УДК 517.5

Ю. І. Харкевич, Т. В. Жигалло (Волин. нац. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ КЛАСУ $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ БІГАРМОНІЧНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ПУАССОНА В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ*

We obtain asymptotic equalities for upper bounds of approximations of functions from the class $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ by the Poisson biharmonic operators in the uniform metric.

Получены асимптотические равенства для верхних граней приближений функций из класса $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ бигармоническими операторами Пуассона в равномерной метрике.

Нехай $\hat{L}_1$ — множина функцій φ, заданих на всій дійсній осі R із скінченною нормою $\|\varphi\|_{\hat{1}} = \sup\limits_{a\in R}\int_a^{a+2\pi}|\varphi(t)|dt$, $\hat{L}_\infty$ — множина вимірних і суттєво обмежених на всій осі функцій із скінченною нормою $\|\varphi\|_{\hat{\infty}} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in R}|\varphi(t)|$. Через $\hat{C}$ позначають множину неперервних, заданих на дійсній осі функцій із скінченною нормою $\|f\|_{\hat{C}} = \sup\limits_{x\in R}\big|f(x)\big|$.

О. І. Степанцем (див., наприклад, [1, 2]) означено класи $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ функцій, заданих на всій дійсній осі таким чином. Нехай β, що належить R, і неперервна при всіх $v \geq 0$ функція $\psi(v)$ такі, що перетворення

$$\hat{\psi}(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv$$

є сумовним на всій числовій осі. Через $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ позначають множину функцій $f(x) \in \in \hat{L}_1$, які майже для всіх $x \in R$ можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dvdt, \tag{1}$$

де A_0 — деяка стала, $\varphi \in \hat{L}_1$, $\beta \in R$, а інтеграл слід розуміти як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються.

Якщо $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset \hat{L}_1$, то вважають, що $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. $\hat{C}^{\psi}_{\beta}$ ($\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$) — підмножина неперервних функцій із $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ ($\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$),

$$\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty} = \left\{f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta} \colon \|\varphi\|_{\hat{\infty}} \leq 1\right\}.$$

Функцію $\varphi(\cdot)$ із (1) називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ (див., наприклад, [3, с. 170]) і позначають $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

Через $\mathfrak{M}$ позначають (див. [4, с. 93] або [5, с. 159]) множину додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(v)$, $v \geq 1$, для яких $\lim\limits_{v\to\infty}\psi(v) = 0$. Із множини $\mathfrak{M}$ виділяють підмножини $\mathfrak{M}_0$ та $\mathfrak{M}_C$ (див., наприклад, [5, с. 160]):

*Виконано за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект 25.1/043).

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ \psi \in \mathfrak{M} : 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \le K \ \forall t \ge 1 \right\}$$

і

$$\mathfrak{M}_C = \left\{ \psi \in \mathfrak{M} \colon 0 < K_1 \le \frac{t}{\eta(t) - t} \le K_2 \ \ \forall t \ge 1 \right\},$$

де

$$\eta(t) = \eta(\psi, t) = \psi^{-1} \left(\frac{1}{2} \psi(t) \right),$$

а ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ. Тут і далі через K, K_i будемо позначати сталі, взагалі кажучи, не одні і ті ж самі в різних співвідношеннях.

Кожну функцію $\psi \in \mathfrak{M}$ продовжимо на проміжок $[0, 1)$ таким чином, щоб:

1) отримана функція (яку, як і раніше, будемо позначати через $\psi(v)$) була неперервною при всіх $v \ge 0$, $\psi(0) = 0$;

2) похідна $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ мала обмежену варіацію на проміжку $[0, \infty)$ і $\psi(v)$ мала неперервну другу похідну на $[0, \infty)$ скрізь, за винятком точки $v = 1$;

3) $\psi(v)$ була зростаючою та опуклою донизу на $[0, 1]$.

Множину таких функцій позначимо через $\mathfrak{A}$. Підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t} \, dt < \infty$, позначимо через $\mathfrak{A}'$,

$$\mathfrak{A}_C = \Big\{ \psi(v) \in \mathfrak{A} \colon \psi \in \mathfrak{M}_C, \ \ v \in [1, \infty) \Big\}.$$

Нехай $\Lambda = \left\{ \lambda_\sigma \left(\frac{v}{\sigma} \right) \right\}$ — сукупність неперервних функцій при всіх $v \ge 0$, залежних від дійсного параметра σ. Кожній функції $f \in \hat{L}_\beta^\psi$ поставимо у відповідність вираз вигляду

$$U_\sigma(f; x; \Lambda) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi \left(x + t \right) \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \psi(v) \lambda_\sigma \left(\frac{v}{\sigma} \right) \cos \left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv dt,$$

де $\psi(v)$ — неперервна при всіх $v \ge 0$ функція, $\beta \in R$. У випадку, коли $\lambda_\sigma(v) = \left[1 + \frac{v\sigma}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\sigma}} \right) \right] e^{-v}$, $\sigma \in (0, \infty)$, функції $U_\sigma(f; x; \Lambda)$ будемо позначати через $B_\sigma(f; x)$:

$$B_\sigma(f; x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi \left(x + t \right) \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \psi(v) \times$$

$$\times \left[1 + \frac{v}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{\sigma}} \right) \right] e^{-\frac{v}{\sigma}} \cos \left(vt + \frac{\beta\pi}{2} \right) dv dt. \qquad (2)$$

Оператор B_σ, $\sigma \in (0, \infty)$, що діє на функцію f за правилом (2), будемо називати бігармонічним оператором Пуассона. Повторюючи міркування, використані при доведенні твердження 1.1 роботи [3, с. 169], неважко переконатися в тому, що за умови періодичності функцій f оператор B_σ є відомим бігармонічним інтегралом Пуассона (див., наприклад, [6]).

У даній роботі вивчається асимптотична поведінка величини

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}, B_\sigma\right)_{\hat{C}} = \sup_{f\in\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(x) - B_\sigma(f,x)\|_{\hat{C}} \tag{3}$$

при $\sigma \to \infty$, довільному дійсному β і $\psi \in \mathfrak{A}$.

Дослідження, пов'язані з вивченням структурних та апроксимативних властивостей класів $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, розпочаті О. І. Степанцем [1, 2] та продовжені його учнями. Зокрема, асимптотичні рівності для верхніх меж наближень функцій із класів $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ та $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ різноманітними лінійними операторами отримано у роботах М. Г. Дзімістарішвілі [7–9], В. І. Рукасова, С. О. Чайченка [10, 11], О. В. Островської [12], Л. А. Репети [13], О. І. Степанця та І. В. Соколенка [14], І. В. Кальчук [15] та ін.

Зазначимо, що дана робота є продовженням досліджень авторів [16]. Тут, зокрема, розглянуто випадок, коли функція $\psi(v)$, що задає клас $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$, спадає до нуля при $v \to \infty$ швидше за функцію $\dfrac{1}{v^2}$, яка визначає порядок насичення лінійного методу наближення, породженого оператором B_σ.

Покладемо

$$\tau(v) = \tau_\sigma(v;\psi) = \left(1 - [1+\gamma v]\, e^{-v}\right) \frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \tag{4}$$

де функція $\psi \in \mathfrak{A}$ є визначеною і неперервною при всіх $v \geq 0$,

$$\gamma = \gamma_\sigma = \frac{\sigma}{2}\left(1 - e^{-\frac{2}{\sigma}}\right).$$

Враховуючи співвідношення (4), із (1) та (2) отримуємо

$$f(x) - B_\sigma(f;x) = \psi(\sigma) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \hat{\tau}_\beta(t)dt. \tag{5}$$

Тут $\hat{\tau}_\beta(t)$ — перетворення функції $\tau(v)$ вигляду $\hat{\tau}_\beta(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \tau(v)\cos\biggl(vt + + \frac{\beta\pi}{2}\biggr)dv$.

Подамо функцію $\tau(v)$ у вигляді $\tau(v) = \varphi(v) + \mu(v)$, де

$$\varphi(v) = \left(\frac{v^2}{2} + \frac{v}{\sigma}\right)\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \quad v \geq 0, \tag{6}$$

$$\mu(v) = \left(1 - [1+\gamma_\sigma v]\, e^{-v} - \frac{v^2}{2} - \frac{v}{\sigma}\right)\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \quad v \geq 0, \tag{7}$$

причому на проміжку $\left[0, \dfrac{1}{\sigma}\right]$ функція $\psi(\sigma v)$ є опуклою донизу, зростаючою і $\psi(0) = 0$.

