УДК 517.947

И. В. Алиев (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТИПА БИЦАДЗЕ – САМАРСКОГО

We investigate the summability of a system of eigenfunctions and associated functions of the Bitsadze – Samarskii-type boundary-value problems for elliptic equations in a rectangular by the Abel method. These problems can be reduced to the boundary-value problem for elliptic operator differential equations with an operator under boundary conditions in the corresponding spaces. We investigate these problems by the method of operator differential equations.

Досліджується сумовність за методом Абеля системи власних і приєднаних функцій крайових задач типу Біцадзе – Самарського для еліптичних рівнянь у прямокутнику. Такі задачі зводяться до крайової задачі для еліптичних диференціально-операторних рівнянь з оператором у крайових умовах у відповідних просторах і досліджуються методом диференціально-операторних рівнянь.

В работе [1] доказано существование и единственность классического решения эллиптического уравнения второго порядка в прямоугольнике с нелокальными краевыми условиями. Полнота краевых функций задачи Бицадзе – Самарского в n-мерном случае изучена в работе [2], а в работе [3] доказана нетеровость эллиптических уравнений $2m$-го порядка с краевыми условиями типа Бицадзе – Самарского.

Разрешимость, а также некоторые спектральные вопросы краевой задачи для дифференциально-операторных уравнений второго порядка в случае, когда коэффициенты краевых условий — линейные операторы, изучены в работах [4 – 10].

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Через $L_p\big((0,1),H\big)$ обозначим банахово пространство функций $x \to u(x)\colon\ (0,1) \to H$, сильно измеримых и суммируемых в p-й степени с нормой

$$\|u\|^p_{L_p((0,1),H)} = \int_0^1 \|u(x)\|^p_H \, dx < \infty .$$

Пусть H, H_1 — два гильбертовых пространства. Через $B(H, H_1)$ и $\sigma_\infty(H, H_1)$ обозначим соответственно класс ограниченных и вполне непрерывных операторов, действующих из H в H_1:

$$B(H,H) = B(H), \qquad \sigma_\infty(H,H) = \sigma_\infty(H).$$

Пусть $A \in \sigma_\infty(H, H_1)$. Тогда $A^* \in \sigma_\infty(H_1, H)$. Значит, оператор $T = (A^* A)^{\frac{1}{2}}$ принадлежит $\sigma_\infty(H)$ и неотрицателен. Собственные числа оператора T называются s-числами оператора A, т. е. $s_j(A, H, H_1) = \lambda_j(T)$, $j = 1 \div \infty$, где нумерация выполнена по невозрастанию.

Обозначим через $\sigma_q(H, H_1)$, $q > 0$, множество операторов A, действующих вполне непрерывно из H в H_1, для которых $\sum_{j=1}^{\infty} s_j^q(A, H, H_1) < \infty$.

Оператор вложения из одного гильбертова пространства в другое обозначим через J.

Определение 1. *Линейный замкнутый оператор A называется сильно позитивным в H, если область определения $D(H)$ плотна в H, при некотором $\delta \in (0, \pi)$ все точки из угла $|arg\,\lambda| \geq \delta$ принадлежат резольвентному множеству и резольвента удовлетворяет оценке*

$$\left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\| \leq c(1 + |\lambda|)^{-1}.$$

Отметим, что из сильной позитивности оператора A следует сильная позитивность оператора A^α, $\alpha \in (0, 1)$.

Пусть A сильно позитивен в H. Тогда $H(A^a) = \{u: u \in D(A^a),\ \|u\|_{H(A^a)} = \|A^a u\|_H,\ a \geq 0\}$ — гильбертово пространство.

Определение 2. *Пусть A — производящий оператор аналитической при $t > 0$ полугруппы e^{-tA}, убывающей на бесконечности. Тогда*

$$\left(H, H(A^n)\right)_{\theta, p} = \left\{ u\colon\ u \in H, \|u\|^p_{(H, H(A^n))} = \int_0^\infty t^{(1-\theta)p-1} \left\| A^n e^{-tA} u \right\|_H^p dt < \infty \right\},$$

где $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, n — натуральное число.

