УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАЙКРАЩІ ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ТА ОПТИМАЛЬНІ ОРТОНОРМОВАНІ СИСТЕМИ ПРОСТОРУ ГАРДІ*

We construct the best linear methods of the approximation of functions from the Hardy space H_p on compact subsets of the unit disk. We show that the Takenaka – Malmquist systems are such systems of functions that are orthonormal on the unit circle and optimal for the construction of the best linear methods of approximation.

Построены наилучшие линейные методы приближения функций пространства Гарди H_p на компактных подмножествах единичного круга. Показано, что оптимальными ортонормированными на единичной окружности системами функций для построения наилучших линейных методов приближения являются системы Такенаки – Мальмквиста.

1. Позначення. Постановка задачі. Нехай. $1 \le p \le \infty$ і H_p — простір Гарді голоморфних в одиничному крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функцій f зі скінченною нормою

$$\|f\|_{H_p} = \begin{cases} \sup\limits_{0<\rho<1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\rho w)|^p d\sigma(w)\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|, & p = \infty, \end{cases}$$

де $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — одиничне коло, σ — нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T}$, і UH_p — одинична куля простору H_p, тобто $UH_p = \left\{f \in H_p : \|f\| \le 1\right\}$.

Відомо, що кожна функція f із простору H_p має майже скрізь на колі $\mathbb{T}$ кутові граничні значення, за якими залишимо те ж саме позначення f, причому

$$f \in L_p(\mathbb{T}) := \left\{ f \text{ сумовна на } \mathbb{T}\colon \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma\right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Нехай $\mathbf{a} := \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність точок у крузі $\mathbb{D}$, серед яких можуть бути точки скінченної і навіть нескінченної кратності. Системою функцій Такенаки – Мальмквіста, породженою послідовністю $\mathbf{a}$, називається [1] (§ 10.7) система $\varphi := \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ функцій φ_k вигляду

$$\varphi_0(z) = \frac{\sqrt{1-|a_0|^2}}{1-\bar{a}_0 z}, \qquad \varphi_k(z) = \frac{\sqrt{1-|a_k|^2}}{1-\bar{a}_k z} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{-|a_j|}{a_j} \frac{z-a_j}{1-\bar{a}_j z}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

де при $a_j = 0$ покладаємо $|a_j| / a_j = -1$.

Відомо [1] (§ 10.7), що система Такенаки – Мальмквіста є ортонормованою системою на колі $\mathbb{T}$, тобто

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle := \int_{\mathbb{T}} \varphi_k \overline{\varphi_l} d\sigma = \delta_{kl}, \quad k, l = 0, 1, \ldots,$$

---

* Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (грант № GP/F13/0018).

де δ_{kl} — символ Кронекера.

Кожному елементу φ_k системи φ поставимо у відповідність добуток Бляшке B_k степеня k. Нагадаємо, що так називаються функції вигляду

$$B_0(z) = 1, \qquad B_n(z) = \tau \prod_{j=0}^{n-1} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $a_j \in \mathbb{D}$, $j = \overline{0, n-1}$, і $|\tau| = 1$.

Нехай $\mathcal{B}_n$ — множина всіх добутків Бляшке степеня не більше n. Будь-який добуток Бляшке $B_n \in \mathcal{B}_n$, нулі якого збігаються з нулями функції φ_n вигляду (1), будемо називати n-добутком Бляшке системи Такенаки – Мальмквіста φ.

Нехай TM — множина всіх систем Такенаки – Мальмквіста і $\varphi \in TM$. Тоді для будь-якої функції $f \in H_p$ послідовність чисел

$$\hat{f}_\varphi(k) : = \langle f, \varphi_k \rangle, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

існує й утворює послідовність коефіцієнтів Фур'є функції f за системою φ.

Позначимо через $\mathcal{L}$ множину всіх нескінченних нижньотрикутних матриць $\Lambda : = (\lambda_{k,n})$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, елементами яких є функції $\lambda_{k,n}(\cdot)$, визначені та неперервні в $\mathbb{D}$. Для даної матриці $\Lambda \in \mathcal{L}$ і системи $\varphi \in TM$ визначимо на H_p послідовність лінійних операторів $U_{n,\Lambda,\varphi}$ правилом

$$U_{n,\Lambda,\varphi}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_\varphi(k) \lambda_{k,n} \varphi_k, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Нехай K — компактна підмножина круга $\mathbb{D}$ і $\|f\|_K : = \max_{z \in K} |f(z)|$.

