УДК 517.983

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування, Рівне)

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ МУХАМАДІЄВА ПРО ОБОРОТНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРІ ОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ

We obtain necessary and sufficient conditions of reversibility of the linear bounded operator $d^m/dt^m + A$ in the space of functions bounded on $\mathbb{R}$.

Получены необходимые и достаточные условия обратимости линейного ограниченного оператора $d^m/dt^m + A$ в пространстве ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

1. Постановка основної задачі. Нехай E і X — банахові простори, перший з яких є скінченновимірним. Позначимо через $C^0(\mathbb{R}, X)$ банахів простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в X з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},X)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X,$$

через $C^m(\mathbb{R}, X)$, $m \in \mathbb{N}$, банахів простір функцій $x \in C^0(\mathbb{R}, X)$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt}, \ldots, \dfrac{d^m x}{dt^m} \in C^0(\mathbb{R}, X)$, з нормою

$$\|x\|_{C^m(\mathbb{R},X)} = \max\left\{\|x\|_{C^0(\mathbb{R},X)}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C^0(\mathbb{R},X)}, \ldots, \left\|\frac{d^m x}{dt^m}\right\|_{C^0(\mathbb{R},X)}\right\}$$

і через $l_\infty(\mathbb{Z}, E)$ банахів простір обмежених на $\mathbb{Z}$ функцій $y = y(n)$ зі значеннями в E з нормою

$$\|y\|_{l_\infty(\mathbb{Z},E)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|y(n)\|_E.$$

Е. Мухамадієв [1] дослідив оборотність лінійного майже періодичного оператора

$$\frac{d}{dt} + B : C^1(\mathbb{R}, X) \to C^0(\mathbb{R}, X)$$

$\left(B: C^0(\mathbb{R}, X) \to C^0(\mathbb{R}, X)\right.$ — c-неперервний оператор$\left.\right)$ у випадку скінченновимірного простору X (скінченна розмірність цього простору є істотною вимогою).

У даній статті ми встановимо необхідні і достатні умови оборотності аналогічного оператора у випадку $X = l_\infty(\mathbb{Z}, E)$. Зазначимо, що $\dim l_\infty(\mathbb{Z}, E) = +\infty$.

2. Майже періодичні і c-неперервні оператори. Розглянемо банахів простір $\mathfrak{M}^0$ обмежених на $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ функцій $x = x(t, n)$ зі значеннями в E, кожна з яких неперервна на $\mathbb{R}$ за змінною t для кожного $n \in \mathbb{Z}$. Норму в $\mathfrak{M}^0$ визначимо рівністю

$$\|x\|_{\mathfrak{M}^0} = \sup_{(t,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} \|x(t,n)\|_E.$$

Також розглянемо банахів простір $\mathfrak{M}^m$ функцій $x \in \mathfrak{M}^0$, для кожної з яких $\dfrac{dx}{dt}, \ldots, \dfrac{d^m x}{dt^m} \in \mathfrak{M}^0$, з нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{M}^m} = \max\left\{\|x\|_{\mathfrak{M}^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{\mathfrak{M}^0}, \ldots, \left\|\frac{d^m x}{dt^m}\right\|_{\mathfrak{M}^0}\right\}.$$

Позначимо через $L(X_1, X_2)$, де X_1 і X_2 — банахові простори, банахів простір усіх лінійних неперервних операторів $C: X_1 \to X_2$ з нормою

$$\|C\|_{L(X_1, X_2)} = \sup_{\|x\|_{X_1}=1} \|Cx\|_{X_2}.$$

Для кожної точки $(\tau, p) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ визначимо у просторі $\mathfrak{M}^0$ лінійний оператор $S_{\tau,p}$ рівністю

$$(S_{\tau,p}x)(t,n) = x(t+\tau, n+p).$$

Очевидно, що цей оператор є неперервним, має обернений неперервний оператор $S_{\tau,p}^{-1}$,

$$S_{\tau,p}^{-1} = S_{-\tau,-p},$$

простори $\mathfrak{M}^i$, $i = \overline{0,m}$, інваріантні по відношенню до цього оператора і

$$\left\|S_{\tau,p}\right\|_{L(\mathfrak{M}^i, \mathfrak{M}^i)} = 1, \quad i = \overline{0,m}. \tag{1}$$

Оператор $A \in L(\mathfrak{M}^i, \mathfrak{M}^j)$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, називатимемо *майже періодичним*, якщо замикання $\mathcal{H}(A)$ множини

$$\left\{S_{\tau,p}AS_{-\tau,-p}: (\tau,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\right\}$$

є компактним у просторі $L(\mathfrak{M}^i, \mathfrak{M}^j)$. Якщо

$$\mathcal{H}(A) = \{A\},$$

то оператор A будемо називати *автономним*.

Аналогічно, елемент z простору $\mathfrak{M}^i$, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, називатимемо *майже періодичним*, якщо замикання множини

$$\left\{S_{\tau,p}z: (\tau,p)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\right\}$$

є компактним у просторі $\mathfrak{M}^i$. Усі майже періодичні елементи простору $\mathfrak{M}^i$ утворюють банахів простір, який позначатимемо через $\mathfrak{B}^i$. Норму в $\mathfrak{B}^i$ визначаємо рівністю

$$\|z\|_{\mathfrak{B}^i} = \|z\|_{\mathfrak{M}^i}.$$

Послідовність елементів $x_k \in \mathfrak{M}^0$, $k\in\mathbb{N}$, будемо називати *локально збіжною* до елемента $x\in\mathfrak{M}^0$ при $k\to\infty$ і позначати

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, \mathfrak{M}^0} x \quad \text{при} \quad k\to\infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і для кожних $T\in(0,+\infty)$ і $p\in\mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty}\max_{|t|\le T, |n|\le p}\left\|x_k(t,n) - x(t,n)\right\|_E = 0.$$

Аналогічно, послідовність елементів $x_k \in \mathfrak{M}^m$, $k\in\mathbb{N}$, називатимемо *локально* *збіжною* до елемента $x \in \mathfrak{M}^m$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, \mathfrak{M}^m} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і для кожних $T \in (0, +\infty)$ і $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \to \infty} \max_{|t| \le T, |n| \le p} \sum_{s=0}^{m} \left\| \frac{d^s x_k(t,n)}{dt^s} - \frac{d^s x(t,n)}{dt^s} \right\|_E = 0.$$

Тут і далі $\dfrac{d^0 x(t,n)}{dt^0}$ означає $x(t,n)$.

