УДК 517.95

О. Є. Коркуна (Нац. лісотехн. ун-т України, Львів)

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ЗА ЕЙДЕЛЬМАНОМ РІВНЯННЯ

We obtain conditions for the existence and uniqueness of a generalized solution of the Cauchy problem for the equation

$$u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha (b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) D_z^\alpha u + c(z,t,u) = \sum_{|\alpha|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha f_\alpha(z,t) - \sum_{|\alpha|=1} D_y^\alpha g_\alpha(z,t)$$

in Tikhonov's class.

Получены условия существования и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнения

$$u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u) - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha (b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) D_z^\alpha u + c(z,t,u) = \sum_{|\alpha|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha f_\alpha(z,t) - \sum_{|\alpha|=1} D_y^\alpha g_\alpha(z,t)$$

в классе типа Тихонова.

У 1960 р. С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, увівши термін „ $2\vec{b}$-параболічні системи”. У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними приписують різну вагу по відношенню до диференціювання за змінною t. За цей час було достатньо повно розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем вказаного типу (див. [2 – 21]).

Мета цієї статті — дослідити задачу Коші для напівлінійного диференціального рівняння з похідною першого порядку за часовою змінною, в якому за групою просторових змінних є диференціальний оператор четвертого порядку, а за іншою групою — другого порядку. Одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку в класі типу Тихонова.

Нехай $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n$, $k + m = n$, $Q_\tau = \mathbb{R}^n \times (0, \tau)$, $0 < \tau \le$ $\le T < \infty$. В області Q_T розглянемо рівняння

$$u_t + A(u) \equiv u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u) -$$

$$- \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha (b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u) + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) D_z^\alpha u + c(z,t,u) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha f_\alpha(z,t) - \sum_{|\alpha|=1} D_y^\alpha g_\alpha(z,t) \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad z \in \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

де

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_k^{\alpha_k}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_k,$$
$$D_y^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1}\ldots\partial y_m^{\alpha_m}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_m,$$
$$D_z^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\ldots\partial z_n^{\alpha_n}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1+\ldots+\alpha_n.$$

Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) і вільні члени є дійснозначними функціями і для них виконуються такі умови:

A) $a_{\alpha\beta}\in L^\infty(Q_T)$, $|\alpha| = |\beta| = 2$; існує додатна стала a_0 така, що майже для всіх $(z,t)\in Q_T$ і $\xi\in\mathbb{R}^{N(k)}$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t)\xi_\alpha\xi_\beta \ge a_0\sum_{|\alpha|=2}|\xi_\alpha|^2, \quad a_0>0,$$

де $N(k)$ — кількість всіх k-вимірних мультиіндексів з $|\alpha| = 2$, а ξ_α, $|\alpha| = 2$, — координати вектора ξ;

B) $b_{\alpha\beta}\in L^\infty(Q_T)$, $|\alpha| = |\beta| = 1$; існує додатна стала b_0 така, що майже для всіх $(z,t)\in Q_T$ і $\eta\in\mathbb{R}^m$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t)\eta_\alpha\eta_\beta \ge b_0\sum_{|\alpha|=1}|\eta_\alpha|^2, \quad b_0>0;$$

C) $c_\alpha\in L^\infty(Q_T)$, $|\alpha| = 1$; функція $c(z,t,\cdot)$ є неперервною в $\mathbb{R}$ майже для всіх $(z,t)\in Q_T$; функція $c(\cdot,\cdot,\xi)$ — вимірною в Q_T для всіх $\xi\in\mathbb{R}$; майже для всіх $(z,t)\in Q_T$ і для всіх $\xi\in\mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\left(c(z,t,\xi)-c(z,t,\tilde\xi)\right)(\xi-\tilde\xi) \ge 0, \qquad c(z,t,\xi)\xi \ge c_0|\xi|^r, \quad r\in[1,2],$$
$$|c(z,t,\xi)| \le c_1|\xi|^{r-1}.$$

Нехай $\bar R$, R — довільні додатні фіксовані числа. Покладемо $\Pi_x^{\bar R} = \{x\in\mathbb{R}^k: |x|<\bar R\}$, $\Pi_y^R = \{x\in\mathbb{R}^m: |y|<R\}$, $\Omega(\bar R,R) = \Pi_x^{\bar R}\times\Pi_y^R$, $Q_\tau(\bar R,R) = \Omega(\bar R,R)\times(0,\tau)$, $\tau\in[0,T]$, $\Omega_\tau(\bar R,R) = Q_\tau(\bar R,R)\cap\{t=\tau\}$.

Введемо простори

$$W_1(\Omega(\bar R,R)) = \{u: D_y^\alpha u\in L^2(\Omega(\bar R,R)),\ |\alpha|\le 1\},$$
$$W_2(\Omega(\bar R,R)) = \{u: D_x^\alpha u\in L^2(\Omega(\bar R,R)),\ |\alpha|\le 2\},$$
$$W_{1,0}(\Omega(\bar R,R)) = \left\{u: u\in W_1(\Omega(\bar R,R)),\ u|_{\Pi_x^{\bar R}\times\partial\Pi_y^R} = 0\right\},$$
$$W_{2,0}(\Omega(\bar R,R)) = \left\{u: u\in W_2(\Omega(\bar R,R)),\ u|_{\partial\Pi_x^{\bar R}\times\Pi_y^R} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Pi_x^{\bar R}\times\Pi_y^R} = 0\right\},$$

ν — зовнішня нормаль,

$$W_{1,\mathrm{loc}}(R^n) = \left\{u: u\in W_1(\Omega(\bar R,R))\ \forall\bar R>0\ \forall R>0\right\},$$

$$W_{2,\mathrm{loc}}(R^n) = \left\{u : u \in W_2(\Omega(\overline{R}, R)) \ \forall \overline{R} > 0 \ \forall R > 0\right\}.$$

Щодо правої частини (1) і початкової функції u_0 припустимо, що виконується умова

F) $f_\alpha \in L^2((0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n))$, $|\alpha| \le 2$; $g_\beta \in L^2((0,T); L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n))$, $|\beta| = 1$, $u_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, де $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) = \left\{u : u \in L^2(\Omega(\overline{R}, R)) \ \forall \overline{R} > 0 \ \forall R > 0\right\}$.

Означення 1. *Функцію* u, *яка задовольняє включення*

$$u \in C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^2((0,T); W_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap W_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n))$$

та інтегральну рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(z,\tau) v(z,\tau)\, dz + \int_{Q_\tau} \Bigg[-u v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u D_x^\alpha v +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u D_y^\alpha u + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) D_z^\alpha u v + c(z,t,u) v \Bigg] dz dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(z)\, v(z,0)\, dz + \int_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{|\alpha| \le 2} f_\alpha(z,t) D_x^\alpha v + \sum_{|\alpha|=1} g_\alpha(z,t) D_y^\alpha v \Bigg] dz dt \qquad (3)$$

для всіх $\tau \in (0, T]$ *і* $v \in C^1([0,T]; C_0^2(\mathbb{R}^n))$, *називатимемо узагальненим розв'язком задачі* (1), (2).