У даній роботі будемо досліджувати величину

$$\mathcal{E}_n(UH_p; K; \varphi) := \inf_{\Lambda \in \mathcal{L}} \sup_{f \in UH_p} \left\| f - U_{n,\Lambda,\varphi}(f) \right\|_K, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

яка називається величиною найкращого лінійного наближення на компакті K по системі $\varphi \in TM$ класу Гарді. Зокрема, вказано формулу, за якою будуються елементи матриці Λ^*, для якої досягається нижня межа в (2), та доведено єдиність такої матриці. Про таку матрицю Λ^* кажуть, що вона породжує найкращий лінійний метод наближення класу UH_p по системі φ на компакті K.

Поряд із величиною (2) досліджується також величина

$$L_n(UH_p; K) := \inf_{\varphi \in TM} \mathcal{E}_n(UH_p; K; \varphi), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Систему $\varphi^* \in TM$, для якої досягається точна нижня межа в (3), називатимемо оптимальною в сенсі найкращого наближення системою Такенаки – Мальмквіста.

2. Основні результати. У наступному твердженні, яке є ключовим у дослідженні величин (2) і (3), йдеться про поточкове наближення найкращим лінійним методом, побудованим за системою функцій Такенаки – Мальмквіста.

Позначимо

$$V_p(z) \; = \; \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1-|z|^2\right)^{1/p}}, & 1 \le p < \infty, \\ 1, & p = \infty, \end{cases}$$

і

$$W_{\zeta,p}(z) \; = \; \begin{cases} \left(\dfrac{1-|\zeta|^2}{(1-\bar{\zeta}z)^2}\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ 1, & p = \infty. \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\varphi \in TM$ *і* $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *послідовність n-добутків Бляшке системи* φ. *Тоді існує єдина матриця* $\Lambda^* \in \mathcal{L}$, *залежна від p і системи* φ, *така, що для будь-якого* $\zeta \in \mathbb{D}$ *і кожного натурального n справджуються рівності*

$$\inf_{\Lambda \in \mathcal{L}} \sup_{f \in UH_p} \left| f(\zeta) - U_{n,\Lambda,\varphi}(f)(\zeta) \right| \; =$$

$$= \; \max_{f \in UH_p} \left| f(\zeta) - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)(\zeta) \right| \; = \; |B_n(\zeta)| V_p(\zeta). \tag{4}$$

Для кожного фіксованого $\zeta \in \mathbb{D}$ *і даного* $n \in \mathbb{N}$ *максимум в* (4) *досягається для функції* $f^* = e^{i\alpha} B_n W_{\zeta,p}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Елементи матриці Λ^* *обчислюються за формулою*

$$\lambda^*_{k,n}(\zeta) \; = \; \lambda^*_{k,n,p,\varphi}(\zeta) \; :=$$

$$:= \; 1 \; - \; \frac{1-\bar{a}_k\zeta}{\left(1-|\zeta|^2\right)^{2/p}} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{\zeta - a_j}{1-\bar{a}_j\zeta} \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=k+1}^{n-1}(1-\bar{a}_j w)}{\prod_{j=k}^{n-1}(w-a_j)} \left(1-\bar{\zeta}w\right)^{2/p} \frac{1-|\zeta|^2}{\left|1-\bar{\zeta}w\right|^2} d\sigma(w). \tag{5}$$

***Наслідок* 1.** *За умов теореми* 1 *справджуються рівності*

$$\mathcal{E}_n(UH_p; K; \varphi) \; = \; \max_{f \in UH_p} \left\| f - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f) \right\|_K \; = \; \left\| B_k V_p \right\|_K. \tag{6}$$

Максимум у (6) *досягається для функції* $f^* = e^{i\alpha} B_n W_{\zeta,p}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *де* ζ — *точка на K така, що* $|B_n(\zeta)| W_{\zeta,p}(\zeta) = |B_n(\zeta)| V_p(\zeta) = \left\| B_n V_p \right\|_K$.

Справді, з рівностей (4) випливає, що

$$\mathcal{E}_n(UH_p; K; \varphi) \; \le \; \sup_{f \in UH_p} \left\| f - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f) \right\|_K \; \le \; \left\| B_n V_p \right\|_K. \tag{7}$$

З іншого боку, оскільки функція $B_n V_p$ є неперервною на K, знайдеться точка $\zeta \in K$, для якої $|B_n(\zeta)| V_p(\zeta) = \left\| B_n V_p \right\|_K$. У цій точці з урахуванням (4) справджуються співвідношення

$$\mathcal{E}_n(UH_p; K; \varphi) \; \ge \; \inf_{\Lambda \in \mathcal{L}} \sup_{f \in UH_p} \left| f(\zeta) - U_{n,\Lambda,\varphi}(f)(\zeta) \right| \; =$$

$$= \; \left| f^*(\zeta) \right| \; = \; |B_n(\zeta)| V_p(\zeta) \; = \; \left\| B_n V_p \right\|_K,$$

які в поєднанні з (7) і доводять (6).