Через

$$W_p^n\left((0,1), H(A^n), H\right) = \left\{ u\colon\ A^n u \in L_p((0,1), H), u^{(n)} \in L_p((0,1), H) \right\}$$

обозначим пространство вектор-функций с нормой

$$\|u\|_{W_p^n((0,1), H(A^n), H)} = \left\| A^n u \right\|_{L_p((0,1), H)} + \left\| u^n \right\|_{L_p((0,1), H)}.$$

Известно [10, с. 46], что если $u \in W_p^n((0,1),\ H(A^n),\ H)$, то $u^{(j)}(0) \in \left(H, H(A^n)\right)_{(n-j-1/2)/n, p}$, $j = 0 \div (n-1)$.

Пусть $Ff = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\sigma} f(x)\, dx$ — преобразование Фурье.

Определение 3. *Отображение $\sigma \to T(\sigma)\colon R \to B(H)$ называется мультипликатором Фурье типа (p, q), если*

$$\left\| F^{-1} T F f \right\|_{L_q(R,H)} \leq c \|f\|_{L_p(R,H)}, \quad f \in L_p(R, H).$$

Известно [10, с. 196], что если отображение $\sigma \to T(\sigma)$ непрерывно дифференцируемо и

$$\|T(\sigma)\| \leq C, \qquad \|T'(\sigma)\| \leq \mathrm{C}|\sigma|^{-1}, \quad \sigma \in R, \quad \sigma \neq 0,$$

то $T(\sigma)$ является мультипликатором Фурье типа (p, q) (теорема Михлина – Шварца).

Пусть $f \in H$. Рассмотрим ряд $\sum_s c_s(t) e_s$. Здесь $c_s(t)$ зависит от t и определяется следующим образом. Если e_s — собственный вектор оператора T, соответствующий характеристическому числу λ_p, и оператор T не имеет присоединенного вектора, то

$$c_s(t) = e^{-\lambda_p^\delta t} c_s,$$

где $\lambda^\delta = |\lambda|^\delta e^{\delta i \arg \lambda}$, $\delta > 0$, c_s — коэффициент нормального разложения вектора f по системе $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Если же $e_s, \ldots, e_{s+j}$ образуют жорданову цепочку, то $c_{s+i}(t)$, $i = 0, 1, \ldots, j$, — коэффициенты разложения вычета подынтегральной функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_p} e^{-\lambda^\delta t} T(I - \lambda T)^{-1} f \, d\lambda$$

по векторам $e_s, \ldots, e_{s+j}$, где γ_p — замкнутый контур, охватывающий только λ_p.

Определение 4. *Ряд, соответствующий f, суммируется к f по методу Абеля порядка σ, если для этого ряда существует подпоследовательность частичных сумм S_{N_ν}, сходящаяся в H при всех t, такая, что*

$$u(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{s=N_{\nu+1}}^{N_{\nu+1}} c_s(t) e_s \right), \quad \lim_{t \to +0} u(t) = f.$$

В пространстве $L_p((0,1), H)$ рассмотрим следующую краевую задачу:

$$(L - \lambda I)u = -u''(x) + (A - \lambda I)u(x) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} L_1 u &= u(0) + B_1 u(\xi_1) = f_1, \\ L_2 u &= u(1) + B_2 u(\xi_2) = f_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $x \in (0,1)$, ξ_1, $\xi_2 \in (0,1)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) A — *сильно позитивный оператор в* H;

2) *оператор* B_i, $i = 1, 2$, *ограниченно действует из* H *в* H *и из* $H(A)$ *в* $H(A)$;

3) $f_i \in (H, H(A))_{\frac{2p-1}{2p}, p}$, $i = 1, 2$.