Нехай $\zeta \in C^2(\mathbb{R})$, $\zeta(\xi) = 1$ при $\xi \le 0$, $\zeta(\xi) = 0$ при $\xi \ge 1$ і $0 \le \zeta(\xi) \le 1$ при $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\psi_{\overline{R}}(x) = \zeta\left(\frac{|x| - \overline{R}}{\overline{\kappa}}\right), \quad \overline{\kappa} > 0, \qquad \varphi_R(y) = \zeta\left(\frac{|y| - R}{\kappa}\right), \quad \kappa > 0.$$

Тоді існують такі сталі μ_1, μ_2, що

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} \psi_R(x)\right| \le \mu_1 \overline{\kappa}^{-1}, \quad i \in \{1, \ldots, k\}, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial y_i} \varphi_R(y)\right| \le \mu_1 \kappa^2, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \psi_R(x)\right| \le \mu_2 \overline{\kappa}^{-2}, \quad i, j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Крім того, $\psi_{\overline{R}}(x) = 0$ при $|x| \ge \overline{R} + \overline{\kappa}$, $\psi_{\overline{R}}(x) = 1$ при $|x| \le \overline{R}$, $\varphi_R(y) = 0$ при $|y| \ge R + \kappa$ і $\varphi_R(y) = 1$ при $|y| \le R$.

Як у праці [22], доводимо таку лему.

Лема. *Нехай* $u \in L^2((0,T); W_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n))$. *Тоді*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=1} \left|D_x^\alpha u\right|^2 \left[\psi_{\overline{R}}(x)\right]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho dz \le$$

$$\le \delta \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=2} \left|D_x^\alpha u\right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma+2} [\varphi_R(y)]^\rho dz +$$

$$+ k\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\gamma^2 + \mu_1^2}{\overline{\kappa}^2}\right) \int_{\mathbb{R}^n} u^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-2} [\varphi_R(y)]^\rho dz \qquad (4)$$

або

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=1} \left|D_x^\alpha u\right|^2 \left[\psi_{\overline{R}}(x)\right]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho dz \le$$
$$\le \delta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=2} \left|D_x^\alpha u\right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho dz +$$
$$+ \frac{k}{\delta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho dz + \frac{k\gamma^2\mu_1^2}{\overline{\kappa}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-2} [\varphi_R(y)]^\rho dz, \tag{5}$$

$$\delta \in (0, 1), \quad \gamma > 2, \quad \rho > 1.$$

Доведення. Оскільки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i} [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho dz = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{x_i}^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho dz -$$
$$- \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{x_i} u \psi_{\overline{R}, x_i}(x) [\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-1} [\varphi_R(y)]^\rho dz, \quad i \in \{1, \ldots, k\},$$

то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{x_i}^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho dz \le \frac{\delta}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{x_i x_i}^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma+2} [\varphi_R(y)]^\rho dz +$$
$$+ \frac{1}{2\delta} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-2} [\varphi_R(y)]^\rho dz + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_{x_i}^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma dz +$$
$$+ \frac{\gamma^2\mu_1^2}{2\overline{\kappa}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-2} [\varphi_R(y)]^\rho dz.$$

Підсумовуючи останню нерівність по i від 1 до k, одержуємо (4). Аналогічно доводимо нерівність (5).

Нехай $\overline{R}$, R — довільні додатні фіксовані числа. Розглянемо допоміжну задачу

$$u_t + A(u) = F^{\overline{R},R}(z,t), \qquad (z,t) \in Q_T(\overline{R}, R), \tag{6}$$

$$u(z,0) = u_0^{\overline{R},R}(z), \qquad z \in \Omega(\overline{R}, R), \tag{7}$$

$$u\big|_{\partial\Omega(\overline{R},R)\times(0,T)} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Pi_x^{\overline{R}} \times \Pi_y^R \times (0,T)} = 0, \tag{8}$$

де ν — зовнішня нормаль,

$$F^{\overline{R},R} = \sum_{|\alpha|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha f_\alpha^{\overline{R},R} - \sum_{|\beta|=1} D_y^\beta g_\beta^{\overline{R},R},$$

$$f_\alpha^{\overline{R},R}(z,t) = \begin{cases} f_\alpha(z,t), & (z,t) \in Q_T(\overline{R}, R), \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T(\overline{R}, R), \quad |\alpha| \le 2, \end{cases}$$

$$g_\beta^{\overline{R},R}(z,t) = \begin{cases} g_\beta(z,t), & (z,t) \in Q_T(\overline{R}, R), \\ 0, & (z,t) \in Q_T \setminus Q_T(\overline{R}, R), \quad |\beta| = 1, \end{cases}$$

$$u_0^{\overline{R},R}(z,t) \;=\; \begin{cases} u_0(z), & z \in \Omega(\overline{R}, R), \\ 0, & z \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega(\overline{R}, R). \end{cases}$$

Означення 2. *Функцію* u, *яка задовольняє включення*

$$u \,\in\, C([0,T]; L^2(\Omega(\overline{R}, R))) \,\cap\, L^2((0,T); W_{1,0}(\Omega(\overline{R}, R)) \cap W_{2,0}(\Omega(\overline{R}, R)))$$

та інтегральну рівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau(\overline{R},R)} uv\,dz \,+\, \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \Bigg[-uv_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u D_x^\alpha v \;+$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u D_y^\alpha v \,+\, \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) D_z^\alpha uv \,+\, c(z,t,u)v \Bigg] dz\,dt \;=$$

$$= \int\limits_{\Omega_0(\overline{R},R)} u_0 v\,dz \,+\, \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \Bigg[\sum_{|\alpha|\le 2} f_\alpha^k(z,t)\, D_x^\alpha v \,+\, \sum_{|\beta|=1} g_\beta(z,t) D_y^\beta v \Bigg] dz\,dt \tag{9}$$

для всіх $\tau \in (0, T]$ *і довільної функції* $v \in L^2\big((0,T)\colon\ W_{1,0}\big(\Omega(\overline{R}, R)\big) \cap W_{2,0}\big(\Omega(\overline{R}, R)\big)\big)$ *такої, що* $v_t \in L^2(Q_T(\overline{R}, R))$, *називатимемо узагальненим розв'язком задачі* (6) – (8).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* A, B, C, F. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі* (6) – (8), *причому правильною є рівність*

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau(\overline{R},R)} |u|^2 dz \,+\, \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u D_x^\alpha u \;+$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u D_y^\alpha v \,+\, \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) D_z^\alpha uu \,+\, c(z,t,u)u \Bigg] dz\,dt \;=$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0(\overline{R},R)} \left| u_0^{\overline{R},R} \right|^2 dz \,+\, \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \Bigg[\sum_{|\alpha|\le 2} f_\alpha^{\overline{R},R}(z,t)\, D_x^\alpha u \,+\, \sum_{|\beta|=1} g_\beta^{\overline{R},R}(z,t) D_y^\beta u \Bigg] dz\,dt \tag{10}$$

для всіх $\tau \in (0, T]$.