Зауваження. **1.** Для того щоб для системи φ, породженої послідовністю точок $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, справджувалося співвідношення $\lim_{n\to\infty}|B_n(z)| = 0$ рівномірно по z на будь-якій замкненій підмножині круга $\mathbb{D}$, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|a_k|) = \infty. \tag{8}$$

За цієї умови система φ є повною у просторі H_2 (див., наприклад, [1], гл. 10, [2], § 1).

2. Використовуючи інтегральну формулу Коші, нескладно показати, що $\lambda^*_{k,n,2,\varphi}(z) = 1$ для будь-якого $z \in \mathbb{D}$, якою б не була система $\varphi \in TM$.

Отже, при $p = 2$ оператор $U_{n,\Lambda^*,\varphi}$ ставить у відповідність функції f частинну суму порядку n її ряду Фур'є за системою φ, тобто

$$U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f) = S_{n,\varphi}(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\hat{f}_\varphi(k)\varphi_k.$$

При цьому рівність (6) набирає вигляду

$$\mathcal{E}_n(UH_2; K; \varphi) = \max_{f\in UH_2}\left\|f - S_{n,\varphi}(f)\right\|_K = \|B_n V_2\|_K.$$

3. За умов теореми 1 $\lambda_{k,n}(a_l) = 1$ і $B_n(a_l) = 0$, якщо $k \le l \le n-1$. Тому

$$U_{n,\Lambda,\varphi}(f)(a_l) = \sum_{k=0}^{l}\hat{f}_\varphi(k)\varphi_k(a_l) = f(a_l), \quad l = \overline{0, n-1},$$

тобто значення оператора $U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)$ інтерполюють функцію f у точках a_l, $l = \overline{0, n-1}$, з відповідною їх кратністю.

4. Для будь-якої функції $f \in H_2$ справджується рівність (див. формулу (27) в доведенні теореми 1)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\hat{f}_\varphi(k)\varphi_k(z) = f(z) - B_n(z)\int_{\mathbb{T}} f(w)\frac{\overline{B_n(w)}}{1-z\overline{w}}\,d\sigma(w) \quad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{9}$$

В роботі [3] (теорема 3) стверджується, що для даної функції $f \in H_2$ серед множини всіх значень виразу, що стоїть у правій частині рівності (9), коли в ньому B_n пробігатиме всю множину $\mathcal{B}_n$, міститиметься й раціональний дріб найкращого наближення в метриці простору H_2 функції f множиною раціональних дробів порядку n, усі полюси яких лежать зовні круга $\mathbb{D}$. Поєднавши цей факт з рівністю (9), можемо стверджувати, що для кожної функції $f \in H_2$ існує своя оптимальна система φ в тому розумінні, що частинна сума ряду Фур'є по цій системі буде раціональною функцією найкращого наближення в метриці H_2.

Наслідок 2. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, K *— компактна підмножина круга* $\mathbb{D}$. *Тоді для будь-якого натурального* n *справджується рівність*

$$L_n(UH_p;K) = \inf_{B_n\in\mathcal{B}_n\setminus\mathcal{B}_{n-1}} \left\| B_n V_p \right\|_K .$$

Для кожного фіксованого натурального n *існують оптимальна система* $\varphi^*\in TM$ *і єдина матриця* $\Lambda^*\in\mathcal{L}$, *елементи якої знаходяться за правилом* (5), *такі*, *що*

$$L_n(UH_p;K) = \max_{f\in UH_p} \left\| f - U_{n,\Lambda^*,\varphi^*}(f) \right\|_K = \left\| B_n^* V_p \right\|_K, \tag{10}$$

де B_n^* — n*-добуток Бляшке системи* φ^*.

Обґрунтування потребує лише рівність (10). Нехай $m_n = \inf_{B_n\in\mathcal{B}_n}\left\| B_n V_p \right\|_K$ і $\left\{B_n^j\right\}_{j\ge1}$, $B_n^j\in\mathcal{B}_n$, — послідовність добутків Бляшке така, що $\left\| B_n^j V_p \right\|_K \to m_n$, $j\to\infty$. Оскільки послідовність $\left\{B_n^j\right\}_{j\ge1}$ рівномірно обмежена в замкненому крузі $\overline{\mathbb{D}}$, то за принципом компактності з цієї послідовності можна виділити підпослідовність, яка буде рівномірно збігатися в середині $\mathbb{D}$ до деякої голоморфної функції, наприклад B_n^*. Отже, $m_n = \left\| B_n^* V_p \right\|_K$. За допомогою теореми Руше можна показати, що функція B_n^* має не більше n нулів в $\mathbb{D}$, які позначимо a_ν^*, $\nu = \overline{0, k-1}$, $1\le k\le n$. Використовуючи результат з [4], можна показати, що всі a_ν^* лежать в опуклій оболонці компакта K. Цей факт дозволяє виділити з послідовності $\left\{B_n^j\right\}_{j\ge1}$ підпослідовність, яка буде збігатися до B_n^* рівномірно і на $\mathbb{T}$. Тому функція B_n^* є добутком Бляшке степеня не більше n і має вигляд $B_n^*(z) = \lambda\prod_{\nu=0}^{k-1}\left(z-a_\nu^*\right)/\left(1-\bar{a}_\nu^* z\right)$, $|\lambda| = 1$.