Оператор $\mathcal{F}: \mathfrak{M}^i \to \mathfrak{M}^j$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, будемо називати *$c$-неперервним*, якщо для довільних $x \in \mathfrak{M}^i$ і $x_k \in \mathfrak{M}^i$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, \mathfrak{M}^i} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$\mathcal{F} x_k \xrightarrow{\text{лок.}, \mathfrak{M}^j} \mathcal{F} x \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поняття c-неперервного оператора увів до розгляду (на мові „ε, δ”) Е. Мухамадієв [1]; його вивчення було продовжено в роботах [2 – 9] та ін. Означення c-неперервного оператора, в якому використано локально збіжні послідовності, запропонував автор (див., наприклад, [10 – 12]).

Виділимо деякі властивості майже періодичних елементів простору $L(\mathfrak{M}^i, \mathfrak{M}^j)$:

а) кожний оператор $\tilde{A} \in \mathcal{H}(A)$ є майже періодичним;

б) $Af \in \mathfrak{B}^j$ для кожного $f \in \mathfrak{B}^i$;

в) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $l(\varepsilon)$, що кожна множина $[t_0, t_0 + l(\varepsilon)] \times ([m_0, m_0 + l(\varepsilon)] \cap \mathbb{Z})$ містить точку (τ, m), для якої

$$\left\| S_{\tau,m} A S_{-\tau,-m} - A \right\|_{L(\mathfrak{M}^i, \mathfrak{M}^j)} < \varepsilon;$$

г) із c-неперервності оператора A випливає c-неперервність кожного оператора $\tilde{A} \in \mathcal{H}(A)$.

3. Рівномірно c-неперервні оператори. У подальшому будемо також використовувати лінійні рівномірно c-неперервні оператори.

Оператор $\mathcal{F} \in L(\mathfrak{M}^i, \mathfrak{M}^j)$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, m\}$, називатимемо *рівномірно c-неперервним*, якщо для кожних $\varepsilon > 0$, $T > 0$ і $p \in \mathbb{N}$ існують такі $\delta > 0$, $Q > 0$ і $s \in \mathbb{N}$, що для довільних $\tau \in \mathbb{R}$ і $x \in \mathfrak{M}^i$, для яких

$$\sum_{k=0}^{i} \left\| \frac{d^k x(t,n)}{dt^k} \right\|_E < \delta$$

для всіх $(t,n) \in [-Q + \tau, Q + \tau] \times ([-s, s] \cap \mathbb{Z})$ і $\| x \|_{\mathfrak{M}^i} \le 1$, виконується нерівність

$$\sum_{k=0}^{j} \left\| \frac{d^k (\mathcal{F} x)(t,n)}{dt^k} \right\|_E < \varepsilon$$

для всіх $(t,n) \in [-T + \tau, T + \tau] \times ([-p, p] \cap \mathbb{Z})$.

Очевидно, що лінійні c-неперервні майже періодичні оператори рівномірно

c-неперервні.

Для лінійних рівномірно c-неперервних операторів важливими є два наступних твердження.

Лема 1. *Для кожних рівномірно c-неперервного елемента A простору $L(\mathfrak{M}^m, \mathfrak{M}^0)$ і обмеженої рівномірно неперервної функції $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої аналогічну властивість мають частинні похідні $\dfrac{\partial v(t_1, t_n)}{\partial t_1}, \ldots, \dfrac{\partial^m v(t_1, t_n)}{\partial t_1^m}$, справджується співвідношення*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{T \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{Z},\, \|x\|_{\mathfrak{M}^m} = 1} \left\| v_{\varepsilon,T,p} Ax - A v_{\varepsilon,T,p} x \right\|_{\mathfrak{M}^0} = 0,$$

де $v_{\varepsilon,T,p} = v(\varepsilon(t - T), \varepsilon(n - p))$.

Доведення. Розглянемо визначену і неперервну на $\mathbb{R}$ разом із похідними до m-го порядку включно скалярну функцію $q = q(t)$, для якої $q(t) = 1$, якщо $|t| \le 1/2$, $q(t) = 0$, якщо $|t| \ge 1$, і $0 \le q(t) \le 1$ для всіх $t \in [-1, 1]$. Визначимо оператор $Q_{k,\tau,p} \in L(\mathfrak{M}^m, \mathfrak{M}^m)$ рівністю

$$(Q_{k,\tau,p} x)(t, n) = q\left(\frac{t - \tau}{k}\right) q\left(\frac{n - p}{k}\right) x(t, n).$$

Зафіксуємо довільне число $\delta > 0$. З рівномірної c-неперервності оператора A випливає, що існує число $k_\delta > 0$, для якого

$$\sup_{\|x\|_{\mathfrak{M}^m} \le 1} \left\| (Ax)(\tau, p) - (AQ_{k,\tau,p} x)(\tau, p) \right\|_E < \delta \tag{2}$$

для всіх $(\tau, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ і $k \ge k_\delta$.