Тогда задача (1), (2) *при достаточно больших* $|\lambda|$, *удовлетворяющих условию* $|\arg \lambda| \geq \delta$, *имеет единственное решение*

$$u \in W_p^2((0,1), \ H(A), H).$$

Доказательство. Известно (см. [11, с. 72]), что решение уравнения (1), принадлежащее $W_p^2((0,1), H(A), H)$, имеет вид

$$u(x) = e^{-x A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + e^{-(1-x) A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получаем следующую систему для определения элементов g_1 и g_2:

$$
\begin{aligned}
&g_1 + e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2 + B_1\left[e^{-\xi_1 A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2\right] = f_1, \\
&e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + g_2 + B_2\left[e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + e^{-(1-\xi_2)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2\right] = f_2.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Из (4) находим

$$
g_1 = \left[I + S_1(\lambda) + (I + S_1(\lambda))\left(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_1 e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)\times\right.
$$

$$
\left.\times (I + S(\lambda))\left(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_2 e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)(I + S_1(\lambda))\right] f_1 +
$$

$$
+\left[I + S(\lambda) - (I + S_1(\lambda))\left(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_1 e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)(I + S(\lambda))\right] f_2, \tag{5}
$$

$$
g_2 = -(I + S(\lambda))\left(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_2 e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)(I + S_1(\lambda)) f_1 + (I + S(\lambda)) f_2, \tag{6}
$$

где

$$
(I + S_1(\lambda)) = \left(I + B_1 e^{-\xi_1 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1},
$$

$$
I + S(\lambda) = \left[I + B_2 e^{-(1-\xi_2)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} - \left(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_2 e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)\times\right.
$$

$$
\left.\times (I + S_1(\lambda))\left(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_1 e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)\right]^{-1}.
$$

Известно, что если A сильно позитивен, то

$$
\left\| e^{-xA_\lambda^{\frac{1}{2}}} \right\| \le c e^{-\beta\sqrt{|\lambda|}x}, \quad |\arg\lambda| \ge \delta, \quad \beta > 0, \quad x > 0. \tag{7}
$$

Поскольку при достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \ge \delta$ в силу условия 2 и оценки (7)

$$
\left\| B_i e^{-\xi A_\lambda^{\frac{1}{2}}} \right\| \le c e^{-\beta\sqrt{|\lambda|}x} \to 0, \quad 0 < \xi < 1,
$$

то

$$
S_1(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[B_i e^{-\xi_1 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right]^k, \tag{8}
$$

$$S(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[B_2 e^{-(1-\xi_2)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} - \left(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_2 e^{-\xi_2 A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(I + S_1(\lambda)\right)\left(e^{-A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + B_1 e^{-(1-\xi_1)A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right)\right]^k.$$

Ряды в правых частях равенств (8) сходятся по норме пространства $B(H)$.

Докажем, что элементы g_1 и g_2, определенные формулами (5), (6), принадлежат $(H, H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}$. Докажем это, например, для g_2. Для этого достаточно показать, что операторы $S(\lambda)$ и $S_1(\lambda)$ ограниченно действуют из $(H, H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}$ в $(H, H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}$.

Оператор $S_1(\lambda)$ ограниченно действует из H в H. С другой стороны, оператор $S_1(\lambda)$ ограниченно действует из $H(A)$ в $H(A)$, что следует из условия 2 и оценки (7). Тогда в силу интерполяционной теоремы [12, с. 24] оператор $S_1(\lambda)$ действует ограниченно в пространстве $(H, H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}$ и имеет место оценка

$$\|S_1(\lambda)\|_{B(H,\,H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}} \le C\|S_1(\lambda)\|_{B(H(A))}^{\frac{2p-1}{2p}}\|S_1(\lambda)\|_{B(H)}^{\frac{2p-1}{2p}} \le q < 1, \tag{9}$$

$$|\arg\lambda| \ge \delta, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Аналогично можно показать, что оператор $S(\lambda)$ ограниченно действует в пространстве $(H, H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}$ и оценка (9) имеет место и для оператора $S(\lambda)$.

Из (6) в силу условия 2 и оценок (7), (9) получаем

$$\begin{gathered}\|g_2\|_{(H,\,H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}} \le C\left(\|f_1\|_{(H,\,H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}} + \|f_2\|_{(H,\,H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}}\right),\\ |\lambda| \to \infty, \quad |\arg\lambda| \ge \delta.\end{gathered} \tag{10}$$

Аналогично можно показать, что

$$\|g_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \le C\left(\|f_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|f_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}\right), \quad |\lambda| \to \infty, \quad |\arg\lambda| \ge \delta. \tag{11}$$

Теорема 1 доказана.