Доведення. Нехай $\{\varphi^s\}$ — база простору $W_{2,0}(\Omega(\overline{R}, R)) \cap W_{1,0}(\Omega(\overline{R}, R))$, ортонормована в $L^2(\Omega(\overline{R}, R))$. Побудуємо послідовність

$$u^N(z,t) \;=\; \sum_{s=1}^{N} c_s^N(t) \varphi_s(z), \qquad N \,=\, 1, 2, \ldots,$$

де $c_1^N, \ldots, c_N^N$ — розв'язок задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega_t(\overline{R},R)} \Bigg[u_t^N \varphi^s + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u^N D_x^\alpha u^s \;+$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u^N D_y^\alpha \varphi^s + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) \varphi^s D_z^\alpha u^N + c(z,t,u^N)\varphi^s \Bigg] dz \;=$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_t(\bar{R},R)} \left[\sum_{|\alpha|\le 2} f_\alpha^R(z,t)\, D_x^\alpha \varphi^s + \sum_{|\beta|=1} g_\beta^R(z,t) D_y^\beta \varphi^s \right] dz, \quad t \in [0,T], \tag{11}$$

$$c_s^N(0) = u_{0,s}^{\bar{R},R,N}, \quad s = 1,2,\dots,N, \tag{12}$$

$$u_0^{\bar{R},R,N}(z) = \sum_{s=1}^{N} u_0^{\bar{R},R,N} \varphi^s(z), \quad \left\| u_0^{\bar{R},R,N} - u_0^{\bar{R},R} \right\|_{L^2(\Omega(\bar{R},R))} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Згідно з умовами A, B, C, F і теоремою Каратеодорі [23, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі Коші (11), (12), визначений на деякому проміжку $(0, h_N]$. З оцінок, одержаних нижче, випливатиме $h_N = T$. Помноживши кожне рівняння (11) відповідно на функцію $c_s^N(t)e^{-\nu t}$, $\nu > 0$, підсумувавши по s від 1 до N і зінтегрувавши по проміжку $[0, \tau]$, $\tau \le T$, одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau(\bar{R},R)} \left[u_t^N u^N + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u^N D_x^\alpha u^N + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u^N D_y^\alpha u^N + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) u^N D_z^\alpha u^N + c(z,t,u^N) u^N \right] e^{-\nu t} dz dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau(\bar{R},R)} \left[\sum_{|\alpha|\le 2} f_\alpha^R(z,t)\, D_x^\alpha u^N + \sum_{|\beta|=1} g_\beta^R(z,t) D_y^\beta u^N \right] e^{-\nu t} dz dt. \tag{13}$$

Перетворимо і оцінимо кожний доданок рівності (13). Очевидно,

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int\limits_{Q_\tau(\bar{R},R)} u_t^N u^N e^{-\nu t} dz dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau(\bar{R},R)} \left| u^N \right|^2 e^{-\nu\tau} dz +$$

$$+ \frac{\nu}{2} \int\limits_{Q_T(\bar{R},R)} \left| u^N \right|^2 e^{-\nu\tau} dz dt - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0(\bar{R},R)} \left| u_0^{\bar{R},R,N} \right|^2 dz.$$

На підставі умов A, B, C

$$\mathcal{I}_2 \equiv \int\limits_{Q_\tau(\bar{R},R)} \left[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\alpha u^N D_x^\beta u^N + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\alpha u^N D_y^\beta u^N + \right.$$

$$\left. + c(z,t,u^N) u^N \right] e^{-\nu t} dz dt \ge$$

$$\ge \int\limits_{Q_\tau(\bar{R},R)} \left[a_0 \sum_{|\alpha|=2} \left| D_x^\alpha u^N \right|^2 + b_0 \sum_{|\alpha|=1} \left| D_y^\alpha u^N \right|^2 + c_0 \left| u^N \right|^r \right] e^{-\nu t} dz dt.$$

Зазначимо, що для функцій $u \in W_{2,0}(\Omega(\bar{R},R))$ легко одержати нерівність (доведення аналогічне до доведення леми)

$$\int\limits_{Q_\tau(\bar{R},R)} \sum_{|\alpha|=1} \left| D_x^\alpha u \right|^2 e^{-\nu t} dz dt \le \frac{\delta_1}{2} \int\limits_{Q_\tau(\bar{R},R)} \sum_{|\alpha|=2} \left| D_x^\alpha u \right|^2 e^{-\nu t} dz dt +$$

$$+\ \frac{1}{2\delta_1}\int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} u^2 e^{-\nu t}\,dzdt, \quad \delta_1>0. \tag{14}$$

Згідно з умовою C

$$\mathcal{J}_3 \equiv \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \sum_{|\sigma|=1} c_\sigma(z,t)u^N D_x^\sigma u^N e^{-\nu t}\,dzdt \le$$

$$\le \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \left[\sum_{|\sigma|=1}\left|D_x^\sigma u^N\right|^2 + \frac{C_1}{4}\left|u^N\right|^2\right] e^{-\nu t}\,dzdt,$$

де $C_1 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sum\limits_{|\alpha|=1} c_\alpha^2(z,t)$, $\alpha = \alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$,

$$\mathcal{J}_4 \equiv \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \sum_{|\omega|=1} c_\omega(z,t)u^N D_y^\omega u^N e^{-\nu t}\,dzdt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \left[\delta_2\sum_{|\omega|=1}\left|D_y^\omega u^N\right|^2 + \frac{C_1}{\delta_2}\left|u^N\right|^2\right] e^{-\nu t}\,dzdt,$$

$$\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_m), \quad \delta_2>0.$$

На підставі умови F і (14)

$$\mathcal{J}_5 \equiv \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \left[\sum_{|\alpha|\le 2} f_\alpha^{\overline{R},R}(z,t)\,D_x^\alpha u^N + \sum_{|\beta|=1} g_\beta^{\overline{R},R}(z,t)D_y^\beta u^N\right] e^{-\nu t}\,dzdt \le$$

$$\le \frac{1}{2\delta_1}\int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \sum_{|\alpha|\le 2}\left|f_\alpha^{\overline{R},R}(z,t)\right|^2 e^{-\nu t}\,dzdt + \frac{1}{2\delta_2}\int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \sum_{|\beta|=1}\left|g_\beta^{\overline{R},R}(z,t)\right|^2 e^{-\nu t}\,dzdt +$$

$$+\ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \left[\left(\delta_1+\frac{\delta_1^2}{2}\right)\sum_{|\alpha|=2}\left|D_x^\alpha u^N\right|^2 + \delta_2\sum_{|\alpha|=1}\left|D_y^\alpha u^N\right|^2 + \left(\delta_1+\frac{1}{2}+\delta_2\right)\left|u^N\right|^2\right] e^{-\nu t}\,dzdt.$$