Нехай ε_0 — таке додатне число, що

$$\left\| v_{\varepsilon,T,p} x \right\|_{\mathfrak{M}^m} \le 2 \sup_{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2} |v(t_1, t_2)|,$$

якщо $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\|x\|_{\mathfrak{M}^m} \le 1$ і $(T, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Така нерівність виконується завдяки умовам, які задовольняє функція $v(t_1, t_2)$. На підставі (2) та нерівності трикутника для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справджуються співвідношення

$$\sup_{T \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{Z},\, \|x\|_{\mathfrak{M}^m} \le 1} \left\| v_{\varepsilon,T,p} Ax - A v_{\varepsilon,T,p} x \right\|_{\mathfrak{M}^0} \le$$

$$\le \sup_{\tau \in \mathbb{R},\, s \in \mathbb{Z},\, T \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{Z},\, \|x\|_{\mathfrak{M}^m} \le 1} \Big\| v(\varepsilon(\tau - T), \varepsilon(s - p))\,(Ax)(\tau, s) -$$

$$- \left(AQ_{k_\delta,\tau,s} v_{\varepsilon,T,p} x\right)(\tau, s) \Big\|_E + 2\delta \sup_{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2} |v(t_1, t_2)| \le$$

$$\le \sup_{\tau \in \mathbb{R},\, s \in \mathbb{Z},\, T \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{Z},\, \|x\|_{\mathfrak{M}^m} \le 1} \Big\| v(\varepsilon(\tau - T), \varepsilon(s - p))\,(Ax)(\tau, s) -$$

$$- v(\varepsilon(\tau - T), \varepsilon(s - p))\left(AQ_{k_\delta,\tau,s} x\right)(\tau, s) \Big\|_E +$$

$$+ \sup_{\tau \in \mathbb{R},\, s \in \mathbb{Z},\, T \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{Z},\, \|x\|_{\mathfrak{M}^m} \le 1} \left\| \left(AQ_{k_\delta,\tau,s} \omega_{\varepsilon,T,p,\tau,s} x\right)(\tau, s) \right\|_E + 2\delta \sup_{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2} |v(t_1, t_2)| \le$$

$$\le 3\delta \sup_{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2} |v(t_1, t_2)| + \sup_{\tau \in \mathbb{R},\, s \in \mathbb{Z},\, T \in \mathbb{R},\, p \in \mathbb{Z},\, \|x\|_{\mathfrak{M}^m} \le 1} \left\| \left(AQ_{k_\delta,\tau,s} \omega_{\varepsilon,T,p,\tau,s} x\right)(\tau, s) \right\|_E,$$

де

$$\omega_{\varepsilon,T,p,\tau,s} = \upsilon(\varepsilon(t-T),\varepsilon(n-p)) - \upsilon(\varepsilon(\tau-T),\varepsilon(s-p)). \tag{3}$$

Оскільки

$$(Q_{k_\delta,\tau,s}\omega_{\varepsilon,T,p,\tau,s}x)(t,n) = q\left(\frac{t-\tau}{k_\delta}\right)q\left(\frac{n-s}{k_\delta}\right)[\upsilon(\varepsilon(t-T),\varepsilon(n-p)) - $$
$$- \upsilon(\varepsilon(\tau-T),\varepsilon(s-p))]\,x(t,n),$$

то на підставі умов, що задовольняють функції $\upsilon(t_1,t_2)$ і $q(t)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{\tau\in\mathbb{R},\, s\in\mathbb{Z},\, T\in\mathbb{R},\, p\in\mathbb{Z},\, \|x\|_{\mathfrak{M}^m}\le 1}\left\|Q_{k_\delta,\tau,s}\omega_{\varepsilon,T,p,\tau,s}x\right\|_{\mathfrak{M}^m} = 0. \tag{4}$$

З (3), (4) і довільності вибору числа $\delta > 0$ випливає твердження леми 1.

Лема 2. *Якщо лінійний неперервний і рівномірно c-неперервний оператор $B:\mathfrak{M}^m \to \mathfrak{M}^0$ має обернений неперервний оператор B^{-1}, то оператор B^{-1} є рівномірно c-неперервним.*

Доведення. Припустимо, що оператор B^{-1} не є рівномірно c-неперервним. Існують послідовності $((\tau_k,p_k))_{k\ge 1}$, $\tau_k\in\mathbb{R}$, $p_k\in\mathbb{Z}$, і $(y_k)_{k\ge1}$, $y_k\in\mathfrak{M}^0$, $\|y_k\|_{\mathfrak{M}^m} = 1$, для яких

$$\lim_{k\to\infty}\left\|Q_{k,\tau_k,p_k}y_k\right\|_{\mathfrak{M}^0} = 0$$

і

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left\|Q_{k,\tau_k,p_k}B^{-1}y_k\right\|_{\mathfrak{M}^m} > 0.$$

Тут і далі $Q_{k,\tau,p}$ — оператор, що й в доведенні леми 1. Оскільки на підставі цієї леми

$$\lim_{k\to\infty}\left\|BQ_{k,\tau_k,p_k}B^{-1}y_k - Q_{k,\tau_k,p_k}y_k\right\|_{\mathfrak{M}^0} = 0,$$

то

$$\inf\left\{\|Bx\|_{\mathfrak{M}^0} : \|x\|_{\mathfrak{M}^m} = 1\right\} = 0,$$

що суперечить оборотності оператора B. Отже, припущення про те, що оператор B^{-1} не є рівномірно c-неперервним, є хибним.

Лему 2 доведено.

Зазначимо, що у випадку лінійних неперервних операторів, що діють із простору $C^m(\mathbb{R},E)$ у простір $C^0(\mathbb{R},E)$, твердження, аналогічні лемам 1 і 2, отримано автором відповідно в [5, 7].

4. Основні результати. Нехай ω і p — довільні відповідно додатне і натуральне числа. Позначимо через $\mathfrak{M}^m_{\omega,p}$ банахів простір усіх функцій $x\in\mathfrak{M}^m$, для кожної з яких

$$S_{\omega,0}x = x$$

і

$$S_{0,p}x = x,$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{M}^m_{\omega,p}} = \|x\|_{\mathfrak{M}^m}.$$

Зазначимо, що кожний елемент $x = x(t,n)$ простору $\mathfrak{M}^m_{\omega,p}$ є ω-періодичним за змінною t і p-періодичним за змінною n.

Аналогічним чином визначаємо банахів простір $\mathfrak{M}^0_{\omega,p}$.

