \dfrac{|A|}{\sigma_0+\gamma+1}t^{\sigma_0+\gamma+1}\ln^{\mu_0} t, & \text{если } \gamma+\sigma_0 \neq -1,\\ \dfrac{|A|}{\mu_0+1}\ln^{\mu_0+1} t, & \text{если } \gamma+\sigma_0 = -1, \quad \mu_0 \neq -1,\\ -|A|\ln\ln t, & \text{если } \gamma+\sigma_0 = -1, \quad \mu_1 = -1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Кроме того,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{tI_1'(t)}{I_1(t)} = \gamma + 2 - \sigma_1, \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{tI_0'(t)}{I_0(t)} = \sigma_0 + \gamma + 1. \tag{3.4}$$

Тогда в силу (3.2) – (3.4) из теорем 1.3, 1.4 и замечаний 1.1, 1.2 вытекают следующие утверждения.

***Следствие* 3.1.** *Для существования* $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-решений,* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$, *уравнения* (3.1) *необходимо, а если*

$$\frac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1} \neq \sigma_1 - 1, \quad \text{либо} \quad \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1} > 0, \tag{3.5}$$

то и достаточно выполнение условий

$$\lambda_0 = \frac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1}, \qquad \gamma - \sigma_1 \neq -2, \qquad \sigma_0 + \gamma + 1 \neq 0. \tag{3.6}$$

Более того, для каждого такого $P_{+\infty}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1}\right)$*-решения при* $t \to +\infty$ *имеют место асимптотические представления*

$$\begin{aligned} y(t) &\sim D_0 t^{\frac{\gamma+2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (\ln t)^{\frac{\mu_1+\mu_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}, \\ y'(t) &\sim \frac{\gamma+2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1} D_0 t^{\frac{\gamma+1+\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (\ln t)^{\frac{\mu_1+\mu_0}{1-\sigma_1-\sigma_0}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

***Замечание* 3.1.** Если $\dfrac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1} = \sigma_1 - 1$, $\dfrac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1} < 0$ и $\mu_i \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$ при $i = 1, 2$, то можно показать, что условия (3.6) также являются достаточными для существования $P_{+\infty}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1}\right)$-решений уравнения (3.1), допускающих при $t \to +\infty$ асимптотические представления (3.7).

***Следствие* 3.2.** *Для существования* $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решений уравнения* (3.1) *необходимо и достаточно выполнение условия* $\sigma_0 + \gamma = -1$. *Более того, при* $\mu_0 \neq -1$ *для каждого такого* $P_{+\infty}(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решения при* $t \to +\infty$ *имеют место асимптотические представления*

$$\begin{aligned} y(t) &\sim D_1 t (\ln t)^{\frac{\mu_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (\ln\ln t)^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}, \\ y'(t) &\sim D_1 (\ln t)^{\frac{\mu_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (\ln\ln t)^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}, \end{aligned}$$

а при $\mu_0 = -1$ — *представления вида*

$$\begin{aligned} y(t) &\sim D_2 t (\ln\ln t)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (\ln\ln\ln t)^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}, \\ y'(t) &\sim D_2 (\ln\ln t)^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} (\ln\ln\ln t)^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}. \end{aligned}$$

Выбрав теперь в качестве ω любое число из промежутка $(0,+\infty)$, исследуем вопрос о наличии и асимптотике $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (3.1), где $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. В этом случае $\pi_\omega(t) = t - \omega$, $I_1(t) = |A|\left|\frac{1}{\lambda_0 - 1}\right|^{\mu_1}\int_{A_\omega^1}^t \tau^\gamma(\omega - \tau)^{1-\sigma_1}|\ln(\omega-\tau)|^{\mu_1}d\tau$, $I_0(t) = |A|\int_{A_\omega^0}^t \tau^\gamma(\omega-\tau)^{\sigma_0}|\ln(\omega-\tau)|^{\mu_0}d\tau$. Поэтому с учетом выбора пределов интегрирования при $t\uparrow\omega$ получим представления