Тоді, врахувавши оцінки інтегралів $\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_5$ та збіжність $u_0^{\overline{R},R,N}$ до $u_0^{\overline{R},R}$ в $L^2(\Omega(\overline{R},R))$, з (13) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau(\overline{R},R)} \left|u^N\right|^2 e^{-\nu\tau}\,dz + \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \left[\left(\nu - \frac{1}{\delta_1} - \frac{C_1}{2} - \frac{C_1}{\delta_2} - 2\delta_1 - 1 - 2\delta_2\right)\left|u^N\right|^2 +\right.$$

$$+\ \left(2a_0 - 2\delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2}\right)\sum_{|\alpha|=2}\left|D_x^\alpha u^N\right|^2 +$$

$$\left. +\ 2c_0\left|u_n\right|^r + (2b_0 - 2\delta_2)\sum_{|\alpha|=1}\left|D_y^\alpha u^N\right|^2\right] e^{-\nu t}\,dzdt \le 2\int\limits_{\Omega_0(\overline{R},R)} \left|u_0^{\overline{R},R}\right|^2 dz +$$

$$+\ \int\limits_{Q_t(\overline{R},R)} \left[\frac{1}{\delta_1}\sum_{|\alpha|\le 2}\left|f_\alpha^{\overline{R},R}(z,t)\right|^2 + \frac{1}{\delta_2}\sum_{|\beta|=1}\left|g_\beta^{\overline{R},R}(z,t)\right|^2\right] dzdt, \quad \tau\in(0,T], \tag{15}$$

якщо $N > N_0$.

Виберемо δ_1, δ_2, ν з умов

$$2a_0 - \delta_1 - \frac{\delta_1^2}{2} = a_0, \quad \delta_2 = \frac{b_0}{2}, \quad \nu = \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta_2} + 2\delta_1 + 2\delta_2 + 2.$$

Тоді з (15) матимемо оцінки

$$\left\| u^N(\cdot, T) \right\|_{L^2(\Omega(\overline{R},R))} \le M_1, \tag{16}$$

$$\left\| u^N \right\|_{L^\infty((0,T);\, L^2(\Omega(\overline{R},R)))} \le M_1, \tag{17}$$

$$\left\| u^N \right\|_{L^2((0,T);\, W_{1,0}(\Omega(\overline{R},R)) \cap W_{2,0}(\Omega(\overline{R},R)))} \le M_1, \tag{18}$$

де стала M_1 не залежить від N.

Крім того, згідно з умовою C і (15)

$$\int\limits_{Q_t(\overline{R},R)} \left| c(z,t) u^N \right|^{r'} dz dt \le M_2, \tag{19}$$

де $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, а стала M_2 не залежить від N.

На підставі (16) – (19) існує така підпослідовність $\{u^{N_s}\} \subset \{u^N\}$, що

$$u^{N_s}(\cdot, T) \to \chi_0 \quad \text{слабко в} \quad L^2(\Omega(\overline{R}, R)),$$

$$u^{N_s} \to u \quad *\text{-слабко в} \quad L^\infty((0,T);\, L^2(\Omega(\overline{R}, R))),$$

$$u^{N_s} \to u \quad \text{слабко в} \quad L^2\big((0,T);\, W_{1,0}(\Omega(\overline{R},R)) \cap W_{2,0}(\Omega(\overline{R},R))\big),$$

$$c(\cdot,\cdot,u^{N_s}) \to \chi_1 \quad \text{слабко в} \quad L^{r'}(Q_T(\overline{R}, R)) \quad \text{при} \quad N_s \to \infty.$$

Враховуючи щільність множини функцій $\mathfrak{M} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}_N$, де

$$\mathfrak{M}_N = \left\{ v^N : v^N(z,t) = \sum_{s=1}^{N} d_s^N(t) \varphi^s(z), \ d_s^N \in C^1([0,T]) \right\},$$

у просторі

$$V(Q_T(\overline{R},R)) = \left\{ v : v \in L^2\big((0,T);\, W_{1,0}(\Omega(\overline{R},R)) \cap W_{2,0}(\Omega(\overline{R},R))\big),\ v_t \in L^2(Q_T(\overline{R},R)) \right\},$$

стандартним способом доводимо, що u задовольняє рівність

$$\int\limits_{\Omega_T(\overline{R},R)} \chi_0 v \, dz + \int\limits_{Q_T(\overline{R},R)} \Bigg[-u v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u D_x^\alpha v +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u D_y^\alpha v + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) v D_z^\alpha u + \chi v \Bigg] dz dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0(\overline{R},R)} u_0^{\overline{R},R} v \, dz + \int\limits_{Q_T(\overline{R},R)} \Bigg[\sum_{|\alpha| \le 2} f_\alpha^{\overline{R},R}(z,t) D_x^\alpha u + \sum_{|b|=1} g_\beta^{\overline{R},R}(z,t) D_y^\beta u \Bigg] dz dt \tag{20}$$

для довільної функції $v \in V(\Omega(\overline{R},R))$. З (20), зокрема, випливає рівність (у сенсі розподілів)

$$u_t = -\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D_x^\alpha\left(a_{\alpha\beta}(z,t)\,D_x^\beta u\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_y^\alpha\left(b_{\alpha\beta}(z,t)\,D_y^\beta u\right) -$$

$$-\sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t)\,D_z^\alpha u - \chi_1(z,t) + \sum_{|\alpha|\le 2}(-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha f_\alpha^{\bar{R},R} - \sum_{|\beta|=1} D_y^\beta g_\beta^{\bar{R},R}. \tag{21}$$

Тому

$$u_t \in L^2\Big((0,T);\ \left(W_{1,0}(\Omega(\bar{R},R))\right)^* + \left(W_{2,0}(\Omega(\bar{R},R))\right)^*\Big).$$

Оскільки

$$u \in L^2\left((0,T);\, W_{1,0}(\Omega(\bar{R},R)) \cap W_{2,0}(\Omega(\bar{R},R))\right),$$

то на підставі теореми 1.17 [24, с. 177] $u \in C\left([0,T];\, L^2(\Omega(\bar{R},R))\right)$.

Отже, $u(z,0) = u_0^{\bar{R},R}(z)$, $u(z,T) = \chi_0(z)$. Крім того, згідно з тією самою теоремою, правильною є формула інтегрування частинами

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle u_t, u\rangle dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_{t_2}(\bar{R},R)} |u|^2 dz - \frac{1}{2}\int_{\Omega_{t_1}(\bar{R},R)} |u|^2 dz$$

для довільних $t_1,\ t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначає значення функціонала з простору $L^2\Big((t_1,t_2);\left(W_{1,0}(\Omega(\bar{R},R)) \cap W_{2,0}(\Omega(\bar{R},R))\right)^*\Big)$ на елементах простору $L^2\left((t_1,t_2);\, W_{1,0}(\Omega(\bar{R},R)) \cap W_{2,0}(\Omega(\bar{R},R))\right)$.

Тому з (21) одержуємо рівність

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau(\bar{R},R)} |u|^2 dz + \int_{\Omega_\tau(\bar{R},R)} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t)\,D_x^\beta u D_x^\alpha u\ +$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t)\,D_y^\beta u D_y^\alpha u + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t)\,u D_z^\alpha u + \chi_1 u\Bigg] dz dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0(\bar{R},R)} \left|u_0^{\bar{R},R}\right| dz\ +$$

$$+\int_{\Omega_\tau(\bar{R},R)} \Bigg[\sum_{|\alpha|\le 2} f_\alpha^{\bar{R},R}(z,t)\,D_x^\alpha u + \sum_{|\beta|=1} g_\beta^{\bar{R},R}(z,t)\,D_y^\beta u\Bigg] dz dt, \quad \tau \in [0,T]. \tag{22}$$

Для доведення рівності $\chi_1 = c(\cdot,\cdot,u)$ використовуємо монотонність і неперервність функції $c(z,t,\cdot)$ майже для всіх $(z,t) \in Q_T$ та рівність (22).