В пространстве $L_p((0,1), H)$ рассмотрим оператор L, определенный равенствами

$$D(L) = W_p^2\left((0,1),\ H(A), H, L_\nu u\big|_{\nu=1}^2 = 0\right),$$

$$Lu = -u''(x) + Au(x),$$

где

$$L_1 u = u(0) + B_1 u(\xi_1), \qquad L_2 u = u(1) + B_2 u(\xi_2), \quad \xi_i \in (0,1), \quad i = 0, 1.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) A — *сильно позитивный оператор в* H;

2) *оператор* B_i, $i = 1, 2$, *ограниченно действует из* H *в* H *и из* $H(A)$ *в* $H(A)$.

Тогда при некотором $r > 0$ *все точки комплексной плоскости из угла* $|\arg\lambda| \geq \delta$, *по модулю больше* r, *принадлежат резольвентному множеству оператора* L *и справедлива оценка*

$$\| R(\lambda, L)\| = \left\|(L-\lambda I)^{-1}\right\| \leq c|\lambda|^{-1}.$$

Доказательство. Уравнение $(L - \lambda I)u = f$ эквивалентно задаче

$$-u''(x) + (A - \lambda I)u(x) = f(x), \tag{12}$$

$$L_\nu u = 0, \quad \nu = 1, 2. \tag{13}$$

Решение задачи (12), (13) представляется в виде суммы $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, где $u_1(x)$ — сужение на $[0,1]$ решения уравнения

$$-\tilde{u}''(x) + (A - \lambda I)\tilde{u}_1(x) = f(x) \tag{14}$$

на всей оси,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0,1], \\ 0, & x \,\overline{\in}\, [0,1], \end{cases}$$

а $u_2(x)$ — решение задачи

$$-u_2''(x) + (A - \lambda I)u_2(x) = 0, \tag{15}$$

$$L_\nu u_2 = -L_\nu u_1, \quad \nu = 1, 2. \tag{16}$$

Покажем, что решение $\tilde{u}_1(x)$ уравнения (14) принадлежит $W_p^2(R, H(A), H)$. Применив к уравнению (14) преобразование Фурье, получим

$$F\tilde{u}_1 = \left[A - \left(\lambda - \sigma^2\right)I\right]^{-1} Ff\,.$$

Ясно, что если λ находится в угле $|\arg\lambda| > \delta$, то $\lambda - \sigma^2$ также находится в этом угле. Поэтому в угле $|\arg\lambda| \geq \delta$ имеет место оценка

$$\left\|\left[A - \left(\lambda - \sigma^2\right)I\right]^{-1}\right\| \leq C\left(1 + \left(\lambda - \sigma^2\right)\right)^{-1} \leq C\left(1 + |\lambda| + \sigma^2\right)^{-1}.$$

Тогда

$$\|A_\lambda \tilde{u}_1\|_{L_p((0,1),H)} \leq \|A_\lambda \tilde{u}_1\|_{L_p(R,H)} = \left\|F^{-1}A_\lambda\left[A - \left(\lambda - \sigma^2\right)I\right]^{-1}F\tilde{f}\right\|_{L_p(R,H)}. \tag{17}$$

Очевидно, что $T_1(\sigma) = A_\lambda\left[A - \left(\lambda - \sigma^2\right)I\right]^{-1}$ — мультипликатор Фурье типа (p, p). Поэтому к $T_1(\sigma)$ применима теорема Михлина – Шварца. Тогда из (17) имеем

$$\|A_\lambda u_1\|_{L_p((0,1),H)} \leq C\|\tilde{f}\|_{L_p(R,H)} = C\|f\|_{L_p((0,1),H)}. \tag{18}$$

С другой стороны,

$$\|u_1''\|_{L_p((0,1),H)} \leq \|\tilde{u}_1''\|_{L_p(R,H)} = \left\|F^{-1}\sigma^2\left[A - \left(\lambda - \sigma^2\right)I\right]^{-1}Ff\right\|_{L_p(R,H)}.$$