$$I_1(t) \sim \begin{cases} -\dfrac{|A|\omega^\gamma}{2-\sigma_1}\left|\dfrac{1}{\lambda_0-1}\right|^{\mu_1}(\omega-t)^{2-\sigma_1}|\ln(\omega-t)|^{\mu_1}, & \text{если } \sigma_1 \neq 2, \\ -\dfrac{|A|\omega^\gamma}{\mu_1+1}\left|\dfrac{1}{\lambda_0-1}\right|^{\mu_1}|\ln(\omega-t)|^{\mu_1+1}, & \text{если } \sigma_1 = 2, \quad \mu_1 \neq -1, \\ -|A|\omega^\gamma\left|\dfrac{1}{\lambda_0-1}\right|^{\mu_1}\ln\ln(\omega-t), & \text{если } \sigma_1 = 2, \quad \mu_1 = -1, \end{cases} \tag{3.8}$$

$$I_0(t) \sim \begin{cases} -\dfrac{|A|\omega^\gamma}{\sigma_0+1}(\omega-t)^{\sigma_0+1}|\ln(\omega-t)|^{\mu_0}, & \text{если } \sigma_0 \neq -1, \\ -\dfrac{|A|\omega^\gamma}{\mu_0+1}|\ln(\omega-t)|^{\mu_0+1}, & \text{если } \sigma_0 = -1, \quad \mu_0 \neq -1, \\ -|A|\omega^\gamma\ln\ln(\omega-t), & \text{если } \sigma_0 = -1, \quad \mu_1 = -1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Кроме того,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{(\omega-t)I_1'(t)}{I_1(t)} = 2-\sigma_1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(\omega-t)I_0'(t)}{I_0(t)} = \sigma_0+1. \tag{3.10}$$

Тогда в силу (3.8) – (3.10) из теорем 1.3, 1.4 и замечания 1.1 вытекают следующие утверждения.

***Следствие* 3.3.** *Для существования* $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-решений*, $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, *уравнения* (3.1) *необходимо, а если*

$$\frac{2-\sigma_1}{\sigma_0+1} \neq \sigma_1 - 1 \quad \textit{либо} \quad \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\sigma_0+1} > 0,$$

то и достаточно выполнение условий

$$\lambda_0 = \frac{2-\sigma_1}{\sigma_0+1}, \quad \sigma_1 - 2 \neq 0, \quad \sigma_0 + 1 \neq 0. \tag{3.11}$$

Более того, для каждого такого $P_\omega\left(Y_0, Y_1, \dfrac{2-\sigma_1}{\sigma_0+1}\right)$*-решения при* $t\uparrow\omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$\begin{gathered} y(t) \sim D_0\omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(\omega-t)^{\frac{2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}|\ln(\omega-t)|^{\frac{\mu_1+\mu_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}, \\ y'(t) \sim \frac{-2+\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}D_0\omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_0-\sigma_1}}(\omega-t)^{\frac{1+\sigma_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}|\ln(\omega-t)|^{\frac{\mu_1+\mu_0}{1-\sigma_0-\sigma_1}}. \end{gathered} \tag{3.12}$$

***Следствие* 3.4**. *Для существования* $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решений уравнения* (3.1) *необходимо и достаточно выполнение условия* $\sigma_0 = -1$. *Боле того, при* $\mu_0 \neq$

$\neq -1$ *для каждого такого* $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решения при* $t \uparrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$y(t) \sim D_1 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} (t-\omega) |\ln(\omega - t)|^{\frac{\mu_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln(\omega-t)||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y'(t) \sim D_1 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} |\ln(\omega - t)|^{\frac{\mu_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln(\omega-t)||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

а при $\mu_0 = -1$ — *представления вида*

$$y(t) \sim (t-\omega) D_2 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} |\ln|\ln(\omega - t)||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln|\ln(\omega-t)|||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y'(t) \sim D_2 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} |\ln|\ln(\omega - t)||^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln|\ln(\omega-t)|||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Теперь рассмотрим вопрос о существовании и асимптотике при $t \downarrow \omega$, $0 \leq \leq \omega < +\infty$, решений, определенных в правой окрестности ω. Для исследования таких решений выполним замену

$$z(\tau) = y(t), \qquad \omega - \tau = t - \omega. \tag{3.13}$$

В результате получим уравнение

$$z'' = A(2\omega - \tau)^\gamma |z|^{\sigma_0} |\ln|z||^{\mu_0} |z'|^{\sigma_1} |\ln|z'||^{\mu_1}, \tag{3.14}$$

которое теперь следует исследовать уже при $\tau \uparrow \omega$. Решение уравнения (3.1), соответствующее при этом $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решению уравнения (3.14), будем называть $P_{\omega+}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решением.