Повторюючи схему доведення [25, с. 171], одержуємо потрібну рівність, а з нею й існування узагальненого розв'язку, який задовольняє рівність (10).

Для доведення єдиності припускаємо, що існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 задачі (6) – (8). Тоді для $u = u^1 - u^2$, як і (10), одержимо рівність

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau(\bar{R},R)} |u|^2 e^{-\nu_1\tau} dz + \int_{\Omega_\tau(\bar{R},R)} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t)\,D_x^\beta u D_x^\alpha u + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t)\,D_y^\beta u D_y^\alpha u\ +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) u D_z^\alpha u + \Big(c(z,t,u^1) - c(z,t,u^2)\Big) u \Bigg] e^{-\nu_1 \tau} dz dt = 0, \quad \tau \in [0,T], \quad \nu_1 > 0. \tag{23}$$

Оцінюючи доданки рівності (23), як і рівності (13), вибираючи достатньо велике ν_1 і враховуючи умову C щодо функції c, одержуємо оцінку

$$\int_{\Omega_\tau(\overline{R},R)} |u|^2 dz \le 0, \qquad \tau \in [0,T],$$

тобто $u(z,t) = 0$ майже скрізь в $Q_T(\overline{R},R)$.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* A, B, C, F *і для довільних* $\overline{R} > 0$ *і* $R > 0$

$$\int_{\Omega(\overline{R},R)} u_0^2(z) dz + \int_{Q_T(\overline{R},R)} \Bigg[\sum_{|\alpha|\le 2} f_\alpha^2(z,t) + \sum_{|\beta|=1} g_\beta^2(z,t) \Bigg] dz dt \le b e^{a(\overline{R}^{4/3} + R^2)}, \tag{24}$$

де a *і* b *— деякі додатні сталі.*

Тоді існує таке $\tau_0 \in (0,T]$, *що в області* Q_{τ_0} *задача* (1), (2) *має узагальнений розв'язок* u, *для якого правильною є оцінка*

$$\int_{Q_{\tau_0}(\overline{R},R)} u^2(z,t) dz dt \le b_1 e^{a(\overline{R}^{4/3} + R^2)}, \tag{25}$$

де стала b_1 *не залежить від* $\overline{R}$ *і* R.

Доведення. Нехай $\overline{R} = R^{3/2}$. Розглянемо задачу (6) – (8), де R набуває значень із множини натуральних чисел. Тоді отримаємо послідовність функцій $\{u^s\}$. Продовжимо кожну функцію u^s нулем на область Q_T і збережемо за нею те саме позначення. Тоді, очевидно, кожна u^s, $s \in \mathbb{N}$, задовольняє рівність (3) з вільними членами f_α^s, $|\alpha| \le 2$, g_β^s, $|\beta| = 1$, і початковою функцією u_0^s для всіх $v \in C^1([0,T]; C_0^2(\mathbb{R}^n))$, $\operatorname{supp} v \subset Q_T^s$. Розглянемо (3) для функцій u^s і u^l, віднімемо від першої другу і приймемо, що

$$v = u^{l,s} [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho e^{-\mu^2 t},$$

де $u^{l,s} = u^s - u^l$, $\gamma \ge 4$, $\rho \ge 2$, числа s і l вибираємо так, щоб $u_0^s - u_0^l = 0$ в $\Omega(\overline{R} + \overline{\kappa}, R + \kappa)$ і $f_\alpha^s - f_\alpha^l = 0$, $g_\beta^s - g_\beta^l = 0$ в $Q_T(\overline{R} + \overline{\kappa}, R + \kappa)$, $|\alpha| \le 2$, $|\beta| = 1$. Тоді одержимо рівність

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| u^{l,s}(z,\tau) \right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho e^{-\mu^2 \tau} d\tau + \int_{Q_\tau} \Bigg[\frac{1}{2} \mu^2 \left| u^{l,s} \right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u^{l,s} D_x^\alpha \Big(u^{l,s} [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma \Big) [\varphi_R(y)]^\rho +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u^{l,s} D_y^\alpha \Big(u^{l,s} [\varphi_R(y)]^\rho \Big) [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) u^{l,s} [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho D_z^\alpha u^{l,s} +$$

$$+\ \Big(c(z,t,u^l)-c(z,t,u^s)\Big)u^{l,s}[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho}e^{-\mu^2 t}dzdt\ =\ 0,\quad \tau\in[0,T].\quad (26)$$

На підставі умов теореми оцінимо доданки в (26). Матимемо

$$\mathcal{I}_6\ \equiv\ \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}(z,t)D_x^{\alpha}u^{l,s}D_x^{\beta}u^{l,s}[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho}e^{-\mu^2 t}dzdt\ \geq$$

$$\geq\ a_0\int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|=2}\left|D_x^{\alpha}u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho}e^{-\mu^2 t}dzdt,$$

$$\mathcal{I}_7\ \equiv\ \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}(z,t)D_x^{\beta}u^{l,s}\sum_{|\sigma|=1}D_x^{\alpha-\sigma}u^{l,s}D_x^{\sigma}([\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma})[\varphi_R(y)]^{\rho}e^{-\mu^2 t}dzdt\ \leq$$

$$\leq\ \frac{M_5}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\delta_3\sum_{|\alpha|=2}\left|D_x^{\alpha}u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho}\ +$$

$$+\ \frac{k^3\gamma^2\mu_1^2}{\overline{\kappa}^2\delta_3}\sum_{|\alpha|=1}\left|D_x^{\alpha}u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-2}[\varphi_R(y)]^{\rho}\Bigg]e^{-\mu^2 t}dzdt,$$

де $\delta_3>0$, $M_5=\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T}\left|a_{\alpha\beta}(z,t)\right|$.