Доповнимо набір $a_0^*, \ldots, a_{k-1}^*$ довільною нескінченною послідовністю $\left\{a_j\right\}_{j\ge k}$ точок з $\mathbb{D}$ і побудуємо по утвореній послідовності систему Такенаки – Мальмквіста φ^*. Виберемо функцію $f^* = \tilde{B}_n W_{\zeta,p}$, в якій ζ — точка, для якої $\left|\tilde{B}_n(\zeta)\right| V_p(\zeta) = \left\| \tilde{B}_n V_p \right\|_K$ і

$$\tilde{B}_n(z) := B_n^*(z)\prod_{j=k}^{n-1}\frac{-\left|a_j\right|}{a_j}\,\frac{z-a_j}{1-\bar{a}_j z}, \tag{11}$$

причому якщо $k = n$, то другий множник в (11) покладається рівним одиниці. Для величин $L_n(UH_p;K)$ та $\left\| f^* \right\|_K$ на підставі попередніх міркувань та наслідку 1 справджуються співвідношення

$$m_n \le L_n(UH_p;K) \le \mathcal{E}_n\left(UH_p;K;\varphi^*\right) = \left\| f^* \right\|_K = \left\| \tilde{B}_n V_p \right\|_K . \tag{12}$$

Але $\left|\tilde{B}_n(z)\right| \leq \left|B_n^*(z)\right| \quad \forall\, z \in \mathbb{D}$. Тому скрізь в (12) виконуються рівності. Оскільки $\tilde{B}_n \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_{n-1}$, то $m_n = \inf\left\{\left\|B_n V_p\right\|_K : B_n \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_{n-1}\right\}$. Числа a_j, $j = \overline{k, n-1}$, в (11) можна вибрати довільним чином. Наприклад, візьмемо $a_j = 0$. В такому випадку, якщо припустити, що $k < n$, отримаємо нерівність $\left\|\tilde{B}_n V_p\right\|_K \leq r^{n-k}\left\|B_n^* V_p\right\|_K < \left\|B_n^* V_p\right\|_K = m_n$, в якій r — радіус найменшого круга, що містить компакт K. Така нерівність є суперечливою, тому $k = n$ і $\tilde{B}_n = B_n^*$, тобто B_n^* є добутком Бляшке степеня точно n, а довільна система $\varphi^* \in TM$, побудована за послідовністю точок, перші n з яких збігаються з точками $a_0^*, \ldots, a_{n-1}^*$, є оптимальною для даного n.

***Зауваження* 5.** Нехай $A_p = A_p(K)$ — звуження одиничної кулі UH_p на компакт K, $C(K)$ — простір неперервних функцій на K з нормою $\|\cdot\|_K$ і $D_n\big(A_p;\, C(K)\big)$ — величина, яка означає поперечник порядку n за Колмогоровим, або Гельфандом, або лінійний поперечник класу A_p у просторі $C(K)$ (означення див., наприклад, у [5]). У роботі [5] показано, що $D_n\big(A_\infty;\, C(K)\big) = \inf_{B_n \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_{n-1}} \| B_n \|_K$. Зіставляючи цю рівність з рівністю (10), бачимо, що при $p = \infty$ і даному n оптимальна система φ^* є оптимальною і в сенсі поперечника за Колмогоровим, тобто n-вимірний підпростір з базисом $\left\{\varphi_0^*, \ldots, \varphi_{n-1}^*\right\}$ є найкращим наближуючим підпростором для класу A_∞. При цьому лінійний оператор $U_{n, \Lambda^*, \varphi^*}$ є оператором, значення якого найкраще наближають клас A_∞ серед значень усіх лінійних операторів L_n на $C(K)$ рангу n.