Можно легко показать, что $T_2(\sigma) = \sigma^2\left[A\left(\lambda - \sigma^2\right)\mathrm{I}\right]^{-1}$ также является мультипликатором Фурье типа (p, p), т. е.

$$\|u_1''\|_{L_p((0,1),H)} \le C\|f\|_{L_p((0,1),H)}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует, что

$$\|u_1\|_{W_p^2((0,1),H(A),H)} \le C\|f\|_{L_p((0,1),H)}. \tag{20}$$

Итак, сужение $\tilde{u}_1(x)$ на $[0,1]$ принадлежит $W_p^2\big((0,1),H(A),H\big)$ и $u_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\tilde{u}_1''(x) + (A - \lambda J)u_1(x) = f(x), \quad x \in [0,1].$$

Теперь оценим решение задачи (15), (16). Из теоремы о следах [12, с. 46] следует, что $L_1u_1,\ L_2u_1 \in (H, H(A))_{\frac{2p-1}{2p},p}$. Тогда в силу теоремы 1 эта задача при достаточно больших $|\lambda|$ из угла $|\arg\lambda| \ge \delta$ имеет единственное решение $u_2 \in W_p^2\big((0,1), H(A), H\big)$ и справедлива оценка

$$\|u_2\|_{L_p((0,1),H)} \le C|\lambda|^{-1}\left(\|g_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|g_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}\right). \tag{21}$$

С другой стороны, в силу (10), (11)

$$\|g_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|g_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \le C\left(\|L_1u_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|L_2u_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}\right). \tag{22}$$

Используя оценку (20), в силу [12, с. 46] получаем

$$\|L_1u_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \le C\|f\|_{L_p((0,1),H)}, \tag{23}$$

$$\|L_2u_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \le C\|f\|_{L_p((0,1),H)}, \tag{24}$$

$$H_\theta = (H, H(A))_{\theta,p}.$$

Учитывая оценки (23), (24), из (22) находим

$$\|g_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} + \|g_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}} \le C\|f\|_{L_p((0,1),H)}. \tag{25}$$

Тогда из (21) и (25) имеем

$$\|u_2\|_{L_p((0,1),H)} \le C|\lambda^{-1}|\|f\|_{L_p((0,1),H)}.$$

Отсюда с учетом (18) следует, что

$$\|u\|_{L_p((0,1),H)} \le C|\lambda^{-1}|\|f\|_{L_p((0,1),H)}.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие. *При условиях теоремы* 1 *задача* (12), (13) *коэрцитивно разрешима в пространстве* $L_p((0,1),H)$, *т.е. при достаточно больших* $|\lambda|$ *из угла* $|\arg\lambda|\geq\delta$ *и при любом* $f\in L_p((0,1),H)$, $f_i\in H_{\frac{2p-1}{2p}}$, $i=1,2$, *задача* (12), (13) *имеет единственное решение* $u\in W_p^2\big((0,1),H(A),H\big)$ *и справедлива оценка*

$$\|u''\|_{L_p((0,1),H)}+\|Au\|_{L_p((0,1),H)}+|\lambda|\|u\|_{L_p((0,1),H)}\leq$$

$$\leq C\left(\|f\|_{L_p((0,1),H)}+\|f_1\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}+\|f_2\|_{H_{\frac{2p-1}{2p}}}\right).$$

Теорема 3. *Пусть*:

1) A — *сильно позитивный оператор в* H *и при некотором* $p_0>0$ $A^{-1}\in\sigma_{p_0}(H)$;

2) *оператор* B_i *ограниченно действует из* H *в* H *и из* $H(A)$ *в* $H(A)$.

Тогда $R(\lambda,L)\in\sigma_q\big(L_2(0,1),H\big)$ *при* $q>\dfrac{1+2p_0}{2}$.

Доказательство. Обозначим через S_1 такой самосопряженный положительно определенный оператор в $L_2(0,1)$, для которого $D(S_i)=W_2^2(0,1)$. Такой оператор существует (см., например, [12, с. 468]), и для собственных чисел верна оценка $c_1k^2\leq\lambda_k(S_1)\leq c_2k^2$.