Поскольку при $0 < \omega < +\infty$ $\lim\limits_{\tau \uparrow \omega} (2\omega - \tau)^\gamma = \omega^\gamma$, для уравнения (3.14) имеют место предельные соотношения (3.8) – (3.10). В этом случае вопрос об асимптотике при $t \downarrow \omega$ $P_{\omega+}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений уравнения (3.1) может быть решен на основании следствий 3.3, 3.4 с учетом замен (3.14). Таким образом, приходим к следующим утверждениям.

***Следствие* 3.5.** *Для существования* $P_{\omega+}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-решений*, $\lambda_0 \ \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, *уравнения* (3.1) *необходимо, а если*

$$\frac{2-\sigma_1}{\sigma_0+1} \neq \sigma_1 - 1 \quad \text{либо} \quad \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\sigma_0+1} > 0,$$

то и достаточно выполнение условий (3.11). *Более того, для каждого такого* $P_{\omega+}\left(Y_0, Y_1, \frac{2-\sigma_1}{\sigma_0+1}\right)$*-решения при* $t \downarrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$\begin{aligned} y(t) &\sim D_0 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} (t-\omega)^{\frac{2-\sigma_1}{1-\sigma_1-\sigma_0}} |\ln(t-\omega)|^{\frac{\mu_1+\mu_0}{1-\sigma_1-\sigma_0}} [1 + o(1)], \\ y'(t) &\sim \frac{2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1} D_0 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} (t-\omega)^{\frac{1+\sigma_0}{1-\sigma_1-\sigma_0}} |\ln(t-\omega)|^{\frac{\mu_1+\mu_0}{1-\sigma_1-\sigma_0}}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

***Замечание* 3.2.** Если $\frac{2-\sigma_1}{\sigma_0+1} = \sigma_1 - 1$, $\frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\sigma_0+1} < 0$ и $\mu_i \in (-\infty; 0] \cup \cup (2; +\infty)$ при $i = 1, 2$, то можно показать, что условия (3.11) также являются достаточными для существования $P_{\omega+}\left(Y_0, Y_1, \frac{2-\sigma_1}{\sigma_0+1}\right)$-решений уравнения (3.1), допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.12), а при $t \downarrow \omega$ асимптотические представления (3.15).

***Следствие* 3.6.** *Для существования* $P_{\omega+}(Y_0, Y_1, \infty)$*-решений уравнения* (3.1) *необходимо и достаточно выполнение условия* $\sigma_0 = -1$. *Более того, при* $\mu_0 \neq \neq -1$ *для каждого такого* $P_{\omega+}(Y_0, Y_1, \infty)$*-решения при* $t \downarrow \omega$ *имеют место асимптотические представления*

$$y(t) \sim D_1 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} (t-\omega) |\ln(t-\omega)|^{\frac{\mu_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln(t-\omega)||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y'(t) \sim D_1 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} |\ln(t-\omega)|^{\frac{\mu_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln(t-\omega)||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

а при $\mu_0 = -1$ — *представления вида*

$$y(t) \sim D_2 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} (t-\omega) |\ln|\ln(t-\omega)||^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln|\ln(t-\omega)|||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y'(t) \sim D_2 \omega^{\frac{\gamma}{1-\sigma_1-\sigma_0}} |\ln|\ln(t-\omega)||^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln|\ln(t-\omega)|||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Далее, заметим, что при $\omega = 0$ уравнение (3.14) принимает вид

$$z'' = A|\tau|^{\gamma} |z|^{\sigma_0} |\ln|z||^{\mu_0} |z'|^{\sigma_1} |\ln|z'||^{\mu_1}. \tag{3.16}$$