Зазначимо, що у другій частині наслідку 2 стверджується існування своєї оптимальної системи Такенаки – Мальмквіста для кожного натурального n. Така обставина викликана геометричною будовою компакту K. У наступному твердженні наводиться приклад компакту K, для якого існує система Такенаки – Мальмквіста, оптимальна для всіх натуральних n.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq \rho < 1$ *і* $K = \{z \in \mathbb{D} \colon |z| \leq \rho\}$. *Тоді*:

1) *для кожного натурального* n *справджується рівність*

$$L_n(UH_p; K) = \rho^n V_p(\rho);$$

2) *для всіх натуральних* n *оптимальною ортонормованою системою Такенаки – Мальмквіста є система* $\varphi^* = \left\{z^k\right\}_{k=0}^{\infty}$;

3) *найкращий лінійний метод наближення є єдиним і породжуються числовою матрицею* $\Lambda^* = (\lambda_{k,n}^*)$, *елементи якої обчислюються за формулою*

$$\lambda_{k,n}^* = \left(1-\rho^2\right)^{-2/p} \sum_{\nu=0}^{n-k-1} (-1)^\nu \binom{2/p}{\nu} \left(\rho^{2\nu} - \rho^{2(n-k)}\right), \quad n = \overline{1, \infty}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{13}$$

де

$$\binom{2/p}{0} = 1, \quad \binom{2/p}{\nu} := \frac{2/p(2/p-1)\ldots(2/p-\nu+1)}{\nu!}, \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

Справді, в [5] показано, що $\inf_{B_n \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_{n-1}} \| B_n \|_K = \rho^n$, причому єдиним, з точністю до множника $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, добутком Бляшке степеня n, для якого досягається точна нижня межа, є функція $B_n^*(z) = z^n$. З урахуванням цього факту, очевидної рівності $\inf_{B_n \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{n-1}} \| B_n V_p \|_K = \inf_{B_n \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_{n-1}} \| B_n \|_K V_p(\rho)$ та рівності (10) переконуємося в правильності тверджень 1 і 2. Формула (13) випливає з формули (5), в якій покладено $a_k = 0$, $k = \overline{0, n-1}$ (детальні викладки див. у [6]).

2. Екстремальні властивості та найкраще наближення ядра Коші. Результати цього пункту є етапами доведення теореми 1. Проте вони не позбавлені й самостійного інтересу.

Ядром Коші для круга $\mathbb{D}$ називається функція C, визначена в $\mathbb{C}^2 := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ таким чином:

$$C(z, w) = \frac{1}{1 - \bar{z} w}.$$

Відомо, що функція C є твірним ядром простору H_p, $1 \le p \le \infty$, тобто в будь-якій точці $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \langle f, C(z, \cdot) \rangle \quad \forall f \in H_p. \tag{14}$$

Нехай $n \in \mathbb{Z}_+$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

$$H_{p,\varphi}^n := \left\{ f \in H_p \colon \hat{f}_\varphi(k) = 0, \ k = \overline{0, n-1} \right\}$$

і $H_{p,\varphi}^0 = H_p$.

Легко бачити, що ядро

$$C_{n,\varphi}(z, w) := C(z, w) - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\varphi_k(z)} \varphi_k(w) \tag{15}$$

має властивість відтворення по відношенню до функцій простору $H_{p,\varphi}^n$, тобто в будь-якій точці $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \left\langle f, C_{n,\varphi}(z, \cdot) \right\rangle \quad \forall f \in H_{p,\varphi}^n. \tag{16}$$

Зрозуміло, що функції C і $C_{n,\varphi}$ у вказаному сенсі не єдині твірні ядра для просторів H_p і $H_{p,\varphi}^n$ відповідно.

Нашою найближчою метою є побудова інших твірних ядер для зазначених просторів так, щоб ці ядра мали певні екстремальні властивості.

Нехай $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$ і B_n — n-добуток Бляшке системи φ. Означимо в $\overline{\mathbb{D}}^2$ функцію $C_{p,n,\varphi}$ правилом

$$C_{p,n,\varphi}(z, w) := B_n(z) \overline{B_n(w)} (1 - \bar{z} w)^{2/p} \frac{(1 - |z|^2)^{1-2/p}}{|1 - z\overline{w}|^2}. \tag{17}$$

Теорема 2. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *і* $\varphi \in TM$. *Якщо функція* f *належить простору* $H_{p,\varphi}^n$, *то для кожного* $z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} f(w) C_{p,n,\varphi}(z, w) d\sigma(w). \tag{18}$$

Доведення. Зафіксуємо $z \in \mathbb{D}$ і розглянемо функцію g, означену в $\mathbb{D}$ правилом

$$g(w) := (1 - |z|^2)^{1-2/p} f(w)(1 - \bar{z}w)^{2/p-1}.$$

Нехай $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовність точок, яка породжує систему φ, і

$$R_0(w) = \frac{\sqrt{1 - |a_0|^2}}{w - a_0}, \qquad R_k(w) = \frac{\sqrt{1 - |a_k|^2}}{w - a_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{-|a_j|}{\bar{a}_j} \frac{1 - \bar{a}_j w}{w - a_j}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\overline{\varphi_k(w)} = wR_k(w) \ \ \forall\, w \in \mathbb{T}$, то за теоремою про лишки маємо формулу

$$\hat{f}_{\varphi}(0) = f(a_0),$$

$$\hat{f}_{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} f(w) R_k(w) dw = \sum_{\nu=0}^{k} \left(\operatorname*{res}_{w=a_\nu} f(w) R_k(w) \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} \left(\frac{1}{(k_\nu - 1)!} \lim_{w \to a_\nu} \frac{d^{k_\nu - 1}}{dw^{k_\nu - 1}} \left((w - a_\nu)^{k_\nu} f(w) R_k(w) \right) \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