Далі через $f_1(x)$ та $f_2(x)$ позначимо такі функції:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t) \int\limits_{0}^{\infty} v\psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dvdt, \tag{8}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi(x+t) \int\limits_0^\infty v^2 \psi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv dt, \tag{9}$$

де функція $\psi(v)$ визначена та неперервна на проміжку $[0,\infty)$, $\beta \in R$. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Якщо* $\psi \in \mathfrak{A}_C$, *функція* $g(v) = v^2\psi(v)$ *опукла донизу при* $v \in \in [b,\infty)$, $b \geq 1$, *і*

$$\int\limits_1^\infty \frac{g(v)}{v} dv < \infty, \tag{10}$$

то при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}; B_\sigma\right)_{\hat{C}} = \frac{1}{\sigma^2} \sup_{f \in \hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \left\| f_1(x) + \frac{f_2(x)}{2} \right\|_{\hat{C}} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\sigma^3} \int\limits_1^\sigma t^2\psi(t)dt + \frac{1}{\sigma^2} \int\limits_\sigma^\infty t\psi(t)dt\right). \tag{11}$$

Доведення. Нехай $\hat{\varphi}_\beta(t)$ та $\hat{\mu}_\beta(t)$ — перетворення функцій φ та μ вигляду

$$\hat{\varphi}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv, \tag{12}$$

$$\hat{\mu}_\beta(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv. \tag{13}$$

З урахуванням інтегрального зображення (5) величину (3) запишемо у вигляді

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}; B_\sigma\right)_{\hat{C}} = \sup_{f \in \hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \left\| \psi(\sigma) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \hat{\tau}_\beta(t) dt \right\|_{\hat{C}} =$$

$$= \sup_{f \in \hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \left\| \psi(\sigma) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\beta^\psi\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \left(\hat{\varphi}_\beta(t) + \hat{\mu}_\beta(t)\right) dt \right\|_{\hat{C}}. \tag{14}$$

Переконаємося, що перетворення $\hat{\varphi}_\beta(t)$ та $\hat{\mu}_\beta(t)$, визначені співвідношеннями (12) та (13) відповідно, є сумовними на всій числовій осі.

Покажемо спочатку збіжність інтеграла $A(\varphi)$:

$$A(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(t)| \, dt. \tag{15}$$

Для цього, згідно з теоремою 1 роботи [17], досить показати збіжність інтегралів

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} v|d\varphi'(v)|, \quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |v-1||d\varphi'(v)|, \tag{16}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_0^{\infty} \frac{|\varphi(v)|}{v}dv, \quad \int\limits_0^1 \frac{|\varphi(1-v)-\varphi(1+v)|}{v}dv. \tag{17}$$

Розглянемо перший інтеграл із (16). Із співвідношення (6) маємо

$$d\varphi'(v) = \frac{1}{\psi(\sigma)}\left(\psi(\sigma v) + 2\left(v+\frac{1}{\sigma}\right)\sigma\psi'(\sigma v) + \left(\frac{v^2}{2}+\frac{v}{\sigma}\right)\sigma^2\psi''(\sigma v)\right)dv. \tag{18}$$

Оскільки на проміжку $\left[0,\dfrac{1}{\sigma}\right]$ додатна функція $\psi(\sigma v)$ є опуклою донизу і монотонно зростаючою, то з (18) отримуємо

$$d\varphi'(v) > 0, \quad v \in \left[0,\frac{1}{\sigma}\right]. \tag{19}$$

Звідси, беручи до уваги, що $\varphi\left(\dfrac{1}{\sigma}\right) = \dfrac{3\psi(1)}{2\sigma^2\psi(\sigma)}$ і $\varphi'\left(\dfrac{1}{\sigma}\right) = \dfrac{4\psi(1)+3\psi'(1-0)}{2\sigma\psi(\sigma)}$ при $0 \le v \le \dfrac{1}{\sigma}$, знаходимо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} v|d\varphi'(v)| = \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} v d\varphi'(v) = \frac{1}{\sigma}\varphi'\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\right). \tag{20}$$

Враховуючи, що $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{1}{2}} v|d\varphi'(v)| \le \int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} v|d\varphi'(v)|$ і $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} |v-1||d\varphi'(v)| \le \int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} v|d\varphi'(v)|$, одержуємо оцінку інтеграла

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} v|d\varphi'(v)| \tag{21}$$

на кожному із проміжків $\left[\dfrac{1}{\sigma},\dfrac{b}{\sigma}\right)$ та $\left[\dfrac{b}{\sigma},\infty\right)$ (при $\sigma > 2b$).

З огляду на (18), враховуючи, що функція $\psi(v)$ є опуклою донизу та спадною при $v \ge 1$, отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} v|d\varphi'(v)| \le \frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}\left(\frac{v^3}{2}+\frac{v^2}{\sigma}\right)\sigma^2\psi''(\sigma v)dv +$$

$$+\frac{2}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}\left(v^2+\frac{v}{\sigma}\right)\sigma|\psi'(\sigma v)|dv + \frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} v\psi(\sigma v)dv. \tag{22}$$

Зінтегрувавши частинами перший та другий інтеграли з правої частини нерівності (22) та врахувавши, що $\psi(\sigma v) \leq \psi(1)$ при $v \in \left[\frac{1}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}\right)$, будемо мати

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} v|d\varphi'(v)| \leq \frac{K_1}{\sigma^2\psi(\sigma)}. \tag{23}$$

Для оцінки інтеграла (21) на проміжку $\left[\frac{b}{\sigma}, \infty\right)$ використаємо співвідношення

$$\lim_{v\to\infty} v^2\psi(v) = 0, \tag{24}$$

$$\lim_{v\to\infty} v^3\psi'(v) = 0, \tag{25}$$

справедливість яких випливає із наступних міркувань. Оскільки функція $g(v) = v^2\psi(v)$ є опуклою донизу при $v \geq b$, $b \geq 1$, то можливі такі випадки: 1) $\lim\limits_{v\to\infty} v^2\psi(v) = 0$; 2) $\lim\limits_{v\to\infty} v^2\psi(v) = K > 0$; 3) $\lim\limits_{v\to\infty} v^2\psi(v) = \infty$.

Нехай $\lim\limits_{v\to\infty} v^2\psi(v) = K > 0$, тоді знайдеться таке $0 < K_1 < K$, що для всіх $v \geq 1$ $v^2\psi(v) > K_1$, отже, $v\psi(v) > \dfrac{K_1}{v}$. А це суперечить тому, що функція $v\psi(v)$, згідно з умовою теореми, є сумовною на $[1, \infty)$.

Нехай тепер $\lim\limits_{v\to\infty} v^2\psi(v) = \infty$, тобто для довільного $M > 0$ існує таке $N > 0$, що для всіх $v > N$ виконується нерівність $v^2\psi(v) > M$. Тоді

$$\int\limits_1^x v\psi(v)dv = \int\limits_1^N v\psi(v)dv + \int\limits_N^x \frac{v^2\psi(v)}{v}dv > K_2 + \int\limits_N^x \frac{M}{v}dv = K_2 + M(\ln x - \ln N).$$

Таким чином, знову прийшли до суперечності з умовою (10). З огляду на викладене робимо висновок про істинність співвідношення (24).

Покажемо тепер, що має місце (25). Оскільки функція $\left(v^2\psi(v)\right)'$ є сумовною на $[1, \infty)$, то $\lim\limits_{v\to\infty} \int_{v/2}^{v} \left(x^2\psi(x)\right)' dx = 0$. Внаслідок того, що при $v \geq b$ функція $v^2\psi(v)$ є опуклою донизу, функція $-\left(v^2\psi(v)\right)'$ при $v \geq b$ не зростає, і тому

$$\int\limits_{\frac{v}{2}}^{v} \left(-\left(x^2\psi(x)\right)'\right) dx > -\left(v - \frac{v}{2}\right)\left(2v\psi(v) + v^2\psi'(v)\right) = -v^2\psi(v) - \frac{1}{2}v^3\psi'(v).$$

Звідси і з (24) випливає справедливість (25).