Позначимо через Φ множину всіх функцій $\varphi \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, носії яких — обмежені множини.

Для кожних $\varphi \in \Phi$ і $k \in \mathbb{Z}$ розглянемо неперервний оператор $P_{\varphi,k} : \mathfrak{M}^0 \to \to \mathfrak{M}^0$, що визначається рівністю

$$(P_{\varphi,k}x)(t,n) = \begin{cases} \varphi(t)x(t,k), & \text{якщо } t \in \mathbb{R} \text{ і } n = k, \\ 0, & \text{якщо } t \in \mathbb{R} \text{ і } n \neq k. \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай*:

1) $A : \mathfrak{M}^m \to \mathfrak{M}^0$ — *лінійний неперервний майже періодичний і* c-*неперервний оператор*;

2) $P_{\varphi,k}A : \mathfrak{M}^m \to \mathfrak{M}^0$ — *цілком неперервний оператор для всіх* $(\varphi,k) \in \in \Phi \times \mathbb{Z}$.

Оператор $\dfrac{d^m}{dt^m} + A : \mathfrak{M}^m \to \mathfrak{M}^0$ *має обернений неперервний оператор тоді і тільки тоді, коли*

$$\inf_{\|x\|_{\mathfrak{M}^m}=1} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)x \right\|_{\mathfrak{M}^0} > 0. \tag{5}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо оператор $\dfrac{d^m}{dt^m} + A$ має обернений неперервний оператор, то завдяки рівності

$$\left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{M}^0,\mathfrak{M}^m)} = \left(\inf_{\|x\|_{\mathfrak{M}^m}=1} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)x \right\|_{\mathfrak{M}^0} \right)^{-1}$$

справджується співвідношення (5).

Достатність. Нехай виконується співвідношення (5). Розглянемо таку послідовність $((\omega_k, p_k))_{k\ge 1}$ елементів множини $(0,+\infty)\times\mathbb{N}$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k = \lim_{k\to\infty} p_k = +\infty$$

і

$$\lim_{l\to\infty} \left\| S_{\omega_k,p_k} A S_{-\omega_k,-p_k} - A \right\|_{L(\mathfrak{M}^m,\mathfrak{M}^0)} = 0. \tag{6}$$

Існування такої послідовності випливає з властивості в) та першої умови теореми. Визначимо оператор $A_k : \mathfrak{M}^m \to \mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}$, для якого

$$(A_k x)(t,n) = (Ax)(t,n),$$

якщо $(t,n) \in \left[\dfrac{1}{k}, \omega_k\right] \times ([1,p] \cap \mathbb{Z})$, і

$$(A_k x)(t,n) = (1-kt)(Ax)(t+\omega_k, n) + kt(Ax)(t,n),$$

якщо $(t, n) \in \left[0, \dfrac{1}{k}\right) \times \left([1, p] \bigcap \mathbb{Z}\right)$.

Завдяки (6) існують елементи $(\alpha_k, q_k) \in (0, \omega_k) \times \left([1, p_k] \bigcap \mathbb{N}\right)$, $k \ge 1$, для яких

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} q_k = +\infty \tag{7}$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\|x\|_{\mathfrak{M}^m_{\omega_k, p_k}} = 1} \max_{\substack{t\in[-\alpha_k, \omega_k] \\ n\in([-q_k, p_k]\bigcap\mathbb{Z})}} \left\| (A_k x)(t, n) - (Ax)(t, n) \right\|_E = 0. \tag{8}$$

Припустимо, що

$$\varliminf_{k\to\infty} \inf_{\|x\|_{\mathfrak{M}^m_{\omega_k, p_k}} = 1} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A_k \right) x \right\|_{\mathfrak{M}^0_{\omega_k, p_k}} = 0. \tag{9}$$

На підставі (8) існують послідовності $(k_l)_{l\ge1}$ і $(y_l)_{l\ge1}$ цілих чисел k_l, $k_l \ge l$, $l \in \mathbb{N}$, і функцій $y_l \in \mathfrak{M}^m_{\omega_{k_l}, p_{k_l}}$, $\|y_l\|_{\mathfrak{M}^m_{\omega_{k_l}, p_{k_l}}} = 1$, $l \in \mathbb{N}$, для яких

$$\lim_{l\to\infty} \max_{\substack{t\in[-\alpha_{k_l}, \omega_{k_l}] \\ n\in([-q_{k_l}, p_{k_l}]\bigcap\mathbb{Z})}} \left\| \left(\left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) y_l \right)(t, n) \right\|_E = 0. \tag{10}$$

Завдяки включенню $y_l \in \mathfrak{M}^m_{\omega_{k_l}, p_{k_l}}$ існує точка

$$(\tau_l, \nu_l) \in \left[-\frac{\alpha_{k_l}}{2}, \omega_{k_l} - \frac{\alpha_{k_l}}{2} \right] \times \left(\left[-\frac{q_{k_l}}{2}, p_{k_l} - \frac{q_{k_l}}{2} \right] \bigcap \mathbb{Z} \right),$$

для якої

$$\max \left\{ \| y_l(\tau_l, \nu_l) \|_E, \left\| \frac{dy_l(\tau_l, \nu_l)}{dt} \right\|_E, \ldots, \left\| \frac{d^m y_l(\tau_l, \nu_l)}{dt^m} \right\|_E \right\} = 1. \tag{11}$$

Розглянемо функцію

$$Q_l = q\left(\frac{2(t - \tau_l)}{\alpha_{k_l}} \right) q\left(\frac{2(n - \nu_l)}{q_{k_l}} \right),$$

де $q(t)$ — функція з доведення леми 1. З (10) випливає

$$\lim_{l\to\infty} \left\| Q_l \left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) y_l \right\|_{\mathfrak{M}^0_{\omega_{k_l}, p_{k_l}}} = 0,$$