Это уравнение следует исследовать при $\tau \uparrow 0$. Для этого уравнения

$$\pi_0(\tau) = \tau, \qquad I_1(\tau) = -|A| \left| \frac{1}{\lambda_0 - 1} \right|^{\mu_1} \int_{A^1_{+\infty}}^{\tau} (-t)^{\gamma+1-\sigma_1} |\ln(-t)|^{\mu_1} dt,$$

$$I_0(\tau) = -|A| \int_{A^0_{\omega}}^{\tau} |\ln(-t)|^{\mu_0} (-t)^{\sigma_0+\gamma} dt.$$

Поэтому при $\tau \uparrow 0$

$$I_1(\tau) \sim \begin{cases} \dfrac{|A|}{\gamma+2-\sigma_1} \left| \dfrac{1}{\lambda_0-1} \right|^{\mu_1} (-\tau)^{\gamma+2-\sigma_1} |\ln(-\tau)|^{\mu_1}, & \text{если } \gamma-\sigma_1 \neq 2, \\ \dfrac{|A|}{\mu_1+1} \left| \dfrac{1}{\lambda_0-1} \right|^{\mu_1} |\ln(-\tau)|^{\mu_1+1}, & \text{если } \gamma-\sigma_1 = -2, \quad \mu_1 \neq -1, \\ |A| |\lambda_0 - 1| \ln|\ln(-\tau)|, & \text{если } \gamma-\sigma_1 = -2, \quad \mu_1 = -1, \end{cases} \tag{3.17}$$

$$I_0(\tau) \sim \begin{cases} \dfrac{|A|}{\sigma_0+\gamma+1} (-\tau)^{\sigma_0+\gamma+1} |\ln(-\tau)|^{\mu_0}, & \text{если } \gamma+\sigma_0 \neq -1, \\ \dfrac{|A|}{\mu_0+1} |\ln(-\tau)|^{\mu_0+1}, & \text{если } \gamma+\sigma_0 = -1, \quad \mu_0 \neq -1, \\ |A| \ln|\ln(-\tau)|, & \text{если } \gamma+\sigma_0 = -1, \quad \mu_0 = -1. \end{cases} \tag{3.18}$$

Кроме того,

$$\lim_{\tau\uparrow 0} \frac{\tau I_1'(\tau)}{I_1(\tau)} = -\gamma - 2 + \sigma_1, \qquad \lim_{\tau\uparrow 0} \frac{\tau I_0'(\tau)}{I_0(\tau)} = -\sigma_0 - \gamma - 1. \tag{3.19}$$

Тогда в силу (3.17) – (3.19) из теорем 1.3, 1.4 и замечаний 1.1, 1.2 с учетом (3.13) вытекают следующие утверждения.

***Следствие* 3.7**. *Для существования* $P_{0+}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$*-решений,* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, *уравнения* (3.1) *необходимо, а если*

$$\frac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1} \neq \sigma_1 - 1 \quad \text{либо} \quad \frac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1} > 0,$$

то и достаточно выполнение условий (3.6). *Более того, для каждого такого* $P_{0+}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1}\right)$*-решения при* $\tau \downarrow 0$ *имеют место асимптотические представления*

$$y(t) \sim D_0 t^{\frac{\gamma+2-\sigma_1}{1-\sigma_1-\sigma_0}} |\ln t|^{\frac{\mu_1+\mu_0}{1-\sigma_1-\sigma_0}},$$

$$y'(t) \sim \frac{\gamma+2-\sigma_1}{1-\sigma_0-\sigma_1} D_0 t^{\frac{\gamma+1-\sigma_0}{1-\sigma_1-\sigma_0}} |\ln t|^{\frac{\mu_1+\mu_0}{1-\sigma_1-\sigma_0}}. \tag{3.20}$$

***Замечание* 3.3.** Если $\dfrac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1} = \sigma_1 - 1$, $\dfrac{1-\sigma_0-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1} < 0$ и $\mu_i \in (-\infty; 0] \cup \cup (2; +\infty)$ при $i = 1, 2$, то можно показать, что условия (3.6) также являются достаточными для существования $P_{0+}\left(Y_0, Y_1, \dfrac{\gamma+2-\sigma_1}{\sigma_0+\gamma+1}\right)$-решений уравнения (3.1), допускающих при $t \downarrow 0$ асимптотические представления (3.20).