Використовуючи співвідношення (18) та враховуючи властивості функції $\psi(v) \in \mathfrak{M}$, $v \geq 1$, отримуємо

$$\int\limits_{\frac{b}{\sigma}}^{\infty} v\big|d\varphi'(v)\big| \leq \frac{1}{\psi(\sigma)} \int\limits_{\frac{b}{\sigma}}^{\infty} \left(\frac{v^3}{2}+\frac{v^2}{\sigma}\right)\sigma^2\psi''(\sigma v)dv+$$

$$+\frac{2}{\psi(\sigma)} \int\limits_{\frac{b}{\sigma}}^{\infty} \left(v^2+\frac{v}{\sigma}\right)\sigma\big|\psi'(\sigma v)\big|dv + \frac{1}{\psi(\sigma)} \int\limits_{\frac{b}{\sigma}}^{\infty} v\psi(\sigma v)dv. \tag{26}$$

Зінтегрувавши частинами перший та другий інтеграли із правої частини нерівності (26) та врахувавши співвідношення (24), (25) і (10), будемо мати

$$\int\limits_{\frac{b}{\sigma}}^{\infty} v|d\varphi'(v)| \leq \frac{K_2}{\sigma^2\psi(\sigma)}. \tag{27}$$

Таким чином, із співвідношень (20), (23) та (27) випливає, що при $\sigma \to \infty$

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} v|d\varphi'(v)| = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\right), \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |v-1|\big|d\varphi'(v)\big| = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\right). \tag{28}$$

Враховуючи (6) та умову (10), отримуємо наступну оцінку для першого інтеграла із (17):

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\varphi(v)|}{v}dv \leq \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{v}{2}+\frac{1}{\sigma}\right)dv + \frac{1}{\psi(\sigma)} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \left(\frac{v}{2}+\frac{1}{\sigma}\right)\psi(\sigma v)dv \leq \frac{K}{\sigma^2\psi(\sigma)}.$$

Покажемо, що для другого інтеграла з (17) при $\sigma \to \infty$ справедливою є оцінка

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{|\varphi(1-v)-\varphi(1+v)|}{v}dv = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\right). \tag{29}$$

Для отримання оцінки (29) скористаємося такими допоміжними твердженнями.

Означення [17]. *Нехай функція $\tau(v)$ є заданою на $[0,\infty)$, абсолютно неперервною і $\tau(\infty)=0$. Кажуть, що функція $\tau(v)$ належить $\mathcal{E}_a$, якщо похідну $\tau'(v)$ в тих точках, де вона не існує, можна доозначити так, щоб для деякого $a \geq 0$ існували інтеграли $\int_0^{a/2} v\big|d\tau'(v)\big|$, $\int_{a/2}^{\infty} \big|v-a\big|\big|d\tau'(v)\big|$.*

Твердження 1 [17]. *Якщо $\tau(v)$ належить $\mathcal{E}_a$, то $\big|\tau(v)\big| \leq H(\tau)$, де*

$$H(\tau) = |\tau(0)| + |\tau(a)| + \int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} v|d\tau'(v)| + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\infty} |v-a||d\tau'(v)|. \tag{30}$$

Покладемо

$$\tau(v) = \tau_\sigma(v) = \big(1 - \lambda_\sigma(v)\big)\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \quad \sigma \geq 1, \tag{31}$$

де функція ψ є визначеною і неперервною при всіх $v \geq 0$.

Лема. *Нехай* $\tau(v) \in \mathcal{E}_1$, $\psi \in \mathfrak{A}_C$. *Тоді при* $\sigma \to \infty$

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-v) - \tau(1+v)|}{v} dv = O\left(\int\limits_0^1 \frac{|\lambda_\sigma(1-v) - \lambda_\sigma(1+v)|}{v} dv + H(\tau)\right), \tag{32}$$

де $H(\tau)$ *— величина вигляду* (30).

Доведення. Із співвідношення (31) знайдемо функції $\tau(1-v)$ і $\tau(1+v)$:

$$\tau(1-v) = (1 - \lambda_\sigma(1-v))\,\frac{\psi(\sigma(1-v))}{\psi(\sigma)}, \quad v \leq 1, \tag{33}$$

$$\tau(1+v) = (1 - \lambda_\sigma(1+v))\,\frac{\psi(\sigma(1+v))}{\psi(\sigma)}, \quad v \geq -1. \tag{34}$$

Подамо інтеграл із (32) у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-v) - \tau(1+v)|}{v} dv =$$

$$= \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\tau(1-v) - \tau(1+v)|}{v} dv + \int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^1 \frac{|\tau(1-v) - \tau(1+v)|}{v} dv. \tag{35}$$

Оцінимо спочатку перший доданок із правої частини рівності (35). З цією метою додамо і віднімемо під знаком модуля в підінтегральній функції величину

$$\lambda_\sigma(1-v) - \lambda_\sigma(1+v).$$

Отримаємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\tau(1-v) - \tau(1+v)|}{v} dv \leq \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\lambda_\sigma(1-v) - \lambda_\sigma(1+v)|}{v} dv +$$

$$+ \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\tau(1-v) - \tau(1+v) + \lambda_\sigma(1-v) - \lambda_\sigma(1+v)|}{v} dv. \tag{36}$$

Оскільки, згідно з (33) та (34), мають місце рівності

$$\lambda_\sigma(1-v) = 1 - \frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1-v))}\tau(1-v) \tag{37}$$

і

$$\lambda_\sigma(1+v) = 1 - \frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1+v))}\tau(1+v), \tag{38}$$

то для другого інтеграла із правої частини формули (36) одержимо оцінку

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)|}{v}dv \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} |\tau(1-v)| \left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1-v))}\right| \frac{dv}{v} + \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} |\tau(1+v)| \left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1+v))}\right| \frac{dv}{v}. \tag{39}$$

З огляду на те, що $\tau(v)$ належить $\mathcal{E}_1$, згідно з твердженням 1 отримаємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} |\tau(1-v)| \left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1-v))}\right| \frac{dv}{v} + \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} |\tau(1+v)| \left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1+v))}\right| \frac{dv}{v} =$$

$$= H(\tau)O\left(\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(1-v))-\psi(\sigma)|}{v\psi(\sigma(1-v))}dv + \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(1+v))-\psi(\sigma)|}{v\psi(\sigma(1+v))}dv\right). \tag{40}$$

Покажемо, що при $\sigma \to \infty$

$$I_{1,\sigma} := \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(1-v))-\psi(\sigma)|}{v\psi(\sigma(1-v))}dv = O(1), \tag{41}$$

$$I_{2,\sigma} := \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{|\psi(\sigma(1+v))-\psi(\sigma)|}{v\psi(\sigma(1+v))}dv = O(1), \tag{42}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по σ.

Далі використаємо такі твердження.