а з леми 1, рівномірної c-неперервності оператора $\dfrac{d^m}{dt^m} + A$, що справджується завдяки першій умові теореми, і співвідношення (7) — рівність

$$\lim_{l\to\infty} \left\| Q_l \left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) y_l - \left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) Q_l y_l \right\|_{\mathfrak{M}^0_{\omega_{k_l}, p_{k_l}}} = 0.$$

Тоді

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\left(\frac{d^m}{dt^m}+A\right)Q_l y_l\right\|_{\mathfrak{M}^0_{\omega_{k_l},p_{k_l}}} = 0,$$

що суперечить (5), оскільки на підставі (11)

$$\lim_{l\to\infty}\|Q_l y_l\|_{\mathfrak{M}^0_{\omega_{k_l},p_{k_l}}} = 1.$$

Отже, припущення про виконання співвідношення (9) є хибним. Тому для деякого додатного числа γ

$$\varliminf_{k\to\infty}\inf_{\|x\|_{\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}}=1}\left\|\left(\frac{d^m}{dt^m}+A_k\right)x\right\|_{\mathfrak{M}^0_{\omega_k,p_k}} > \gamma^{-1}.$$

Без обмеження загальності можна вважати, що

$$\inf_{\|x\|_{\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}}=1}\left\|\left(\frac{d^m}{dt^m}+A_k\right)x\right\|_{\mathfrak{M}^0_{\omega_k,p_k}} > \gamma^{-1}, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

Покажемо, що

$$\left\{\left(\frac{d^m}{dt^m}+A\right)x : x\in\mathfrak{M}^m\right\} = \mathfrak{M}^0. \tag{13}$$

Зафіксуємо довільну функцію $f\in\mathfrak{M}^0$. Нехай $(f_k)_{k\geq 1}$ — послідовність функцій $f_k\in\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}$, $k\geq 1$, для якої

$$\|f_k\|_{\mathfrak{M}^0_{\omega_k,p_k}} \leq \|f\|_{\mathfrak{M}^0}, \quad k\geq 1, \tag{14}$$

і

$$f_k \xrightarrow{\text{лок.},\,\mathfrak{M}^0} f \quad \text{при} \quad k\to\infty. \tag{15}$$

Розглянемо рівняння

$$\frac{d^m x(t,n)}{dt^m} + (A_k x)(t,n) = f_k(t,n). \tag{16}$$

Це рівняння на підставі (12) та повної неперервності оператора $A_k : \mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}\to$ $\to\mathfrak{M}^0_{\omega_k,p_k}$ має єдиний розв'язок $x_k\in\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}$, до того ж

$$\|x_k\|_{\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}} \leq \gamma\|f\|_{\mathfrak{M}^0}, \quad k\geq 1. \tag{17}$$

Справді, задача про існування розв'язків рівняння (16) у просторі $\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}$ зводиться до дослідження рівняння

$$x(t,n) = \int_{\mathbb{R}} G(t-s)\big[Bx(s,n)-(A_k x)(s,n)\big]ds +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} G(t-s) f_k(s,n)ds, \quad (t,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \tag{18}$$

із цілком неперервним оператором $\mathcal{D}_k : \mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}\to\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}$, що визначається співвідношенням

$$(\mathcal{D}_k x)(t,n) \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}} G(t-s)\big[Bx(s,n)-(A_k x)(s,n)\big]ds, \quad (t,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}.$$

Тут B — такий елемент простору $L(E,E)$, що автономний оператор

$$\frac{d^m}{dt^m}+B:\; C^m(\mathbb{R},E) \;\to\; C^0(\mathbb{R},E)$$

має неперервний обернений, і $G(t)$ — функція Гріна оператора $\dfrac{d^m}{dt^m}+B$ [13]. Повна неперервність оператора $\mathcal{D}_k:\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}\to\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}$ випливає з того, що оператор $(\mathcal{T}_k x)(t,n) \;=\; Bx(t,n)-(A_k x)(t,n)$ є цілком неперервним елементом простору $L(\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k},\,\mathfrak{M}^0_{\omega_k,p_k})$ на підставі другої умови теореми. Завдяки повній неперервності оператора $\mathcal{D}_k$ рівняння (18) є фредгольмовим [14], тому на підставі (12) рівняння (18), а отже, і рівняння (16) для кожної функції $f_k\in\mathfrak{M}^0_{\omega_k,p_k}$ мають єдиний розв'язок $x_k\in\mathfrak{M}^m_{\omega_k,p_k}$.

Співвідношення (17) випливає із співвідношень (12), (14).

З (15) – (17), (8) і другої умови теореми випливає, що елементи множини

$$\bigcup_{k\ge1}\left\{x_k(t,n),\frac{dx_k(t,n)}{dt},\ldots,\frac{d^m x_k(t,n)}{dt^m}\right\}$$

рівностепенево неперервні по t на кожному відрізку $[-T,T]$, $T>0$, для всіх $n\in\mathbb{Z}$ і рівномірно обмежені на $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. Тому на підставі теореми Арцела [15] існують такі функції $u\in\mathfrak{M}^m$ і послідовність $(k_l)_{l\ge1}$ натуральних чисел $k_l\ge l$, $l\le1$, що

$$x_{k_l}\xrightarrow{\text{лок.},\,\mathfrak{M}^m} u \quad \text{при} \quad l\to\infty.$$

Тоді завдяки (15), (16), (8) і c-неперервності оператора A справджується рівність

$$\frac{d^m u}{dt^m}+Au \;=\; f,$$

що на підставі довільності вибору $f\in\mathfrak{M}^0$ доводить (13).

Із співвідношення (5), рівності (13) і теореми Банаха про обернений оператор [15] випливає, що оператор $\dfrac{d^m}{dt^m}+A$ має неперервний обернений $\left(\dfrac{d^m}{dt^m}+A\right)^{-1}$.

Достатність доведено.

Теорему 1 доведено.