Через S_2 обозначим в H такой самосопряженный положительно определенный оператор, для которого $D(S_2)=H(A)$. Поскольку $A^{-1}\in\sigma_{p_0}(H)$, то и $S_2^{-1}\in\sigma_{p_0}(H)$. Отсюда следует, что для собственных чисел выполняется неравенство

$$\mu_n(S_2)\;>\;cn^{\frac{1}{p_0}}.$$

Собственные элементы оператора S_1 обозначим через $\varphi_k(x)$, а собственные элементы оператора S_2 — через e_n:

$$(S_1\varphi_k)(x)\;=\;\lambda_k\varphi_k(x),\qquad S_2e_n\;=\;\mu_ne_n.$$

Тогда $\varphi_k(x)e_n$ образует базис $L_2((0,1),H)$. В пространстве $L_2((0,1),H)$ определим оператор

$$\wedge u\;=\;\sum_{k,n=1}^{\infty}(1+\lambda_k+\mu_n)a_{k,n}\varphi_k(x)e_n,\qquad u\;=\;\sum_{k,n=1}^{\infty}a_{k,n}\varphi_k(x)e_n.$$

Оператор $\wedge$ ограниченно действует из $W_2^2\big((0,1),H(A),H\big)$ в $L_2((0,1),H)$. Тогда оператор $F=\wedge R(\lambda,L)$ является ограниченным оператором в $L_2((0,1),H)$:

$$R(\lambda,L)\;=\;\wedge^{-1}F.$$

Поскольку $\wedge^{-1}\in\sigma_q\big(L_2((0,1),H)\big)$, то $R(\lambda,L)\in\sigma_q\big(L_2((0,1),H)\big)$ при $q>\dfrac{2p_0+1}{2}$ (см. [13, с. 476]).

Теорема доказана.

В пространстве $L_2((0,1), H)$ рассмотрим спектральную задачу

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1), \tag{26}$$

$$u(0) + B_1 u(\xi_1) = 0, \quad \xi_1 \in (0,1), \tag{27}$$

$$u(1) + B_2 u(\xi_2) = 0, \quad \xi_2 \in (0,1).$$

Из теорем 2, 3 в силу [14, с. 345] следует такая теорема.

Теорема 4. *Пусть*:

1) A — *сильно позитивный оператор в* H *и при некотором* $p_0 > 0$ $A^{-1} \in \sigma_{p_0}(H)$, $0 < \delta < \dfrac{\pi}{1+2p_0}$;

2) *оператор* B_i *ограниченно действует из* H *в* H *и из* $H(A)$ *в* $H(A)$.

Тогда система собственных и присоединенных вектор-функций задачи (26), (27) *образует базис для метода суммирования Абеля порядка* γ *в* $L_2((0,1), H)$, *где* $\gamma \in \left(\dfrac{2p_0+1}{2}, \dfrac{\pi}{2\delta}\right)$.

Рассмотрим в $L_2([0,1]\times[0,\ell])$ спектральную задачу для уравнения Лапласа с краевыми условиями типа Бицадзе – Самарского:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u(x,y), \tag{28}$$

$$\begin{aligned} L_1 u &= u(0,y) + \int_0^\ell b_1(y,t)u(\xi_1,t)\,dt = 0, \\ L_2 u &= u(1,y) + \int_0^\ell b_2(y,t)u(\xi_2,t)\,dt = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

$$Q_\nu u = \alpha_\nu u_y^{(k_\nu)}(x,0) + \beta_\nu u_y^{(k_\nu)}(x,\ell) = 0, \quad \nu = 1,2, \tag{30}$$

где $0 \le k_1 \le k_2 \le 1$, α_ν, β_ν — комплексные числа, $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| \ne 0$.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $b_i(y,t)$, $\dfrac{\partial^2 b_i(y,t)}{\partial t^2} \in L_2[[0,\ell]\times[0,\ell]]$, $i = 1,2$;

2) $\theta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & (-1)^{k_1}\beta_1 \\ \alpha_2 & (-1)^{k_2}\beta_2 \end{vmatrix} \ne 0.$

Тогда системы собственных и присоединенных функций задачи (28) – (30) *полны в* $L_2[(0,1)\times(0,\ell)]$ *и образуют базис для метода суммирования Абеля порядка* γ *в* $L_2[(0,1)\times(0,\ell)]$, *где* $\gamma > 1$.