***Следствие* 3.8.** *Для существования* $P_{0+}(Y_0, Y_1, \pm\infty)$*-решений необходимо и достаточно выполнение условия* $\sigma_0 + \gamma = -1$. *Более того, в случае, когда* $\mu_0 \neq -1$, *для каждого такого* $P_{0+}(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ *-решения при* $t \downarrow 0$ *имеют место асимптотические представления*

$$y(t) \sim D_1 t |\ln t|^{\frac{\mu_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln t||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y'(t) \sim D_1 |\ln t|^{\frac{\mu_0+1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln t||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

а в случае $\mu_0 = -1$ — *представления вида*

$$y(t) \sim D_2 t |\ln|\ln t||^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln|\ln t|||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}},$$

$$y'(t) \sim D_2 |\ln|\ln t||^{\frac{1}{1-\sigma_0-\sigma_1}} |\ln|\ln|\ln t|||^{\frac{\mu_1}{1-\sigma_0-\sigma_1}}.$$

Выводы. В настоящей работе получила дальнейшее развитие методика, разработанная в [15 – 18] для установления асимптотики монотонных решений дифференциального уравнения

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — функция, в некотором смысле близкая к степенной. Здесь она распространяется на дифференциальные уравнения (1.1) более общего вида. При этом возникают проблемы, которые требуют использования и разработки новых подходов и методов исследования. Подобного типа проблемы возникали в свое время при распространении результатов, полученных для обобщенного уравнения Эмдена – Фаулера

$$y'' = p(t)|y|^{\sigma} \operatorname{sign} y,$$

на дифференциальные уравнения вида

$$y''(t) = p(t)|y|^{\sigma}|y'|^{\lambda}\operatorname{sign} y.$$

Исследование уравнений даже такого частного вида потребовало (см. работы [3 – 11]) существенного пересмотра многих основополагающих идей, которые использовались при изучении обобщенного уравнения Эмдена – Фаулера.

Для уравнения (1.1) выделен достаточно широкий класс $P_{\omega}(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-решений, которые допускают установление их асимптотики при $t \uparrow \omega$. Кроме того, установлены необходимые и достаточные условия существования таких решений. Важной особенностью предложенной здесь методики является единообразный подход к исследованию случаев $\omega = +\infty$ и $\omega < +\infty$, а также случаев, когда каждый из параметров Y_0 или Y_1 равен либо нулю, либо $\pm\infty$.

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
2. *Костин А. В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена – Фаулера // Докл. АН СССР. – 1971. – **200**, № 1. – С. 28 – 31.
3. *Костин А.В., Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Там же. – 1976. – **231**, № 5. – С. 1059 – 1062.
4. *Евтухов В. М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Там же. – 1977. – **233**, № 4. – С. 531 – 534.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – **106**, № 3. – С. 473 – 476.
6. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. – 1984. – **115**. – S. 215 – 236.
7. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 524 – 526.
8. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений *n*-го порядка // Докл. расшир. заседаний сем. Ин-та прикл. математики Тбил. ун-та. – 1988. – **3**, № 3. – С. 62 – 65.
9. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера *n*-го порядка // Докл. АН России. – 1992. – **234**, № 2. – С. 258 – 260.
10. *Евтухов В. М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения *n*-го порядка типа Эмдена – Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – **145**, № 2. – С. 269 – 273.
11. *Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного полулинейного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 5. – С. 776 –787.
12. *Wong P. K.* Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations // Pacif. J. Math. – 1963. – **13**. – P. 737 – 760.
13. *Marić V., Tomić M.* Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = f(x)\Phi(y)$ // Math. Z. – 1976. – **149**. – S. 261 – 266.
14. *Talliaferro S. D.* Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – **12**, № 6. – P. 1 – 24.
15. *Evtukhov V. M., Kirillova L. A.* Asymptotic representations of solutions of nonlinear second order differential equations // Mem. Different. Equat. and Math. Phys. – 2003. – **30**. – P. 153 – 158.
16. *Кирилова Л. О.* Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь Емдена – Фаулера // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 30 – 35.
17. *Евтухов В. М., Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 8. – С. 1053 –1061.
18. *Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 1. – С. 18 – 28.
19. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 4. – С. 433 – 444.

Получено 08.12.05