Твердження 2 [5, с. 161]. *Функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належить $\mathfrak{M}_C$ тоді і лише тоді, коли величина $\alpha(t) = \dfrac{\psi(t)}{t\,|\psi'(t)|}$, $\psi'(t) := \psi'(t+0)$, задовольняє умову*

$$0 < K_1 \leq \alpha(t) \leq K_2 \quad \forall t \geq 1.$$

Твердження 3 [5, с. 175]. *Для того щоб функція $\psi \in \mathfrak{M}$ належала $\mathfrak{M}_0$, необхідно і достатньо, щоб для довільного фіксованого числа $c > 1$ існувала стала K така, щоб при всіх $t \geq 1$ виконувалась нерівність*

$$\frac{\psi(t)}{\psi(ct)} \leq K.$$

Оскільки функція $\dfrac{1-\psi(\sigma)/\psi(\sigma(1-v))}{v}$ обмежена при всіх $v \in \left[\delta, 1-\dfrac{1}{\sigma}\right]$, $0 < \delta < 1 - \dfrac{1}{\sigma}$, то з урахуванням твердження 2 для $\psi \in \mathfrak{M}_0$

$$\lim_{v\to 0}\frac{1-\psi(\sigma)/\psi(\sigma(1-v))}{v}=\frac{\sigma\,|\psi'(\sigma)|}{\psi(\sigma)}\leq K.$$

Отже, $I_{1,\sigma}=O(1)$, $\sigma\to\infty$. Переходячи до оцінки інтеграла $I_{2,\sigma}$, зазначимо, що

$$I_{2,\sigma}<\frac{1}{\psi(2\sigma-1)}\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}\frac{\psi(\sigma)-\psi\left(\sigma\left(1+v\right)\right)}{v}dv.$$

Після заміни змінної $u=\sigma(1+v)$ будемо мати

$$I_{2,\sigma}<\frac{1}{\psi(2\sigma-1)}\int\limits_{\sigma}^{2\sigma-1}\frac{\psi(\sigma)-\psi\left(u\right)}{u-\sigma}du<\frac{1}{\psi(2\sigma-1)}\int\limits_{\sigma}^{2\sigma}\frac{\psi(\sigma)-\psi\left(u\right)}{u-\sigma}du.$$

Застосувавши до правої частини останньої нерівності лему 5.5 з роботи [4, c. 97] і врахувавши, що $\psi(2\sigma-1)\geq\psi(2\sigma)$, $\sigma\geq 1$, на підставі твердження 3 отримаємо

$$I_{2,\sigma}<\frac{K_1\psi(\sigma)}{\psi(2\sigma-1)}\leq\frac{K_1\psi(\sigma)}{\psi(2\sigma)}\leq K_2.$$

Поєднавши співвідношення (36) із (39) – (42), запишемо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}\frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv=$$

$$=\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sigma}}\frac{|\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)|}{v}dv+O(1)H(\tau),\quad\sigma\to\infty. \tag{43}$$

Оцінимо другий доданок із правої частини рівності (35). Для цього додамо і віднімемо під знаком модуля в підінтегральній функції величину

$$\frac{\psi(\sigma(1-v))}{\psi(1)}\left(\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)\right)$$

та врахуємо, що функція $\psi\left(\sigma(1-v)\right)$ є монотонно спадною на $\left[1-\dfrac{1}{\sigma};1\right]$. Матимемо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv\leq$$

$$\leq\frac{1}{\psi(1)}\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)|\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)|}{v}dv+$$

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\dfrac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)}{\psi(1)}\left(\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)\right)\right|}{v}dv\leq$$

$$\leq \int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \frac{|\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)|}{v}dv+$$

$$+\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\dfrac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)}{\psi(1)}\left(\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)\right)\right|}{v}dv. \qquad (44)$$

Врахувавши співвідношення (37) та (38), а також твердження 1, отримаємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\dfrac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)}{\psi(1)}\left(\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)\right)\right|}{v}dv \leq$$

$$\leq \int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} |\tau(1-v)|\left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)}\right|\frac{dv}{v}+\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} |\tau(1+v)|\left|1-\frac{\psi\left(\sigma(1-v)\psi(\sigma)\right)}{\psi(1)\psi\left(\sigma(1+v)\right)}\right|\frac{dv}{v}=$$

$$=H(\tau)O\left(\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)}\right|\frac{dv}{v}+\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \left|1-\frac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)\psi(\sigma)}{\psi(1)\psi\left(\sigma(1+v)\right)}\right|\frac{dv}{v}\right). \qquad (45)$$

Далі маємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \left|1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)}\right|\frac{dv}{v}=\left(1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(1)}\right)\ln\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}=O(1). \qquad (46)$$

Оскільки на проміжку $\left[1-\dfrac{1}{\sigma};1\right]$ функція $\psi\left(\sigma(1-v)\right)$ є монотонно спадною, то $\psi(\sigma(1-v))\leq\psi(1)$ і, крім того, на підставі твердження 3 при $\sigma\geq 1$

$$\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma(1+v))}\leq\frac{\psi(\sigma)}{\psi(2\sigma)}\leq K,$$

тому функція $\left|1-\dfrac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)\psi(\sigma)}{\psi(1)\psi\left(\sigma(1+v)\right)}\right|$ є обмеженою на $\left[1-\dfrac{1}{\sigma};1\right]$. Отже,

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \left|1-\frac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)\psi(\sigma)}{\psi(1)\psi\left(\sigma(1+v)\right)}\right|\frac{dv}{v}\leq K_1\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{dv}{v}=K\ln\frac{1}{1-\frac{1}{\sigma}}=O(1). \qquad (47)$$

На підставі співвідношень (45) – (47) маємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\dfrac{\psi\left(\sigma(1-v)\right)}{\psi(1)}\left(\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)\right)\right|}{v}dv=O\left(H(\tau)\right). \qquad (48)$$

Із формул (44) та (48) отримуємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv = O\left(\int\limits_{1-\frac{1}{\sigma}}^{1} \frac{|\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)|}{v}dv + H(\tau)\right). \tag{49}$$

Поєднуючи співвідношення (43) та (49), приходимо до рівності (32).

Лему доведено.

Для функції φ, що визначається співвідношенням (6), маємо $\lambda_\sigma(v) = \lambda_\sigma(\varphi; v) = = 1 - \dfrac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma v)}\varphi(v) = 1 - \dfrac{v^2}{2} - \dfrac{v}{\sigma}$, а тому, як неважко переконатися,

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{|\lambda_\sigma(1-v)-\lambda_\sigma(1+v)|}{v}dv = O\left(1\right), \quad \sigma\to\infty. \tag{50}$$

Із формул (30), (6) та оцінок (28), беручи до уваги співвідношення (24), знаходимо

$$H(\varphi) = O\left(1 + \frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\right) = O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\right), \quad \sigma\to\infty. \tag{51}$$

Об'єднання співвідношень (32), (50) та (51) дозволяє записати оцінку (29).

Таким чином, на підставі теореми 1 із роботи [17] інтеграл $A(\varphi)$ вигляду (15) є збіжним, а отже, перетворення $\hat{\varphi}_\beta(t)$ функції φ, заданої співвідношенням (6), є сумовним на всій числовій осі.

Сумовність перетворення $\hat{\mu}_\beta(t)$ вигляду (13) на всій дійсній осі випливає із збіжності інтеграла $A(\mu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}_\beta(t)|\,dt$. Для того щоб інтеграл $A(\mu)$ був збіжним, необхідно і достатньо (див. теорему 1 із роботи [17, с. 24]), щоб збігалися інтеграли

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} v|d\mu'(v)|, \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |v-1||d\mu'(v)|, \tag{52}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_{0}^{\infty} \frac{|\mu(v)|}{v}dv, \qquad \int\limits_{0}^{1} \frac{|\mu(1-v)-\mu(1+v)|}{v}dv. \tag{53}$$

Знайдемо оцінку першого інтеграла з (52) на кожному з проміжків: $\left[0, \dfrac{1}{\sigma}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\sigma}, \dfrac{b}{\sigma}\right]$ та $\left[\dfrac{b}{\sigma}, \dfrac{1}{2}\right]$, $\sigma > 2b$. Позначимо

$$\overline{\mu}(v) = 1 - e^{-v} - \gamma v e^{-v} - \frac{v^2}{2} - \frac{v}{\sigma}. \tag{54}$$

Тоді внаслідок (7) мають місце рівності

$$\mu(v) = \overline{\mu}(v)\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \qquad \mu'(v) = \overline{\mu}'(v)\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)} + \overline{\mu}(v)\frac{\sigma\psi'(\sigma v)}{\psi(\sigma)}, \tag{55}$$

$$\mu''(v) = \overline{\mu}''(v)\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)} + 2\sigma\overline{\mu}'(v)\frac{\psi'(\sigma v)}{\psi(\sigma)} + \sigma^2\overline{\mu}(v)\frac{\psi''(\sigma v)}{\psi(\sigma)}. \tag{56}$$

Із співвідношення (54) знаходимо

$$\overline{\mu}'(v) = e^{-v} - \gamma e^{-v} + \gamma v e^{-v} - v - \frac{1}{\sigma},$$

$$\overline{\mu}''(v) = -e^{-v} + 2\gamma e^{-v} - \gamma v e^{-v} - 1,$$

$$\overline{\mu}(0) = 0, \qquad \overline{\mu}'(0) = 1 - \gamma - \frac{1}{\sigma} < 0.$$