Згідно з лемою

$$\mathcal{I}_7\ \leq\ \int\limits_{Q_T}\Bigg[\left(\frac{M_5}{2}\delta_3 k^2+\frac{\delta_4 k^3\gamma^2\mu_1^2}{\overline{\kappa}^2\delta_3}\right)\sum_{|\alpha|=2}\left|D_x^{\alpha}u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho}\ +$$

$$+\ \frac{M_5k^4\gamma^2\mu_1^2}{2\overline{\kappa}^2\delta_3}\left(\frac{1}{\delta_4}+\frac{\gamma^2\mu_1^2}{\overline{\kappa}^2}\right)\left|u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-4}[\varphi_R(y)]^{\rho}\Bigg]e^{-\mu^2 t}dzdt,\quad \delta_4>0.$$

Далі

$$\mathcal{I}_8\ \equiv\ \int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}(z,t)u^{l,s}D_x^{\beta}u^{l,s}D_x^{\alpha}([\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma})[\varphi_R(y)]^{\rho}e^{-\mu^2 t}dzdt\ \leq$$

$$\leq\ \Bigg[\frac{M_5\delta_3k^2}{2}\sum_{|\alpha|=2}\left|D_x^{\alpha}u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho}\ +$$

$$+\ \frac{k^4\mu_2^2\gamma^2(\gamma-1)^2M_5}{2\delta_3\overline{\kappa}^4}\left|u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-4}[\varphi_R(y)]^{\rho}\Bigg]e^{-\mu^2 t}dzdt,$$

$$\mathcal{I}_9\ \equiv\ \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}b_{\alpha\beta}(z,t)D_y^{\beta}u^{l,s}D_y^{\alpha}u^{l,s}[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho}e^{-\mu^2 t}dzdt\ \geq$$

$$\geq\ b_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=1}\left|D_y^{\alpha}u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho}e^{-\mu^2 t}dzdt,$$

$$\mathcal{I}_{10}\ \equiv\ \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}b_{\alpha\beta}(z,t)D_y^{\beta}u^{l,s}u^{l,s}[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}D_y^{\alpha}([\varphi_R(y)]^{\rho})e^{-\mu^2 t}dzdt\ \leq$$

$$\leq\ \frac{M_7}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\delta_5\sum_{|\alpha|=1}\left|D_y^{\beta}u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho}\ +$$

$$+\ \frac{\mu_1^2m^2}{\delta_5\kappa^2}\left|u^{l,s}\right|^2[\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma}[\varphi_R(y)]^{\rho-2}\Bigg]e^{-\mu^2 t}dzdt,$$

де $M_7 = \max\limits_{|al|=|\beta|=1} \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_\tau} \left| b_{\alpha\beta}(z,t) \right|$, $\delta_5 > 0$;

$$\mathcal{I}_{11} \equiv \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\sigma|=1} c_{\alpha\beta}(z,t) u^{l,s} [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho D_x^\sigma u^{l,s} e^{-\mu^2 t} dz dt \le$$

$$\le \frac{M_7}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\delta_6 \sum_{|\alpha|=2} \left| D_x^\alpha u^{l,s} \right|^2 + \frac{k}{\delta_6} \left| u^{l,s} \right|^2 \right] [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho e^{-\mu^2 t} dz dt +$$

$$+ \frac{M_7 k \gamma^2 \mu_1^2}{2 \overline{\kappa}^2} \int\limits_{Q_\tau} \left| u^{l,s} \right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-2} [\varphi_R(y)]^\rho e^{-\mu^2 t} dz dt +$$

$$+ \frac{M_7 k}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left| u^{l,s} \right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho e^{-\mu^2 t} dz dt,$$

де $M_7 = \max\limits_{|\alpha|=1} \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_\tau} |c_\alpha(z,t)|$, $\delta_6 > 0$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$;

$$\mathcal{I}_{12} \equiv \int\limits_{Q_T} \sum_{|\omega|=1} c_\omega(z,t) u^{l,s} [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho D_y^\omega u^{l,s} e^{-\mu^2 t} dz dt \le$$

$$\le \frac{M_7}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\delta_5 \sum_{|\omega|=1} \left| D_y^\omega u^{l,s} \right|^2 + \frac{m}{\delta_5} \left| u^{l,s} \right|^2 \right] [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho e^{-\mu^2 t} dz dt,$$

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m),$$

$$\mathcal{I}_{13} \equiv \int\limits_{Q_T} \left(c(z,t,u^l) - c(z,t,u^s) \right) u^{l,s} [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho e^{-\mu^2 t} dz dt \ge 0.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $\mathcal{I}_6 - \mathcal{I}_{13}$, з (26) одержуємо нерівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| u^{l,s}(z,\tau) \right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho e^{-\mu^2 \tau} dz +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[\left(2a_0 - M_5 \delta_3 k^2 - 2\delta_4 \frac{k^3 \gamma^2 \mu_1^2}{\overline{\kappa}^2 \delta_3} - M_5 \delta_3 k^2 - M_7 \delta_6 \right) \sum_{|\alpha|=2} \left| D_x^\alpha u^{l,s} \right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho + \right.$$

$$+ (2b_0 - M_7 \delta_5 m - \delta_5 M_7) \sum_{|\alpha|=1} \left| D_y^\alpha u^{l,s} \right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho +$$

$$\left. + \left(\mu^2 - \frac{M_7 k}{\delta_6} - M_7 k - \frac{M_7 m}{\delta_5} \right) \left| u^{l,s} \right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^\gamma [\varphi_R(y)]^\rho \right] e^{-\mu^2 t} dz dt \le$$

$$\le \left[\frac{M_5 k^4 \gamma^2 \mu_1^2}{\overline{\kappa}^2 \delta_3} + \left(\frac{1}{\delta_4} + \frac{\gamma^2 \mu_1^2}{\overline{\kappa}^2} \right) + \frac{k^4 \mu_2^2 \gamma^2 (\gamma-1)^2 M_5}{\delta_3 \overline{\kappa}^4} + \frac{M_7 \mu_1^2 m^2}{\delta_5 \overline{\kappa}^2} + \frac{M_7 k \gamma^2 \mu_1^2}{\overline{\kappa}^2} \right] \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau} \left| u^{l,s} \right|^2 [\psi_{\overline{R}}(x)]^{\gamma-4} [\varphi_R(y)]^{\rho-2} e^{-\mu^2 t} dz dt, \quad \tau \in [0, T]. \tag{27}$$

Виберемо $\delta_3, \ldots, \delta_6$ з умов

$$2a_0 - M_5 \delta_3 k^2 - 2\delta_3 k^3 \gamma^2 \mu_1^2 - M_5 k^2 \delta_3 - M_7 \delta_6 = a_0,$$

$$2b_0 - M_7 m\delta_5 - M_7\delta_5 = b_0, \quad \delta_4 = \delta_3^2\overline{\kappa}^2, \quad \mu^2 = \mu_0^2 + \mu_1^2,$$

де $\mu_1^2 = M_7\left(\dfrac{k}{\delta_6} + k + \dfrac{m}{\delta_5}\right)$.