де k_ν — кратність множника $(1 - \bar{a}_\nu w)/(w - a_\nu)$ у виразі $R_k(w)$, причому $\sum_{\nu=0}^{k-1} k_\nu = k.$

Якщо функція f належить простору $H_{p,\varphi}^n$, то з попередньої формули послідовно для кожного $k = 0, 1, \ldots, n-1$ отримуємо значення $f(a_k) = 0$. Тому $g(a_k) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$. Отже, обчислюючи коефіцієнти Фур'є функції g по системі φ так, як це зроблено для функції f, знаходимо, що і $\hat{g}_{\varphi}(k) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$, тобто $g \in H_{p,\varphi}^n$.

Тому згідно з (16) для функції g в точці $w = z$ маємо рівність

$$f(z) = g(z) = \int_{\mathbb{T}} (1 - |z|^2)^{1-2/p} f(w)(1 - \bar{z}w)^{2/p-1} \overline{C_{n,\varphi}(z, w)} d\sigma(w).$$

На завершення доведення теореми залишається скористатися тотожністю [2]: для кожного фіксованого $z \in \mathbb{D}$

$$C_{n,\varphi}(z, w) = \overline{B_n(z)} B_n(w) \frac{1}{1 - \bar{z}w} \quad \forall\, w \in \mathbb{T}.$$

Нехай

$$B(z, q, n, \varphi) := \inf \left\{ \| C(z, \cdot) - g(\cdot) \|_{L_q(\mathbb{T})} : g \in L_{p,\varphi}^{n,\perp}(\mathbb{T}) \right\}, \tag{19}$$

де

$$L_{p,\varphi}^{n,\perp}(\mathbb{T}) = \inf \left\{ g \in L_q(\mathbb{T}) : \langle f, g \rangle = 0 \quad \forall\, f \in H_{p,\varphi}^n \right\}.$$

У наступному твердженні дається точне значення величини $B(z, q, n, \varphi)$ та вказується екстремальна функція g_z, для якої досягається точна нижня межа в (19).

Теорема 3. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \in TM$ *і* B_n — *n-добуток Бляшке системи* φ. *Тоді для кожного* $z \in \mathbb{D}$

$$B(z, q, n, \varphi) = |B_n(z)| V_p(z), \tag{20}$$

а екстремальною в (19) *є єдина функція*

$$g_z(\cdot) = C(z, \cdot) - \overline{C_{p,n,\varphi}(z, \cdot)}. \tag{21}$$

Доведення. Зафіксуємо $z \in \mathbb{D}$. Для оцінки зверху величини $B(z, q, n, \varphi)$ візьмемо функцію g_z, визначену правилом (21), і покажемо, що $g_z(\cdot) \in L^{n,\perp}_{q,\varphi}(\mathbb{T})$.

Насамперед зауважимо, що $\sup_{w \in \overline{\mathbb{D}}} |g_z(w)| < \infty$ і тим паче $g_z(\cdot) \in L_q(\mathbb{T})$. Далі, згідно з (14) і (18) для будь-якої функції $f \in H^n_{p,\varphi}$ справджуються рівності

$$\langle f, g_z \rangle = \langle f, C(z, \cdot) \rangle - \left\langle f, \overline{C_{p,n,\varphi}(z, \cdot)} \right\rangle = f(z) - f(z) = 0. \tag{22}$$

Отже, $g_z \in L^{n,\perp}_{q,\varphi}(\mathbb{T})$.

Тепер для величини $B(z, q, n, \varphi)$ легко отримати оцінку зверху:

$$B(z, q, n, \varphi) \le \| C(z, \cdot) - g_z(\cdot) \|_{L_q(\mathbb{T})} = \left\| C_{p,n,\varphi}(\cdot, z) \right\|_{L_q(\mathbb{T})} = |B_n(z)| V_p(z). \tag{23}$$

З іншого боку, за теоремою двоїстості (див., наприклад, [7, с. 137]) і формулою (14)

$$B(z, q, n, \varphi) = \sup \left\{ |\langle f, C(z, \cdot) \rangle| : f \in H^n_{p,\varphi}, \| f \|_{H_p} \le 1 \right\} =$$

$$= \sup \left\{ |f(z)| : f \in H^n_{p,\varphi}, \| f \|_{H_p} \le 1 \right\} =: A(z, p, n, \varphi). \tag{24}$$