Звідси і з того, що

$$-1 + 2\gamma - \gamma v < e^{v}, \quad v \in [0, \infty),$$

випливає

$$\overline{\mu}(v) \leq 0, \qquad \overline{\mu}'(v) < 0, \qquad \overline{\mu}''(v) < 0 \qquad \text{при} \quad v \geq 0. \tag{57}$$

Враховуючи (57) і те, що додатна функція $\psi(\sigma v)$ на проміжку $\left[0, \dfrac{1}{\sigma}\right]$ є опуклою донизу та зростаючою, із співвідношення (56) отримуємо

$$\mu''(v) < 0, \quad v \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right]. \tag{58}$$

Зінтегруємо частинами перший інтеграл із (52) на проміжку $\left[0, \dfrac{1}{\sigma}\right]$. Оскільки $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 0$ (бо $\psi(0) = 0$), то, беручи до уваги нерівність (58) та рівності (55), маємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} v\,|d\mu'(v)| = -\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} v d\mu'(v) =$$

$$= \overline{\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)} - \frac{1}{\sigma}\overline{\mu}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)} - \overline{\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\psi'(1-0)}{\psi(\sigma)} \leq$$

$$\leq \frac{\psi(1)}{\sigma\psi(\sigma)}\left|\overline{\mu}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right| + \frac{\psi'(1-0)}{\psi(\sigma)}\left|\overline{\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right|. \tag{59}$$

Враховуючи нерівності

$$\left|\overline{\mu}(v)\right| < \frac{2}{3\sigma^2}v + \frac{1}{\sigma}v^2 + \frac{v^3}{2}, \qquad \left|\overline{\mu}'(v)\right| < \frac{2}{3\sigma^2} + \frac{2}{\sigma}v + \frac{3}{2}v^2, \quad v \geq 0, \tag{60}$$

із співвідношення (59) отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} v\,|d\mu'(v)| \leq \frac{K_1}{\sigma^3\psi(\sigma)}. \tag{61}$$

Оцінимо перший інтеграл із (52) на проміжку $\left[\dfrac{1}{\sigma}, \dfrac{b}{\sigma}\right]$. Застосовуючи (56), маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} v\,|d\mu'(v)| \leq \frac{1}{\psi(\sigma)} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} v|\overline{\mu}''(v)|\psi(\sigma v)dv +$$

$$+\frac{2\sigma}{\psi(\sigma)} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} v|\overline{\mu}'(v)||\psi'(\sigma v)|dv + \frac{\sigma^2}{\psi(\sigma)} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} v|\overline{\mu}(v)|\psi''(\sigma v)dv.$$

Враховуючи нерівності (60) та оцінку $\left|\overline{\mu}''(v)\right| < \dfrac{2}{\sigma} + 3v,\ v \geq 0,$ і інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} v\,|d\mu'(v)| \leq \frac{K_2}{\sigma^3\psi(\sigma)}. \tag{62}$$

Покажемо, що у випадку опуклості донизу функції $v^2\psi(v)$ при $v \geq b,\ b \geq 1,$ виконується нерівність

$$d\mu'(v) \leq 0, \quad v \geq \frac{b}{\sigma}. \tag{63}$$

З цією метою покладемо

$$\tilde{\mu}(v) = \frac{\overline{\mu}(v)}{v^2},$$

так що, згідно з (54),

$$\tilde{\mu}(v) = \frac{1}{v^2} - \frac{e^{-v}}{v^2} - \gamma\frac{e^{-v}}{v} - \frac{1}{2} - \frac{1}{v\sigma}.$$

Оскільки

$$\tilde{\mu}'(v) = \frac{1}{v^3}\left(-2 + 2e^{-v} + (1+\gamma)ve^{-v} + \gamma v^2 e^{-v} + \frac{v}{\sigma}\right),$$

$$\tilde{\mu}''(v) = \frac{1}{v^4}\left(6 - 6e^{-v} - (4+2\gamma)ve^{-v} - (1+2\gamma)v^2e^{-v} - \gamma v^3 e^{-v} - \frac{2v}{\sigma}\right),$$

то, враховуючи нерівності $e^{-v} \geq 1 - v$, $v \geq 0$, $\gamma > 1 - \dfrac{1}{\sigma}$, одержуємо

$$\tilde{\mu}(v) < 0,$$

$$\tilde{\mu}'(v) > \frac{1}{v^3}\left(\frac{v^2}{\sigma} + \gamma v^2 e^{-v}\right) > 0,$$

$$\tilde{\mu}''(v) < \frac{1}{v^4}\left(-\frac{2v^2}{\sigma} - (1+2\gamma)v^2e^{-v} - \gamma v^3 e^{-v}\right) < 0.$$

При $v \geq b \geq 1$, згідно з умовами теореми, мають місце співвідношення

$$g(v) > 0, \qquad g'(v) < 0, \qquad g''(v) > 0.$$

Тоді

$$\mu''(v) = \left(\frac{1}{\sigma^2}\tilde{\mu}(v)g(\sigma v)\right)'' =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\tilde{\mu}''(v)g(\sigma v) + \frac{2}{\sigma}\tilde{\mu}'(v)g'(\sigma v) + \tilde{\mu}(v)g''(\sigma v) < 0 \quad \text{при} \quad v \geq \frac{b}{\sigma},$$

а отже, нерівність (63) виконується для всіх $v \geq b/\sigma$, $b \geq 1$.

Використовуючи нерівність (63), співвідношення (55), (60) і твердження 2, 3, знаходимо

$$\int\limits_{\frac{b}{\sigma}}^{\frac{1}{2}} v\,|d\mu'(v)| = -\int\limits_{\frac{b}{\sigma}}^{\frac{1}{2}} v d\mu'(v) =$$

$$= -\frac{1}{2}\mu'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{b}{\sigma}\mu'\left(\frac{b}{\sigma}\right) + \mu\left(\frac{1}{2}\right) - \mu\left(\frac{b}{\sigma}\right) \leq K_1 + \frac{K_2}{\sigma^3\psi(\sigma)}, \quad \sigma \to \infty. \quad (64)$$

Об'єднуючи формули (61), (62) та (64), записуємо оцінку першого інтеграла із (52):

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} v|d\mu'(v)| = O\left(1 + \frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\right), \quad \sigma \to \infty. \quad (65)$$

Враховуючи співвідношення (24), (25) та твердження 2, 3, неважко переконатися в тому, що для другого інтеграла з (52) має місце оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |v-1||d\mu'(v)| = O(1), \quad \sigma \to \infty. \quad (66)$$

Перший інтеграл із (53) оцінимо на кожному з проміжків $\left[0, \frac{1}{\sigma}\right]$, $\left[\frac{1}{\sigma}, 1\right]$ і $\left[\frac{1}{\sigma}, \infty\right)$. Оскільки функція $\overline{\mu}(v)$ вигляду (54) є недодатною при $v \geq 0$, то з першого співвідношення (55) маємо $|\mu(v)| = -\overline{\mu}(v)\dfrac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}$. Тому, враховуючи нерівність

$$e^{-v} \leq 1 - v + \frac{v^2}{2}, \quad v \geq 0, \quad (67)$$

і те, що функція $\psi(\sigma v)$ є зростаючою при $v \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right]$, знаходимо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} \frac{|\mu(v)|}{v}dv = \frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} \left(-1 + e^{-v} + \gamma v e^{-v} + \frac{v^2}{2} + \frac{v}{\sigma}\right)\frac{\psi(\sigma v)}{v}dv \leq$$

$$\leq \frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} \left(-1 + \gamma + \frac{1}{\sigma} + (1-\gamma)v + \frac{\gamma}{2}v^2\right)dv.$$

З останнього співвідношення внаслідок нерівностей

$$-1+\gamma+\frac{1}{\sigma}<\frac{2}{3\sigma^2}, \qquad \gamma<1, \quad 1-\gamma<\frac{1}{\sigma}, \tag{68}$$

маємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}}\frac{|\mu(v)|}{v}dv=O\left(\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\right), \quad \sigma\to\infty. \tag{69}$$

Знову беручи до уваги нерівності (67), (68), отримуємо такі оцінки:

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{|\mu(v)|}{v}dv\le\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{1}\frac{\psi(\sigma v)}{\psi(\sigma)}\left(\frac{1}{\sigma}+\gamma-1+(1-\gamma)v+\frac{\gamma}{2!}v^2\right)dv\le$$

$$\le\frac{K_1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}\psi(v)dv+\frac{K_2}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}v\psi(v)dv+\frac{K_3}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}v^2\psi(v)dv=$$

$$=O\left(\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}v^2\psi(v)dv\right), \tag{70}$$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{|\mu(v)|}{v}dv=\frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\infty}\psi(\sigma v)\left(\frac{e^{-v}-1}{v}+\gamma e^{-v}+\frac{v}{2}+\frac{1}{\sigma}\right)dv\le$$

$$\le\frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\infty}\psi(\sigma v)\left(-1+\frac{v}{2}+\gamma+\frac{v}{2}+\frac{1}{\sigma}\right)dv=$$

$$=O\left(\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_{\sigma}^{\infty}v\psi(v)dv\right). \tag{71}$$

Об'єднуючи співвідношення (69) – (71) і враховуючи, що $\int_1^{\sigma}v^2\psi(v)dv\ge K$, записуємо оцінку першого інтеграла з (53):

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{|\mu(v)|}{v}dv=O\left(\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^{\sigma}v^2\psi(v)dv+\frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_{\sigma}^{\infty}v\psi(v)dv\right). \tag{72}$$

Оцінимо другий інтеграл з (53). Для цього використаємо співвідношення (32) у випадку, коли

$$\overline{\lambda}(v)=\lambda_{\sigma}(\mu;v)=1-\frac{\psi(\sigma)}{\psi(\sigma v)}\mu(v)=[1+\gamma v]\,e^{-v}+\frac{v^2}{2}+\frac{v}{\sigma}.$$

Неважко переконатись, що

$$\int\limits_0^1 \frac{\left|\overline{\lambda}(1-v) - \overline{\lambda}(1+v)\right|}{v} dv =$$

$$= \int\limits_0^1 \left| \frac{\gamma+1}{e} \frac{e^v - e^{-v}}{v} - \frac{\gamma}{e}(e^v + e^{-v}) + 2\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \right| dv = O(1), \quad \sigma \to \infty. \tag{73}$$

Крім того, із співвідношень (30), (7), (65) та (66) випливає оцінка

$$H(\mu) = O\left(1 + \frac{1}{\sigma^3 \psi(\sigma)}\right), \quad \sigma \to \infty. \tag{74}$$

Співставляючи (73) та (74), із (32) бачимо, що

$$\int\limits_0^1 \frac{|\mu(1-v) - \mu(1+v)|}{v} dv = O\left(1 + \frac{1}{\sigma^3 \psi(\sigma)}\right), \quad \sigma \to \infty. \tag{75}$$

Таким чином, перетворення $\hat{\mu}_\beta(t)$ вигляду (13) функції μ, заданої співвідношенням (7), є сумовним на всій дійсній осі. Тоді із співвідношення (14) випливає

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\sigma\right)_{\hat{C}} = \sup_{f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| \psi(\sigma) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \left(\hat{\varphi}_\beta(t) + \hat{\mu}_\beta(t)\right) dt \right\|_{\hat{C}} =$$

$$= \sup_{f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| \psi(\sigma) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \hat{\varphi}_\beta(t) dt \right\|_{\hat{C}} + O\left(\psi(\sigma) A(\mu)\right). \tag{76}$$

Враховуючи співвідношення (6), (8) та (9), знаходимо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{\psi}_{\beta}\left(x + \frac{t}{\sigma}\right) \hat{\varphi}_\beta(t) dt = \frac{1}{\sigma^2 \psi(\sigma)} \left(f_1(x) + \frac{f_2(x)}{2}\right). \tag{77}$$

Із (76) та (77) отримуємо

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; B_\sigma\right)_{\hat{C}} = \frac{1}{\sigma^2} \sup_{f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| f_1(x) + \frac{f_2(x)}{2} \right\|_{\hat{C}} + O\left(\psi(\sigma) A(\mu)\right). \tag{78}$$

Крім того, на підставі формул (2.14), (2.15) роботи [17, с. 25], а також співвідношень (72), (74) та (75) для величини $A(\mu)$ справедливою є оцінка

$$A(\mu) = O\left(1 + \frac{1}{\sigma^3 \psi(\sigma)} + \frac{1}{\sigma^3 \psi(\sigma)} \int\limits_1^{\sigma} v^2 \psi(v) dv + \frac{1}{\sigma^2 \psi(\sigma)} \int\limits_{\sigma}^{\infty} v \psi(v) dv \right).$$

Враховуючи, що $\int_1^\sigma v^2\psi(v)dv \geq K$, $\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)} \int_1^\sigma v^2\psi(v)dv \geq K$, отримуємо

$$A(\mu) = O\left(\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\int\limits_1^\sigma v^2\psi(v)dv + \frac{1}{\sigma^2\psi(\sigma)}\int\limits_\sigma^\infty v\psi(v)dv\right). \tag{79}$$

Із (78) та (79) випливає справедливість співвідношення (11).

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що теорему 1 задовольняють, наприклад, функції $\psi \in \mathfrak{A}$, які при $v \geq 1$ мають вигляд $\psi(v) = \frac{1}{v^2}\ln^\alpha(v+K)$, де $K > 0$, $\alpha < -1$, $\psi(v) = \frac{1}{v^r}(K+e^{-v})$, $\psi(v) = \frac{1}{v^r}\ln^\alpha(v+K)$, $\psi(v) = \frac{1}{v^r}\operatorname{arctg} v$, де $K > 0$, $r > 2$, $\alpha \in R$.

Теорема 2. *Якщо $\psi \in \mathfrak{A}$, функція $g(v) = v^2\psi(v)$ при $v \geq b \geq 1$ є опуклою донизу і $\int_1^\infty vg(v)dv < \infty$, то при $\sigma \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}; B_\sigma\right)_{\hat{C}} = \frac{1}{\sigma^2}\sup_{f\in\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}}\left\|f_1(x) + \frac{f_2(x)}{2}\right\|_{\hat{C}} + O\left(\frac{1}{\sigma^3}\right), \tag{80}$$

де $f_1(x)$, $f_2(x)$ — функції вигляду (8) *та* (9) *відповідно.*

Доведення. Нехай $\tau(v) = \varphi(v) + \mu(v)$, де функції $\varphi(v)$ та $\mu(v)$ визначені формулами (6) та (7) відповідно. Тоді з урахуванням (3) і (5) має місце співвідношення (14):

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}; B_\sigma\right)_{\hat{C}} = \sup_{f\in\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}}\left\|\psi(\sigma)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^\psi_\beta\left(x+\frac{t}{\sigma}\right)\left(\hat{\varphi}_\beta(t) + \hat{\mu}_\beta(t)\right)dt\right\|_{\hat{C}},$$

де $\hat{\varphi}_\beta(t)$ та $\hat{\mu}_\beta(t)$ — перетворення вигляду (12) та (13) функцій φ та μ відповідно.

Покажемо сумовність на всій дійсній осі перетворень $\hat{\varphi}_\beta(t)$ і $\hat{\mu}_\beta(t)$. Доведемо спочатку збіжність інтеграла $A(\varphi)$ вигляду (15). Для цього розділимо проміжок $(-\infty, +\infty)$ на дві підмножини $(-\sigma, \sigma)$ і $(-\infty, \sigma] \cup [\sigma, +\infty)$.