Тоді з (27) випливає нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau(\overline{R},R)} \left|u^{l,s}\right|^2 e^{-\mu_0^2\tau} dz + \int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \left[a_0 \sum_{|\alpha|=2} \left|D_x^\alpha u^{l,s}\right|^2 + b_0 \sum_{|\alpha|=1} \left|D_y^\alpha u^{l,s}\right|^2 + \mu_0^2\left|u^{l,s}\right|\right] e^{-\mu_0^2\tau} dz dt \le$$

$$\le M_9\left(\frac{1}{\overline{\kappa}^4} + \frac{1}{\overline{\kappa}^2}\right) \int\limits_{\Omega_\tau(\overline{R}+\overline{\kappa},R+\kappa)} \left|u^{l,s}\right|^2 e^{-\mu_0^2\tau} dz dt \tag{28}$$

при $\kappa \le \overline{\kappa}$, де M_9 не залежить від κ, $\overline{\kappa}$, R, $\overline{R}$, l, s. Зокрема, з (28) маємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau(\overline{R},R)} \left|u^{l,s}\right|^2 e^{-\mu_0^2\tau} dz dt \le \frac{M_9}{\mu_0^2}\left(\frac{1}{\overline{\kappa}^4} + \frac{1}{\overline{\kappa}^2}\right) \int\limits_{\Omega_\tau(\overline{R}+\overline{\kappa},R+\kappa)} \left|u^{l,s}\right|^2 e^{-\mu_0^2\tau} dz dt. \tag{29}$$

Нехай $p \in \mathbb{N}$. Поділимо проміжки $[\overline{R}, \overline{R}+\overline{\kappa}]$, $[R, R+\kappa]$ на p частин і виберемо числа p, μ_0^2, κ, $\overline{\kappa}$ з умов

$$\frac{2M_9 p^2}{\mu_0^2\kappa^2} \le e^{-1}, \quad \frac{2M_9 p^4}{\mu_0^2\overline{\kappa}^4} \le e^{-1}. \tag{30}$$

Тоді, ітеруючи (29), як і у [26], одержуємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau(\overline{R},R)} \left|u^{l,s}\right|^2 dz dt \le e^{-p+\mu_0^2\tau} \int\limits_{Q_\tau(\overline{R}+\overline{\kappa},R+\kappa)} \left|u^{l,s}\right|^2 dz dt. \tag{31}$$

Умови (30) можна забезпечити, вибравши, зокрема,

$$p_j = ([a]+1)\cdot 2^{4j+9}, \quad \mu_{0j}^2 = \lambda\cdot 2^{4j}, \quad R_j = 2^{2j}, \quad \overline{R}_j = 2^{3j}, \quad \kappa_j = 3\cdot 2^{2j},$$

$$\overline{\kappa}_j = 7\cdot 2^{3j}, \quad \lambda = \max\left\{\frac{2^{19}M_9([a]+1)^2 e}{9}, \frac{2^{37}M_9([a]+1)^4 e}{49^2}\right\},$$

для кожного $j \in \mathbb{N}$.

Оцінимо елементи послідовності $\{u^j\}$. Враховуючи означення узагальненого розв'язку, маємо рівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau(\overline{R}_j,R_j)} \left|u^j\right|^2 e^{-\nu_1\tau} dz + \int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_j,R_j)} \left[\frac{\nu_1}{2}\left|u^j\right|^2 + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u^j D_x^\alpha u^j + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u^j D_y^\alpha u^j + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z,t) u^j D_z^\alpha u^j + c(z,t,u^j)\right] e^{-\nu_1 t} dz dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0(\overline{R}_j,R_j)} |u_0|^2 dz +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_j,R_j)} \left[\sum_{|\alpha|\le 2} f_\alpha(z,t) D_x^\alpha u^j + \sum_{|\beta|=1} g_\beta(z,t) D_y^\beta u^j\right] e^{-\nu_1 t} dz dt, \quad \tau \in [0,T], \quad \nu_1 > 0.$$

(32)

Зазначимо, що рівність (32) така сама, як (13). Тому для u^j одержуємо нерівність (15), з якої випливає

$$\int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_j,R_j)} \left|u^j\right|^2 dzdt \;\le\; M_{10} \int\limits_{\Omega_0(\overline{R}_j,R_j)} |u_0(z)|^2 dz \;+$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_j,R_j)} \left[\sum_{|\alpha|\le 2} f_\alpha^2(z,t) + \sum_{|\beta|=1} g_\beta^2(z,t)\right] dzdt. \tag{33}$$

Отже, на підставі умови теореми з (33) одержимо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_j,R_j)} \left|u^j\right|^2 dzdt \;\le\; M_{11}\, e^{a(\overline{R}_j^{4/3}+R_j^2)}, \quad j\in\mathbb{N}. \tag{34}$$

Згідно з (31) і (34)

$$\int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_j,R_j)} \left|u^{j+2,j+1}\right|^2 dzdt \;\le\; e^{-p_j+\mu_0^2(j)\tau} \int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_{j+1},R_{j+1})} \left|u^{j+2,j+1}\right|^2 dzdt \;\le$$

$$\le\; 2e^{-p_j+\mu_0^2(j)\tau}\left[\int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_{j+1},R_{j+1})} \left|u^{j+1}\right|^2 dzdt + \int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_{j+2},R_{j+2})} \left|u^{j+2}\right|^2 dzdt\right] \;\le$$

$$\le\; 4e^{-p_j+\mu_0^2(j)\tau+a(\overline{R}_{j+2}+R_{j+2}^2)}. \tag{35}$$

Оскільки

$$-\,p_j \;+\; \mu_0^2(j)\tau \;+\; a(\overline{R}_{j+2}+R_{j+2}^2) \;=$$

$$=\; -\,\big([a]+1\big)2^{4j+9} \;+\; \lambda\tau 2^{4j} \;+\; a\big(2^{4j+8}+2^{4j+8}\big) \;=$$

$$=\; -\,2^{4j}\Big(\big([a]-a+1\big)2^9-\lambda\tau\Big) \;\le\; -\,2^{4j}\Big(\big(1-\{a\}\big)2^9-\lambda\tau_0\Big)$$

для всіх $\tau\in[0,\tau_0]$, де $\tau_0 = \dfrac{(1-\{a\})2^9-\alpha_0}{\lambda}$, $(1-\{a\})2^9 > \alpha_0 > 0$, то з (35) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_\tau(\overline{R}_j,R_j)} \left|u^{j+1,j+2}\right|^2 dzdt \;\le\; 4e^{-\alpha_0 2^{4j}}, \quad \tau\in[0,\tau_0], \tag{36}$$

j — довільне натуральне число.

Нехай $j \ge j_0 > 1$, N — довільне натуральне число. Тоді на підставі (36)

$$\left\|u^{j+1,j+N}\right\|_{L^2(Q_{\tau_0}(\overline{R}_j,R_j))} \;\le\; \sum_{i=1}^{N-1}\left\|u^{j+1,j+i+1}\right\|_{L^2(Q_{\tau_0}(\overline{R}_j,R_j))} \;\le$$

$$\le\; \sum_{i=1}^{N-1}\left\|u^{j+i,j+i+1}\right\|_{L^2(Q_{\tau_0}(\overline{R}_{j+i-1},R_{j+i-1}))} \;\le\; 4\sum_{i=1}^{N-1} e^{-\alpha_0 2^{4(j+i-1)}} \;=$$

$$=\; 4e^{-\alpha_0 2^{4j}}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha_0 2^{4(i-1)}} \;=\; M_{12}\, e^{-\alpha_0 2^{4j}}. \tag{37}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване як завгодно мале число, R_0, $\overline{R}_0$ — довільні фіксовані додатні числа. Тоді згідно з (37) існує таке $j_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $j > j_0$ і натуральних N

$$\left\| u^{j+1, j+N} \right\|_{L^2(Q_{\tau_0}(\overline{R}_0, R_0))} \leq \varepsilon,$$

тобто послідовність $\{u^j\}$ є фундаментальною у просторі $L^2(Q_{\tau_0}(\overline{R}_0, R_0))$. Отже, з (28) випливає фундаментальність $\{u^j\}$ у просторах $L^2((0, \tau_0);\ W_2(\Omega(\overline{R}_0, R_0)))$, $L^2((0, \tau_0);\ W_1(\Omega(\overline{R}_0, R_0)))$, $C([0, \tau_0];\ L^2(\Omega(\overline{R}_0, R_0)))$.