Окремим випадком теореми 1 є така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $A:\mathfrak{M}^{m-1}\to\mathfrak{M}^0$ — *лінійний майже періодичний і* c-*неперервний оператор.*

Оператор $\dfrac{d^m}{dt^m}+A:\mathfrak{M}^m\to\mathfrak{M}^0$ *має обернений неперервний оператор тоді і тільки тоді, коли справджується співвідношення* (5).

5. Рівномірна c-неперервність і майже періодичність оператора $\left(\dfrac{d^m}{dt^m}+A\right)^{-1}$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *і оператор* $\frac{d^m}{dt^m} + A$: $\mathfrak{M}^m \to \mathfrak{M}^0$ *має обернений неперервний оператор* $\left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1}$.

Тоді оператор $\left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1}$ *є рівномірно* c*-неперервним, майже періодичним і*

$$\left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1} \mathfrak{B}^0 = \mathfrak{B}^m. \tag{19}$$

Доведення. Оператор $\left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1}$ рівномірно c-неперервний на підставі теореми 1 і леми 2.

Покажемо майже періодичність цього оператора.

Нехай $((\tau_k, p_k))_{k\geq 1}$ — довільна послідовність елементів множини $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$. Завдяки майже періодичності оператора A для деяких оператора $\tilde{A} \in \mathcal{H}(A)$ і підпослідовності $\left((\tau_{k_l}, p_{k_l})\right)_{k\geq 1}$ послідовності $((\tau_k, p_k))_{k\geq 1}$ справджується рівність

$$\lim_{l\to\infty} \left\| S_{\tau_{k_l}, p_{k_l}} A S_{-\tau_{k_l}, -p_{k_l}} - \tilde{A} \right\|_{L(\mathfrak{M}^m, \mathfrak{M}^0)} = 0. \tag{20}$$

Оскільки оператор $\frac{d^m}{dt^m} + A$ має неперервний обернений, то завдяки рівностям

$$\frac{d^m}{dt^m} + S_{\tau_{k_l}, p_{k_l}} A S_{-\tau_{k_l}, -p_{k_l}} = S_{\tau_{k_l}, p_{k_l}} \left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right) S_{-\tau_{k_l}, -p_{k_l}}$$

і (1) оператори $\frac{d^m}{dt^m} + S_{\tau_{k_l}, p_{k_l}} A S_{-\tau_{k_l}, -p_{k_l}}$, $l \geq 1$, також мають неперервні обернені і

$$\left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{M}^0, \mathfrak{M}^m)} = \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + S_{\tau_{k_l}, p_{k_l}} A S_{-\tau_{k_l}, -p_{k_l}}\right)^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{M}^0, \mathfrak{M}^m)}.$$

Тому на підставі (20) оператор $\frac{d^m}{dt^m} + \tilde{A}$ також має неперервний обернений і

$$\lim_{l\to\infty} \left\| S_{\tau_{k_l}, p_{k_l}} \left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1} S_{-\tau_{k_l}, -p_{k_l}} - \left(\frac{d^m}{dt^m} + \tilde{A}\right)^{-1} \right\|_{L(\mathfrak{M}^0, \mathfrak{M}^m)} = 0.$$

Отже, кожна послідовність $\left(S_{\tau_{k_l}, p_{k_l}} \left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1} S_{-\tau_{k_l}, -p_{k_l}} \right)_{k\geq 1}$ містить збіжну підпослідовність $\left(S_{\tau_{k_l}, p_{k_l}} \left(\frac{d^m}{dt^m} + \tilde{A}\right)^{-1} S_{-\tau_{k_l}, -p_{k_l}} \right)_{k\geq 1}$, тобто оператор $\left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1}$ є майже періодичниим.

Рівність (19) справджується завдяки властивості б) та майже періодичності операторів $\frac{d^m}{dt^m} + A$ і $\left(\frac{d^m}{dt^m} + A\right)^{-1}$.

Теорему 3 доведено.

6. Умова Фавара. У теоремах 1, 2 використано співвідношення (5). Е. Мухамадієвим в [1, 2] при дослідженні майже періодичних операторів використовувалась умова Фавара. Ця умова у випадку оператора $\dfrac{d^m}{dt^m} + A$ має вигляд

$$\ker\left(\frac{d^m}{dt^m} + \tilde{A}\right) = \{0\} \quad \text{для кожного} \quad \tilde{A} \in \mathcal{H}(A). \tag{21}$$

Тут $\ker\left(\dfrac{d^m}{dt^m} + \tilde{A}\right)$ — ядро оператора $\dfrac{d^m}{dt^m} + \tilde{A}$.

Теорема 4. *Для майже періодичного і c-неперервного оператора $A \in \in L(\mathfrak{M}^m, \mathfrak{M}^0)$ виконання співвідношення* (5) *рівносильне виконанню умови Фавара* (21).

Доведення. Оскільки для довільних точки $(\tau, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ і функцій $x \in \mathfrak{M}^m$, $y \in \mathfrak{M}^0$ справджуються рівності

$$\left\| S_{-\tau,-p} x \right\|_{\mathfrak{M}^m} = \| x \|_{\mathfrak{M}^m}$$

і

$$\left\| S_{\tau,p} y \right\|_{\mathfrak{M}^0} = \| y \|_{\mathfrak{M}^0},$$

то

$$\left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + S_{\tau,p} A S_{-\tau,-p} \right) x \right\|_{\mathfrak{M}^0} =$$

$$= \left\| S_{\tau,p} \left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) S_{-\tau,-p}\, x \right\|_{\mathfrak{M}^0} = \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) S_{-\tau,-p}\, x \right\|_{\mathfrak{M}^0}$$

і

$$\inf_{\| x \|_{\mathfrak{M}^m} = 1} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + S_{\tau,p} A S_{-\tau,-p} \right) x \right\|_{\mathfrak{M}^0} = \inf_{\| x \|_{\mathfrak{M}^m} = 1} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) x \right\|_{\mathfrak{M}^0}.$$

Тому завдяки довільності вибору точки $(\tau, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ та визначенню множини $\mathcal{H}(A)$

$$\inf_{\| x \|_{\mathfrak{M}^m} = 1} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + \tilde{A} \right) x \right\|_{\mathfrak{M}^0} = \inf_{\| x \|_{\mathfrak{M}^m} = 1} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) x \right\|_{\mathfrak{M}^0}, \qquad \tilde{A} \in \mathcal{H}(A).$$

Звідси випливає, що якщо виконується співвідношення (5), то виконується і співвідношення (21).