Доказательство. В пространстве $L_2(0,\ell)$ определим операторы A, B_i следующим образом:

$$D(A) = \{u : u \in W_2^2(0,\ell), L_\nu u = 0, \nu = 1,2,\}, \qquad (Au)(y) = -\frac{d^2 u(y)}{dy^2}, \tag{31}$$

$$D(B_i) = L_2(0,\ell), \qquad (B_i u)(y) = \int_0^\ell b_i(y,t)u(\xi_i,t)\,dt, \tag{32}$$

$$i = 1, 2, \quad 0 < \xi_1, \quad \xi_2 < 1.$$

Тогда очевидно, что доказательство теоремы 5 сводится к проверке условий теоремы 4. Сильная позитивность оператора A, определенная формулой (31), следует из [11, с. 19]. В силу [12, с. 317] имеют место компактные вложения $W_2^2(0,\ell) \subset L_2(0,\ell)$, а в силу [12, с. 437]

$$S_n\Big(J, W_2^2(0,\ell), L_2(0,\ell)\Big) \sim n^{-2}.$$

С другой стороны, при $j = 1, 2, \ldots$

$$S_j = \left(\left(J, W_2^2(0,\ell), Q_\nu u\Big|_{\nu=1}^2 = 0\right), L_2(0,\ell)\right) \le S_j\Big(J, W_2^2(0,\ell), L_2(0,\ell)\Big).$$

Тогда в силу [12, с. 494] при любом $p_0 > \dfrac{1}{2}$ $A^{-1} \in \sigma_{p_0}\Big(L_2(0,\ell)\Big)$.

Нетрудно показать, что оператор B_i, определенный равенством (32), удовлетворяет второму условию теоремы 4.

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых решениях простейших обобщенных линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, № 4. – С. 739 – 740.
2. *Ерошенков Е. П., Кальменов Т. Ш.* О полноте корневых векторов эллиптической задачи Бицадзе – Самарского // Там же. – 1987. – **296**, № 3. – С. 528 – 531.
3. *Скубачевский А. Л.* Разрешимость эллиптических задач с краевыми условиями типа Бицадзе – Самарского // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 4. – С. 701 – 706.
4. *Ильин В. А., Филиппов В. С.* О характере спектра самосопряженного расширения оператора Лапласа в ограниченной области // Докл. АН СССР. – 1970. – **191**, № 2. – С. 167 – 169.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Некоторые вопросы спектральной теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в пространстве вектор-функций // Укр. мат. журн. – 1976. – **28**, № 3. – С. 313 – 324.
6. *Михайлец В. А.* Граничные задачи для операторного уравнения Штурма – Лиувилля с полной системой собственных и присоединенных функций // Дифференц. уравнения. – 1975. – **11**, № 9. – С. 1595 – 1600.
7. *Михайлец В. А.* О разрешимости и полноте системы собственных и присоединенных функций несамосопряженных граничных задач для операторного уравнения Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1974. – **218**, № 2. – С. 284 – 286.
8. *Алиев Б. А.* Разрешимость краевой задачи с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Докл. АН АзССР. – 1981. – **37**, № 6. – С. 17 – 20.
9. *Якубов С. Я., Алиев Б. А.* Фредгольмовость краевой задачи с оператором в краевых условиях для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Докл. АН СССР. – 1981. – **257**, № 5. – С. 1071 – 1074.
10. *Алиев Б. А., Алиев И. В.* Полнота системы корневых функций краевых задач для эллиптических уравнений с краевыми условиями типа Бицадзе – Самарского // Сиб. мат. журн. – 2000. – **41**, № 3. – С. 489 – 497.
11. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. – Баку: Элм, 1985. – 220 с.
12. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
13. *Алиев И. В.* О резольвенте обобщенной краевой задачи для дифференциально-операторных уравнений Штурма – Лиувилля // Мат. заметки. – 1986. – **40**, № 4. – С. 468 – 477.
14. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

Получено 14.07.06,
после доработки — 10.04.07