Для оцінки знизу величини $A(z, p, n, \varphi)$ візьмемо функцію f^*, визначену правилом

$$f^*(w) = B_n(w) \left(\frac{1 - |z|^2}{(1 - \bar{z} w)^2} \right)^{1/p}.$$

Легко бачити, що $\left\| f^* \right\|_{H_p} = 1$. Окрім цього, для всіх $k = 0, 1, \ldots, n-1$ за інтегральною формулою Коші справджується рівність

$$\hat{f}^*_\varphi(k) = \int_{\mathbb{T}} B_n(w) \left(\frac{1 - |z|^2}{(1 - \bar{z} w)^2} \right)^{1/p} \frac{\sqrt{1 - |a_k|^2}}{1 - \overline{w} a_k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{-|a_j|}{\bar{a}_j} \frac{\overline{w} - \bar{a}_j}{1 - a_j \overline{w}} d\sigma(w) =$$

$$= \left(1 - |z|^2\right)^{1/p} \sqrt{1 - |a_k|^2}\, \lambda \int_{\mathbb{T}} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{w - a_j}{1 - \bar{a}_j w} \frac{1}{(1 - \bar{z} w)^{2/p}} \frac{d\sigma(w)}{1 - \overline{w} a_k} =$$

$$= \left(1 - |z|^2\right)^{1/p} \sqrt{1 - |a_k|^2}\, \lambda \prod_{j=k}^{n-1} \frac{a_k - a_j}{1 - \bar{a}_j a_k} \frac{1}{(1 - \bar{z} a_k)^{2/p}} = 0, \quad |\lambda| = 1. \tag{25}$$

Отже, $f^* \in H^n_{p,\varphi}$ і тому

$$A(z, p, n, \varphi) \;\geq\; \left|f^*(z)\right| \;=\; |B_n(z)| V_p(z). \tag{26}$$

Зіставивши співвідношення (23) – (26), переконуємось у правильності рівності (20).

Далі, оскільки для всіх значень параметра $p \in [1, \infty]$ знайдеться екстремальна функція f^*, для якої досягається точна верхня межа в (24), екстремальна функція g_z є єдиною (див. доведення теорем 1.2 і 1.3 в [7], гл. VI).

3. Доведення теореми 1. Виберемо функцію g_ζ, означену правилом (21), і розглянемо матрицю Λ^*, в якій

$$\lambda^*_{k,n}(\zeta) \;=\; \frac{1}{\varphi_k(\zeta)} \left\langle \varphi_k, g_\zeta \right\rangle \;=\; 1 - \frac{1}{\varphi_k(\zeta)} \int_{\mathbb{T}} \varphi_k(w) C_{n,p,\varphi}(\zeta, w)\, d\sigma(w), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Функції $\lambda^*_{k,n}(\zeta)$ означені коректно, оскільки в точках a_j з урахуванням їх кратності виконуються рівності $\varphi_k(a_j) = C_{n,p,\varphi}(a_j, w) = 0$, $j = \overline{0, k-1}$, $k = \overline{1, n-1}$. Зауважимо, що таке визначення $\lambda^*_{k,n}(\zeta)$ після очевидних перетворень збігається з формулою (5).

Нехай $f \in H_p$ і $S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}_\varphi(k) \varphi_k$. Тоді функція $f - S_n(f)$ належить простору $H^n_{p,\varphi}$ і згідно з (22)

$$\left\langle f, g_\zeta \right\rangle \;=\; \left\langle f - S_n(f), g_\zeta \right\rangle + \left\langle S_n(f), g_\zeta \right\rangle \;=\; \left\langle S_n(f), g_\zeta \right\rangle \;=$$

$$=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\varphi_k(\zeta)} \left\langle \varphi_k, g_\zeta \right\rangle \hat{f}_\varphi(k) \varphi_k(\zeta) \;=\; U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)(\zeta).$$

Звідси з урахуванням (14) випливає тотожність

$$f(\zeta) - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)(\zeta) \;=\; f(\zeta) - \left\langle f, g_\zeta \right\rangle \;=$$

$$=\; \langle f, C(\zeta, \cdot) \rangle - \left\langle f, g_\zeta \right\rangle \;=\; \left\langle f, \overline{C_{n,p,\varphi}(\zeta, \cdot)} \right\rangle. \tag{27}$$

Отже,

$$\inf_{\Lambda \in \mathcal{L}} \sup_{f \in UH_p} \left| f(\zeta) - U_{n,\Lambda,\varphi}(f)(\zeta) \right| \;\leq\; \sup_{f \in UH_p} \left| f(\zeta) - U_{n,\Lambda^*,\varphi}(f)(\zeta) \right| \;=$$

$$=\; \sup_{f \in UH_p} \left| \left\langle f, \overline{C_{n,p,\varphi}(\zeta, \cdot)} \right\rangle \right|. \tag{28}$$

За нерівністю Гельдера з урахуванням рівності (23) маємо оцінку

$$\sup_{f \in UH_p} \left| \left\langle f, \overline{C_{n,p,\varphi}(\zeta, \cdot)} \right\rangle \right| \;\leq\; \sup_{f \in UH_p} \|f\|_{H_p} \left\| C_{n,p,\varphi}(\cdot, \zeta) \right\|_{L_p(\mathbb{T})} \;=\; |B_n(\zeta)| V_p(\zeta), \tag{29}$$

де $1/p + 1/q = 1$ і B_n — n-добуток Бляшке системи φ.