Припустимо, що співвідношення (5) не виконується, тобто

$$\inf_{\| x \|_{\mathfrak{M}^m} = 1} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) x \right\|_{\mathfrak{M}^0} = 0.$$

Існує така послідовність $(x_k)_{k \ge 1}$, $\| x_k \|_{\mathfrak{M}^m} = 1$, $k \ge 1$, що

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + A \right) x_k \right\|_{\mathfrak{M}^0} = 0. \tag{22}$$

Розглянемо послідовність $((\tau_k, p_k))_{k\geq 1}$, $(\tau_k, p_k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, $k \geq 1$, для якої

$$\max\left\{ x(\tau_k, p_k), \frac{dx(\tau_k, p_k)}{dt}, \ldots, \frac{d^m x(\tau_k, p_k)}{dt^m} \right\} \geq \frac{1}{2}. \tag{23}$$

Без порушення загальності можна вважати, що

$$\lim_{k\to\infty} \left\| S_{\tau_k, p_k} A S_{-\tau_k, -p_k} - \tilde{A} \right\|_{L(\mathfrak{M}^m, \mathfrak{M}^0)} = 0 \tag{24}$$

для деякого $\tilde{A} \in \mathcal{H}(A)$. Тоді на підставі (22) і (24) для функцій

$$y_k(t, n) \overset{\text{df}}{=} x(t + \tau_k, n + p_k), \quad k \geq 1,$$

виконується співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + \tilde{A} \right) y_k \right\|_{\mathfrak{M}^0} = 0.$$

За допомогою міркувань, використаних у доведенні теореми 1, робимо висновок, що існують функція $u \in \mathfrak{M}^m$ і послідовність $(k_l)_{k\geq 1}$ натуральних чисел, для яких

$$k_l \geq l, \quad l \geq 1,$$

і

$$y_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.}, \mathfrak{M}^m} u \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Тому

$$\left(\frac{d^m}{dt^m} + \tilde{A} \right) u = 0$$

і, отже,

$$\ker\left(\frac{d^m}{dt^m} + \tilde{A} \right) \neq \{0\},$$

оскільки завдяки (23)

$$\| u \|_{\mathfrak{M}^m} \geq \frac{1}{2}.$$

Таким чином, якщо не виконується співвідношення (5), то не виконується і співвідношення (21).

Теорему 4 доведено.

7. Застосування теорем 1, 3 і 4. Наведемо приклади застосування отриманих результатів до дослідження зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь та диференціально-різницевих рівнянь.

***Приклад* 1.** Нехай $A_{n,k}(t)$, $n, k \in \mathbb{Z}$, — визначені на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(E, E)$, для яких:

1) $\sup\limits_{(t,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\| A_{n,k}(t) \right\|_{L(E,E)} < +\infty;$

2) $\lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}, t\in\mathbb{R}} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\| A_{n,k}(t+\delta) - A_{n,k}(t) \right\|_{L(E,E)} = 0;$

3) для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $l(\varepsilon) > 0$, що кожна множина

$[t_0, t_0 + l(\varepsilon)] \times ([m_0, m_0 + l(\varepsilon)] \cap \mathbb{Z})$ містить точку (τ, m), для якої

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}, t\in\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| A_{n+m,k}(t+\tau) - A_{n,k}(t) \right\|_{L(E,E)} < \varepsilon.$$

Визначимо лінійний оператор $A : \mathfrak{M}^0 \to \mathfrak{M}^0$ рівністю

$$(Ax)(t,n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_{n,k}(t) x(t, n+k), \quad (t,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}. \tag{25}$$

Завдяки виконанню для $A_{n,k}(t) \in L(E,E)$, $n, k \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$, умов 1 – 3 $Ax \in \mathfrak{M}^0$ для кожного $x \in \mathfrak{M}^0$, і оператор A є неперервним, майже періодичним і c-неперервним. Тому теореми 1 і 3 можна застосувати до дослідження зліченної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_{n,k}(t) x_{n+k}(t) + f_n(t), \qquad n\in\mathbb{Z}, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{26}$$

де f_n, $n \in \mathbb{Z}$, — елементи простору $C^0(\mathbb{R}, E)$, що задовольняють умову

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \| f_n \|_{C^0(\mathbb{R},E)} < +\infty. \tag{27}$$

Теорема 5. *Якщо для оператора* A, *що визначається рівністю* (25), *виконується співвідношення*

$$\inf_{\|x\|_{\mathfrak{M}^1}=1} \left\| \left(\frac{d}{dt} + A \right) x \right\|_{\mathfrak{M}^0} > 0,$$

то для функцій $f_n \in C^0(\mathbb{R}, E)$, $n \in \mathbb{Z}$, *для яких справджується співвідношення* (27), *система рівнянь* (26) *має єдиний розв'язок* $x_n \in C^1(\mathbb{R}, E)$, $n \in \mathbb{Z}$, *для якого*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \| x_n \|_{C^1(\mathbb{R},E)} < +\infty,$$

до того ж функція $x(t,n) \overset{\mathrm{df}}{=} x_n(t)$ *є елементом простору* $\mathfrak{B}^1$, *якщо функція* $f(t,n) \overset{\mathrm{df}}{=} f_n(t)$ *є елементом простору* $\mathfrak{B}^0$.

Ця теорема є наслідком теорем 1 і 3.

Зазначимо, що теорема 5 є узагальненням теореми Фавара про майже періодичні розв'язки скінченних систем лінійних диференціальних рівнянь із майже періодичними коефіцієнтами [16].