Знайдемо оцінку інтеграла $A(\varphi)$ вигляду (15) на проміжку $(-\sigma, \sigma)$. Враховуючи співвідношення (6), зростання функції $\psi(\sigma v)$ при $v \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right]$ та беручи до уваги, що $\int_1^\infty vg(v)dv < \infty$, отримуємо

$$\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\left|\int\limits_0^\infty \varphi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt \leq 2\sigma\int\limits_0^\infty |\varphi(v)|dv =$$

$$= \frac{2\sigma}{\psi(\sigma)}\int\limits_0^\infty\left(\frac{v^2}{2} + \frac{v}{\sigma}\right)\psi(\sigma v)dv \leq$$

$$\leq \frac{2\sigma\psi(1)}{\psi(\sigma)}\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{v}{\sigma}\right)dv + \frac{2\sigma}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^\infty\left(\frac{v^2}{2} + \frac{v}{\sigma}\right)\psi(\sigma v)dv \leq \frac{K_1}{\sigma^2\psi(\sigma)}. \tag{81}$$

Знайдемо оцінку інтеграла (15) при $|t| \geq \sigma$. Для цього розглянемо інтеграл $\int_0^\infty \varphi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv$ на кожному з проміжків $[0; 1/\sigma]$ та $[1/\sigma; \infty]$:

$$\int_0^{\infty} \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv = \left(\int_0^{\frac{1}{\sigma}} + \int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty}\right) \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv. \tag{82}$$

Оскільки, як випливає з (6), $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{3\psi(1)}{2\sigma^2\psi(\sigma)}$ і при $v \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right)$

$$\varphi'(0) = 0, \qquad \varphi'\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{4\psi(1) + 3\psi'(1-0)}{2\sigma\psi(\sigma)}, \tag{83}$$

то, двічі інтегруючи частинами перший інтеграл із правої частини рівності (82), одержуємо

$$\int_0^{\frac{1}{\sigma}} \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv = \frac{3\psi(1)}{2t\sigma^2\psi(\sigma)} \sin\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+\frac{4\psi(1) + 3\psi'(1-0)}{2t^2\sigma\psi(\sigma)} \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2}\int_0^{\frac{1}{\sigma}} \varphi''(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv. \tag{84}$$

Далі, внаслідок того, що функція $g(v) = v^2\psi(v)$ є опуклою донизу і $\int_1^{\infty} vg(v)dv <$ $< \infty$, мають місце співвідношення (24) та (25). Тоді, двічі інтегруючи частинами другий інтеграл із правої частини рівності (82) на проміжку $\left[\frac{1}{\sigma}, \infty\right)$ і враховуючи, що $\lim\limits_{v\to\infty} \varphi(v) = \lim\limits_{v\to\infty} \varphi'(v) = 0$, знаходимо

$$\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv =$$

$$= -\varphi\left(\frac{1}{\sigma}\right) \sin\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t}\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \varphi'(v) \sin\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv =$$

$$= -\frac{3\psi(1)}{2t\sigma^2\psi(\sigma)} \sin\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\frac{4\psi(1) + 3\psi'(1)}{2\sigma\psi(\sigma)} \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2}\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \varphi''(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv. \tag{85}$$

Поєднуючи формули (82) – (85), записуємо

$$\int_0^{\infty} \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv =$$

$$= \frac{3\psi'(1-0) - 3\psi'(1)}{2t^2\sigma\psi(\sigma)} \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}}\varphi''(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv-\frac{1}{t^2}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty}\varphi''(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv.$$

Звідси

$$\left|\int\limits_0^{\infty}\varphi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|\le$$

$$\le\frac{3\psi'(1-0)-3\psi'(1)}{2t^2\sigma\psi(\sigma)}+\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}}|\varphi''(v)|dv+\frac{1}{t^2}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty}|\varphi''(v)|dv. \tag{86}$$

Враховуючи співвідношення (19) та (83), отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}}|\varphi''(v)|dv=\varphi'\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\varphi'(0)=\frac{K}{\sigma\psi(\sigma)}. \tag{87}$$

Далі, беручи до уваги співвідношення (18), спадання та опуклість донизу функції $\psi(\sigma v)$, $v\in\left[\frac{1}{\sigma},\infty\right)$, маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}|\varphi''(v)|dv\le\frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}\psi(\sigma v)dv+\frac{2\sigma}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}\left(v+\frac{1}{\sigma}\right)|\psi'(\sigma v)|\,dv+$$

$$+\frac{\sigma^2}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{v}{\sigma}\right)\psi''(\sigma v)dv. \tag{88}$$

Неважко переконатися, що

$$\frac{\sigma^2}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}\left(\frac{v^2}{2}+\frac{v}{\sigma}\right)\psi''(\sigma v)dv=\frac{K_1}{\sigma\psi(\sigma)}-\frac{\sigma}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}\left(v+\frac{1}{\sigma}\right)\psi'(\sigma v)dv.$$

Поєднуючи останнє співвідношення з нерівністю (88) та врахувуючи, що

$$\frac{1}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}\psi(\sigma v)dv\le\frac{(b-1)\psi(1)}{\sigma\psi(\sigma)},$$

знаходимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}|\varphi''(v)|dv\le\frac{K_2}{\sigma\psi(\sigma)}+\frac{3\sigma}{\psi(\sigma)}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}}\left(v+\frac{1}{\sigma}\right)|\psi'(\sigma v)|\,dv.$$

Тоді, інтегруючи частинами інтеграл із правої частини останньої нерівності, маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} |\varphi''(v)| dv \leq \frac{K}{\sigma\psi(\sigma)}. \tag{89}$$

Знову використовуючи формулу (18) та враховуючи, що $\psi(v)$ є спадною при $v \in [1, \infty)$, $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$, а також беручи до уваги (24), (25), отримуємо оцінку інтеграла

$$\frac{1}{t^2} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} |\varphi''(v)| dv \leq \frac{K}{t^2\sigma\psi(\sigma)}.$$

З останнього співвідношення та з формул (86) – (89) знаходимо

$$\left| \int\limits_0^{\infty} \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| \leq \frac{K}{t^2\sigma\psi(\sigma)},$$

а отже,

$$\int\limits_{|t|\geq\sigma} |\hat{\varphi}(t)|\, dt \leq \frac{2K}{\sigma^2\psi(\sigma)}. \tag{90}$$

Із співвідношень (81) і (90) випливає така оцінка інтеграла $A(\varphi)$ вигляду (15):

$$A(\varphi) = \frac{O\,(1)}{\sigma^2\psi(\sigma)}.$$

Отже, перетворення $\hat{\varphi}_\beta(t)$ вигляду (12) є сумовним на всій числовій осі.

Далі переконаємось у сумовності інтеграла $A(\mu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\mu}_\beta(t)\right| dt$, де $\hat{\mu}_\beta(t)$ — перетворення вигляду (13) функції $\mu(v)$. З цією метою інтеграл $A(\mu)$ запишемо у вигляді

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_0^{\infty} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t|\geq\sigma} \left| \int\limits_0^{\infty} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt = I_1 + I_2. \tag{91}$$

Оцінимо інтеграл I_1:

$$I_1 \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt = I_3 + I_4. \tag{92}$$

Використовуючи перші співвідношення з (55) і (60), а також те, що $\psi(\sigma v) \leq \psi(1)$ при $v \in \left[0, \frac{1}{\sigma}\right]$, отримуємо оцінку інтеграла I_3:

$$I_3 \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sigma}} |\mu(v)|\, dvdt \leq \frac{2\sigma\psi(1)}{\pi\psi(\sigma)} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{2v}{3\sigma^2} + \frac{v^2}{\sigma} + \frac{v^3}{2}\right) dv = \frac{K}{\sigma^3\psi(\sigma)}. \tag{93}$$

Оскільки, згідно з умовою теореми, $\int_1^\infty v^3\psi(v)dv < \infty$, то, знову використовуючи першу нерівність із (60), знаходимо оцінку інтеграла I_4:

$$I_4 \leq \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} |\mu(v)|dvdt =$$

$$= \frac{2\sigma}{\pi\psi(\sigma)} \left(\frac{2}{3\sigma^4} \int\limits_{1}^{\infty} v\psi(v)dv + \frac{1}{\sigma^4} \int\limits_{1}^{\infty} v^2\psi(v)dv + \frac{1}{2\sigma^4} \int\limits_{1}^{\infty} v^3\psi(v)dv \right) \leq \frac{K}{\sigma^3\psi(\sigma)}. \tag{94}$$

Об'єднуючи співвідношення (92) – (94), записуємо

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} \left| \int\limits_{0}^{\infty} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt = \frac{O(1)}{\sigma^3\psi(\sigma)}, \quad \sigma \to \infty. \tag{95}$$