Таким чином, $\{u^j\}$ сильно збігається до функції u у цих просторах. Враховуючи довільність $\overline{R}_0$ і R_0, одержуємо, що $u^j \to u$ сильно в

$$L^2((0, \tau_0);\ W_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap W_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)) \cap C([0, \tau_0];\ L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)) \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Оскільки кожна функція u^j задовольняє рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^j(z, \tau)\, v(z, \tau)\, dz + \int_{Q_\tau} \Bigg[-u^j v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z, t)\, D_x^\beta u^j D_x^\alpha v +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z, t)\, D_y^\beta u^j D_y^\alpha v + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha(z, t)\, D_z^\alpha u^j v + c(z, t, u^j) v \Bigg] dz dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u_0^j(z)\, v(z, 0)\, dz + \int_{Q_\tau} f^j(z, t)\, v\, dz dt, \tag{38}$$

для довільної $v \in C^1([0, \tau_0];\ C_0^2(\mathbb{R}^n))$ $\operatorname{supp} v \subset Q_{\tau_0}(\overline{R}, R)$ і $u_0^j \to u_0$ сильно в $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $f^j \to f$ сильно в $L^2((0, \tau_0);\ L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n))$, $c(\cdot, \cdot, u^j) \to c(\cdot, \cdot, u)$ слабко в $L^2((0, \tau_0);\ L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n))$, то, перейшовши в (38) до границі при $j \to \infty$, одержимо, що u — узагальнений розв'язок задачі (1), (2).

З (37), (33) і (24), зокрема, одержимо нерівність

$$\| u \|_{L^2(Q_{\tau_0}(\overline{R}_j, R_j))} \leq 2 \left\| u^{j+1} \right\|_{L^2(Q_{\tau_0}(\overline{R}_j, R_j))} \leq b_2 e^{a(\overline{R}_{j+1}^{4/3} + R_{j+1}^2)},$$

де стала b_2 не залежить від j. З цієї нерівності випливає оцінка (25), що й завершує доведення теореми.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* A, B, C, F. *Тоді узагальнений розв'язок задачі* (1), (2) *у класі функцій, які задовольняють оцінку*

$$\int_{Q_T(\overline{R}, R)} u^2 dz dt \leq M_{13} e^{a(\overline{R}^{4/3} + R^2)} \tag{39}$$

для довільних додатних $\overline{R}$, R, *де* a, M_{13} *— додатні сталі, є єдиним.*

Доведення. Припустимо, що існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 задачі (1), (2), які задовольняють (39). Тоді, як і при доведенні теореми 2, одержуємо оцінку

$$\int_{Q_\tau(\overline{R}, R)} \left| u^1 - u^2 \right|^2 dz dt \leq e^{-p + \mu_0^2 \tau} \int_{Q_\tau(\overline{R} + \overline{\kappa},\, R + \kappa)} \left| u^1 - u^2 \right|^2 dz dt, \quad \tau \in [0, T]. \tag{40}$$

Зазначимо, що числа

$$p = ([a] + 1) \cdot 2^{4j+5}, \quad \mu_{0j}^2 = \lambda \cdot 2^{4j}, \quad R_j = 2^{2j},$$

$$\overline{R}_j = 2^{3j}, \quad \kappa_j = 3 \cdot 2^{2j}, \quad \overline{\kappa}_j = 7 \cdot 2^{3j},$$
$$\lambda = \max\left\{\frac{2^9 M_9([a]+1)^2 e}{9}, \frac{2^{17} M_9([a]+1)^4 e}{49^2}\right\}$$

задовольняють умови (30) для довільних $j \in \mathbb{N}$. Тому з (40) отримуємо оцінку

$$\int\limits_{Q_\tau(\overline{R},R)} \left|u^1 - u^2\right|^2 dzdt \le M_{13} \exp\left[-([a]+1)\, 2^{4j+5} + \lambda\tau 2^{4j} + a(2^{4j+4} + 2^{4j+4})\right]. \quad (41)$$

Вибираючи $\tau_0 < \dfrac{32(1-\{a\})}{\lambda}$, з (41) маємо

$$\int\limits_{Q_T(\overline{R},R)} u^2 dzdt \le M_{13} e^{-\alpha_0 2^{4j}}, \quad \alpha_0 > 0.$$

Нехай $\overline{R}_0$, R_0 — довільні фіксовані додатні числа, ε — як завгодно мале число. Тоді існує таке $j_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $j > j_0$

$$\int\limits_{Q_{\tau_0}(\overline{R}_0,R_0)} \left|u^1 - u^2\right|^2 dzdt \le \varepsilon.$$

Звідси $u^1(z,t) = u^2(z,t)$ майже скрізь в $Q_{\tau_0}(\overline{R}_0, R_0)$. Враховуючи довільність $\overline{R}_0$, R_0, одержуємо єдиність розв'язку в області Q_{τ_0}. Тоді за скінченне число кроків доводимо єдиність узагальненого розв'язку в області Q_T.

1. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.
2. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $2\vec{b}$-параболічних і $2\vec{b}$-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 8. – С. 1010 – 1013.
3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
4. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Тр. сем. по функцион. анализу. – 1967. – Вып. 9. – С. 54 – 83.
5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $2\vec{b}$-Параболические системы // Там же. – 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.
6. *Мартыненко М. Д., Бойко Д. Ф.* $2\vec{b}$-Параболические граничные задачи // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 12. – С. 2212 – 2222.
7. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $2\vec{b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 500 – 506.
8. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 7 – 12.
9. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічні системи // Вісн. ун-ту „Львів. політехніка". Прикл. математика. – 1998. – № 337. – С. 73 – 76.
10. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
11. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 18 – 22.
12. *Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$-параболічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 140 – 151.

13. *Пасічник Г. С.* Про розв'язність задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 3. – С. 61 – 65.
14. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $2\vec{b}$-параболічної системи // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С. 13 – 18.
15. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Там же. – 2000. – Вип. 76. – С. 5 – 10.
16. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про задачу Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1484 – 1496.
17. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 82 – 91.
18. *Івасишен С. Д., Кондур О. С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $2\vec{b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студ. – 2000. – **14**, № 1. – С. 73 – 84.
19. *Балабушенко Т. М.* Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка". Прикл. математика. – 2000. – № 411. – С. 6 – 11.
20. *Балабушенко Т. М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$-параболічних систем // Мат. студ. – 2002. – **17**, № 2. – С. 163 – 174.
21. *Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д.* Про властивості розв'язків $2\vec{b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 19 – 26.
22. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Huston J. Math. – 1988. – **14**, № 3. – P. 319 – 352.
23. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.
24. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
25. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 2002. – 608 с.
26. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, вып. 5. – С. 7 – 72.

Одержано 16.06.06