Функція $f^* = B_n W_{\zeta,p}$, як це показано в доведенні теореми 3 (див. (25)), належить $H^n_{p,\varphi}$ і $f^* \in UH_p$. Тому для неї $U_{n,\Lambda,\varphi}(f) = 0$, якою б не була матриця Λ, і внаслідок цього

$$\inf_{\Lambda\in\mathcal{L}} \sup_{f\in UH_p} \left| f(\zeta) - U_{n,\Lambda,\varphi}(f)(\zeta) \right| \geq \left| f^*(\zeta) \right| = |B_n(\zeta)| V_p(\zeta). \tag{30}$$

Об'єднавши співвідношення (28) – (30), отримаємо рівність (4).

Доведемо тепер єдиність матриці Λ^*, яка породжує найкращий лінійний метод наближення. Нехай функція g належить $L^{n,\perp}_{p,\varphi}(\mathbb{T})$. Легко бачити, що функцію g майже скрізь на $\mathbb{T}$ можна подати у вигляді $g = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{g}_\varphi(k)\varphi_k + \bar{h}$, де $\hat{g}_\varphi(k) = \langle g, \varphi_k\rangle$ і h — кутові граничні значення деякої функції з $H^1_{p,\varphi}$. Отже, для будь-якої функції $f \in UH_p$

$$\langle f, (C(\zeta,\cdot) - g)\rangle = f(\zeta) - \langle f, g\rangle = f(\zeta) - \left\langle f, \sum_{k=0}^{n-1} \hat{g}_\varphi(k)\varphi_k \right\rangle =$$

$$= f(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\hat{g}_\varphi(k)}\, \hat{f}_\varphi(k).$$

Звідси за теоремою двоїстості маємо співвідношення

$$\sup_{f\in UH_p} \left| f(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^*_{k,n}(\zeta) \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k(\zeta) \right| \geq \inf_{g\in L^{n,\perp}_{p,\varphi}(\mathbb{T})} \sup_{f\in UH_p} \left| f(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\hat{g}_\varphi(k)}\, \hat{f}_\varphi(k) \right| \geq$$

$$\geq \sup_{f\in UH^n_{p,\varphi}} |f(\zeta)| = \inf_{g\in L^{n,\perp}_{p,\varphi}(\mathbb{T})} \| C(\zeta,\cdot) - g \|_{L_q(\mathbb{T})}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Згідно з доведеним вище у цих співвідношеннях виконуються лише рівності, а згідно з теоремою 3 функція g_ζ є єдиною функцією з $L^{n,\perp}_{p,\varphi}(\mathbb{T})$, для якої $\| C(\zeta,\cdot) - g_\zeta \|_{L_q(\mathbb{T})} = \inf_{g\in L^{n,\perp}_{p,\varphi}(\mathbb{T})} \| C(\zeta,\cdot) - g \|_{L_q(\mathbb{T})}$. Отже, функція g_ζ буде єдиною екстремальною функцією і в тому сенсі, що

$$\inf_{g\in L^{n,\perp}_{p,\varphi}(\mathbb{T})} \sup_{f\in UH_p} \left| f(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\hat{g}_\varphi(k)}\, \hat{f}_\varphi(k) \right| = \sup_{f\in UH_p} \left| f(\zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\hat{g}_{\zeta,\varphi}(k)}\, \hat{f}_\varphi(k) \right|.$$

1. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 508 с.
2. *Джрбашян М. М.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. – 1967. – **2**, № 1. – С. 3 – 51.
3. *Ерохин В. Д.* О наилучшем приближении аналитических функций посредством рациональных дробей со свободными полюсами // Докл. АН СССР. – 1959. – **128**, № 1. – С. 29 – 32.
4. *Walsh J. L.* Note on the location of zeros of extremal polynomials in the non-euclidean plane // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. – 1952. – **4**. – P. 157 – 160.
5. *Fisher S. D., Miccelli C. A.* The n-widths of sets of analytic functions // Duke Math. J. – 1980. – **47**, № 4. – P. 789 – 801.
6. *Савчук В. В.* Найкращі лінійні методи наближення функцій класу Харді H_p // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 919 – 925.
7. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.

Одержано 13.08.07