Оцінимо інтеграл I_2. Двічі інтегруючи частинами і враховуючи те, що $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 0$, отримуємо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sigma}} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv = \frac{1}{t}\mu\left(\frac{1}{\sigma}\right) \sin\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{t^2}\mu'\left(\frac{1}{\sigma} - 0\right) \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sigma}} \mu''(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv. \tag{96}$$

З урахуванням співвідношень (24), (25) маємо $\lim\limits_{v\to\infty} \mu(v) = 0$ і $\lim\limits_{v\to\infty} \mu'(v) = 0$. Тоді

$$\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv =$$

$$= -\frac{1}{t}\mu\left(\frac{1}{\sigma}\right) \sin\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) - \frac{1}{t^2}\mu'\left(\frac{1}{\sigma}\right) \cos\left(\frac{t}{\sigma} + \frac{\beta\pi}{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{t^2} \int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^{\infty} \mu''(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv. \tag{97}$$

Об'єднуючи співвідношення (96) та (97), знаходимо

$$\int\limits_0^\infty \mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv =$$
$$=\frac{1}{t^2}\left(\mu'\left(\frac{1}{\sigma}-0\right)-\mu'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right)\cos\left(\frac{t}{\sigma}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}}\mu''(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv-\frac{1}{t^2}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^\infty \mu''(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv.$$

Згідно з другою формулою із (55) одержуємо

$$\mu'\left(\frac{1}{\sigma}-0\right)=\overline{\mu}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}+\overline{\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\sigma\psi'(1-0)}{\psi(\sigma)}, \tag{98}$$

$$\mu'\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\overline{\mu}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}+\overline{\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\sigma\psi'(1)}{\psi(\sigma)}. \tag{99}$$

Тому

$$\int\limits_0^\infty \mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv =$$
$$=\frac{1}{t^2}\overline{\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{\sigma\left(\psi'(1-0)-\psi'(1)\right)}{\psi(\sigma)}\cos\left(\frac{t}{\sigma}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$
$$-\frac{1}{t^2}\left[\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}}+\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^\infty\right]\mu''(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv. \tag{100}$$

Із співвідношення (100), враховуючи першу нерівність з (60), отримуємо

$$\left|\int\limits_0^\infty \mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|\le\frac{K_1}{t^2\sigma^2\psi(\sigma)}+\frac{1}{t^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}}|\mu''(v)|dv+\frac{1}{t^2}\int\limits_{\frac{1}{\sigma}}^\infty|\mu''(v)|dv. \tag{101}$$

Використовуючи (58), (98) і те, що $\mu'(0)=0$, знаходимо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sigma}}|\mu''(v)|dv=-\mu'\left(\frac{1}{\sigma}-0\right)=\left|\overline{\mu}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right|\frac{\psi(1)}{\psi(\sigma)}+\left|\overline{\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right|\frac{\sigma\psi'(1-0)}{\psi(\sigma)}.$$

Звідси, враховуючи обидва співвідношення з (60), отримуємо оцінку

$$\int_0^{\frac{1}{\sigma}} |\mu''(v)|dv \leq \frac{K_2}{\sigma^2\psi(\sigma)}. \tag{102}$$

Розглянемо другий інтеграл із правої частини нерівності (101) на кожному із проміжків $\left[\frac{1}{\sigma}, \frac{b}{\sigma}\right]$ та $\left[\frac{b}{\sigma}, \infty\right)$. Врахувавши (56) та міркуючи, як і при доведенні співвідношення (62), одержуємо

$$\int_{\frac{1}{\sigma}}^{\frac{b}{\sigma}} |\mu''(v)|dv \leq \frac{K_3}{\sigma^2\psi(\sigma)}. \tag{103}$$

На підставі (63), враховуючи, що $\lim\limits_{v\to\infty} \mu'(v) = 0$, та беручи до уваги друге співвідношення з (55) і нерівності (60), маємо

$$\int_{\frac{b}{\sigma}}^{\infty} |\mu''(v)|dv = -\int_{\frac{b}{\sigma}}^{\infty} d\mu'(v) = \overline{\mu}'\left(\frac{b}{\sigma}\right)\frac{\psi(b)}{\psi(\sigma)} + \left|\overline{\mu}\left(\frac{b}{\sigma}\right)\right| \frac{\sigma|\psi'(b)|}{\psi(\sigma)} \leq \frac{K_4}{\sigma^2\psi(\sigma)}. \tag{104}$$

Із співвідношень (101) – (104) випливає

$$\left|\int_0^{\infty} \mu(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right| \leq \frac{K}{t^2\sigma^2\psi(\sigma)}.$$

Тоді

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{|t|\geq\sigma}\left|\int_0^{\infty}\mu(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt = O\left(\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\right), \quad \sigma\to\infty. \tag{105}$$

Поєднуючи співвідношення (91), (95) та (105), записуємо оцінку інтеграла $A(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mu}_\beta(t)|\,dt$ при $\sigma\to\infty$

$$A(\mu) = O\left(\frac{1}{\sigma^3\psi(\sigma)}\right). \tag{106}$$

Отже, перетворення $\hat{\mu}_\beta(t)$ вигляду (13) є сумовним на дійсній осі.

Оскільки перетворення $\hat{\varphi}_\beta(t)$ і $\hat{\mu}_\beta(t)$ є сумовними на всій числовій осі, то має місце співвідношення

$$\mathcal{E}\left(\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}; B_\sigma\right)_{\hat{C}} = \sup_{f\in\hat{C}^\psi_{\beta,\infty}} \left\|\psi(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty} f^\psi_\beta\left(x + \frac{t}{\sigma}\right)\hat{\varphi}_\beta(t)dt\right\|_{\hat{C}} + O\left(\psi(\sigma)A(\mu)\right).$$

Звідси на підставі співвідношень (77) та (106) отримуємо, що при $\sigma\to\infty$ має місце асимптотична рівність (80).

Теорему 2 доведено.

Зазначимо, що умови теореми 2 задовольняють, зокрема, функції $\psi \in \mathfrak{A}$, які при $v \geq 1$ мають вигляд $\psi(v) = \dfrac{\ln^{\alpha}(v+K)}{v^r}$, $\psi(v) = \dfrac{1}{v^r}(K + e^{-v})$, де $r > 4$, $K > 0$, $\alpha \in R$, а також $\psi(v) = v^r e^{-Kv^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, $K > 0$, $r \in R$.

1. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
2. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – № 2. – С. 210 – 222.
3. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
6. *Каниев С.* Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений // Докл. АН СССР. – 1963. – **153**, № 5.– С. 995 – 998.
7. *Дзимистаришвили М. Г.* Приближение классов непрерывных функций операторами Зигмунда // Приближение операторами Зигмунда и наилучшее приближение. – Киев, 1989. – С. 3 – 42. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.25).
8. *Дзимистаришвили М. Г.* Приближение классов $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ в метрике L_1 // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 52 – 54.
9. *Дзимистаришвили М. Г.* О поведении верхних граней уклонений операторов Стеклова. – Киев, 1990. – С. 3 – 29. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.25).
10. *Рукасов В. И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 5. – С. 682 – 691.
11. *Рукасов В. І., Чайченко С. О.* Наближення операторами Валле Пуссена інтегралів Пуассона функцій, заданих на дійсній осі // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 2. – С. 228 – 237.
12. *Островська О. В.* Наближення класів неперервних функцій операторами Зигмунда // Наближення класів неперервних функцій, заданих на дійсній осі. – Київ, 1994. – С. 1 – 15. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 94.5).
13. *Репета Л. А.* Приближение функций классов $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами вида $U^{\varphi,F}_{\sigma}$ // Ряды Фурье: Теория и приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 147 – 154.
14. *Степанець О. І., Соколенко І. В.* Наближення операторами Фур'є $\bar{\psi}$-інтегралів функцій, заданих на дійсній осі // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 7. – С. 960 – 965.
15. *Кальчук І. В.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі, операторами Вейєрштрасса // Там же. – 2007. – **59**, № 9. – С. 1201 – 1220.
16. *Харкевич Ю. І., Жигалло Т. В.* Наближення функцій, заданих на дійсній осі, бігармонійними операторами Пуассона // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 2. – С. 295 – 310.
17. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.

Одержано 23.02.07