***Приклад* 2.** Нехай $B_{n,k,p}(t)$, n, k, $p \in \mathbb{Z}$, — визначені на $\mathbb{R}$ функції зі значеннями в $L(E,E)$, для яких:

1) $\displaystyle\sup_{(t,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left\| B_{n,k,p}(t) \right\|_{L(E,E)} < +\infty;$

2) $\displaystyle\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\in\mathbb{Z}, t\in\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left\| B_{n,k,p}(t+\delta) - B_{n,k,p}(t) \right\|_{L(E,E)} = 0;$

3) для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $l(\varepsilon) > 0$, що кожна множина $[t_0, t_0 + l(\varepsilon)] \times ([\nu_0, \nu_0 + l(\varepsilon)] \cap \mathbb{Z})$ містить точку (τ, ν), для якої

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{R}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left\| B_{n+\nu,k,p}(t+\tau) - B_{n,k,p}(t) \right\|_{L(E,E)} < \varepsilon.$$

Розглянемо довільні дійсні числа Δ_p, $p \in \mathbb{Z}$, і визначимо лінійний оператор $B: \mathfrak{M}^0 \to \mathfrak{M}^0$ рівністю

$$(Bx)(t,n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} B_{n,k,p}(t)x(t+\Delta_p, n+k), \quad (t,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}. \tag{28}$$

Завдяки виконанню для $B_{n,k,p}(t) \in L(E,E)$, $n,k,p \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$, умов 1 – 3 банахів простір $\mathfrak{M}^0$ іваріантний по відношенню до оператора B, і цей оператор є неперервним, майже періодичним і c-неперервним. Очевидно, що теореми 1 і 3 можна застосувати до дослідження зліченної системи диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{d^m x_n(t)}{dt^m} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} B_{n,k,p}(t) x_{n+k}(t+\Delta_p) + f_n(t), \qquad n\in\mathbb{Z}, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{29}$$

де f_n, $n \in \mathbb{Z}$, — елементи простору $C^0(\mathbb{R},E)$, що задовольняють умову (27), і $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 6. *Якщо для оператора* B, *що визначається рівністю* (28), *виконується співвідношення*

$$\inf_{\|x\|_{\mathfrak{M}^m}=1} \left\| \left(\frac{d^m}{dt^m} + B \right) x \right\|_{\mathfrak{M}^0} > 0,$$

то для функцій $f_n \in C^0(\mathbb{R},E)$, $n\in\mathbb{Z}$, *для яких справджуєтся співвідношення* (27), *система рівнянь* (29) *має єдиний розв'язок* $x_n \in C^m(\mathbb{R},E)$, $n\in\mathbb{Z}$, *для якого*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \| x_n \|_{C^m(\mathbb{R},E)} < +\infty.$$

Якщо функція $f(t,n) \overset{\mathrm{df}}{=} f_n(t)$ *є елементом простору* $\mathfrak{B}^0$, *то функція* $x(t,n) \overset{\mathrm{df}}{=} x_n(t)$ *є елементом простору* $\mathfrak{B}^m$.

Ця теорема, як і теорема 5, також є наслідком теорем 1 і 3.

***Приклад* 3.** Розглянемо оператори $C_{k,p} \in L(E,E)$, k, $p \in \mathbb{Z}$, для яких

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left\| C_{k,p} \right\|_{L(E,E)} < +\infty,$$

і довільні дійсні числа Δ_p, $p \in \mathbb{Z}$. Визначимо лінійний оператор $C: \mathfrak{M}^0 \to \mathfrak{M}^0$ рівністю

$$(Cx)(t,n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} C_{k,p} x(t+\Delta_p, n+k), \quad (t,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}.$$

Цей оператор, очевидно, автономний, неперервний і c-неперервний. Оскільки $\mathcal{H}(C) = \{C\}$, то завдяки теоремам 1, 3 і 4 для системи рівнянь

$$\frac{d^m x_n(t)}{dt^m} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}} C_{k,p}x_{n+k}(t+\Delta_p) + f_n(t),$$
$$n\in\mathbb{Z}, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{30}$$

де f_n, $n\in\mathbb{Z}$, — елементи простору $C^0(\mathbb{R}, E)$, що задовольняють умову (27), і $m\in\mathbb{N}$, справджується така теорема.

Теорема 7. *Якщо лінійна однорідна система рівнянь*

$$\frac{d^m x_n(t)}{dt^m} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{p\in\mathbb{Z}} C_{k,p}x_{n+k}(t+\Delta_p),$$
$$n\in\mathbb{Z}, \quad t\in\mathbb{R},$$

має лише нульовий розв'язок, то для функцій $f_n\in C^0(\mathbb{R}, E)$, $n\in\mathbb{Z}$, *що задовольняють* (27), *система рівнянь* (30) *має єдиний розв'язок* $x_n\in C^m(\mathbb{R}, E)$, $n\in\mathbb{Z}$, *для якого*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\| x_n \|_{C^m(\mathbb{R},E)} < +\infty,$$

до того ж функція $x(t,n) \overset{\mathrm{df}}{=} x_n(t)$ *є елементом простору* $\mathfrak{B}^1$, *якщо функція* $f(t,n) \overset{\mathrm{df}}{=} f_n(t)$ *є елементом простору* $\mathfrak{B}^0$.

1. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. – 1972. – **11**, № 3. – С. 269 – 274.
2. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Душанбе, 1978. – 289 с.
3. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116**, № 4. – С. 483 – 501.
4. *Слюсарчук В. Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 8. – С. 34 – 37.
5. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130**, № 1. – С. 86 – 104.
6. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262 – 267.
7. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201 – 205.
8. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-т, 1990. – 168 с.
9. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1993. – 255 с.
10. *Слюсарчук В. Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений. – Душанбе, 1987. – С. 102 – 103.
11. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1991. – Вып. 15. – С. 32 – 35.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Оборотність нелінійних різницевих операторів. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2006. – 233 с.
13. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
14. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
15. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
16. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

Одержано 09.07.07