УДК 531.36

Ю. А. Мартынюк-Черниенко (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ВРЕМЕННОЙ ШКАЛЕ

We investigate the problem of stability of nonlinear dynamical system on a time scale. The generalized Lyapunov direct method is used to present a unified approach in analyzing the stability of motion.

Досліджується проблема стійкості нелінійної системи на часовій шкалі. Наведено уніфікований підхід для аналізу стійкості руху на основі узагальненого прямого методу Ляпунова.

1. Введение. Способ унифицированного рассмотрения уравнений движения в непрерывном и дискретном случае в рамках теории „временной шкалы” был предложен в работах [1 – 3]. Динамические системы на временной шкале являются удовлетворительной математической моделью поведения континуально-дискретных систем в механике и гибридных систем, состоящих из непрерывной и дискретной компонент, в общей теории систем. На основе некоторого обобщения обычных понятий производной и интеграла непрерывных функций (см. [2]) динамические системы на временной шкале исследуются с помощью общих подходов, развитых в качественной теории уравнений при надлежащей их модификации.

Целью данной статьи является доказательство теоремы о равномерной асимптотической устойчивости динамических уравнений на временной шкале на основе обобщенного прямого метода Ляпунова [4].

2. Предварительные результаты. Для того чтобы охватить случай непрерывной и дискретной динамики, в работе [3] предложено некоторое обобщение основных понятий математического анализа на временной шкале. Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения в этом направлении, следуя работе [2].

Будем обозначать через $\mathbb{T}$ временную шкалу, на которой исследуется динамика нелинейной системы ($\mathbb{T}$ — некоторое непустое замкнутое подмножество $\mathbb{R}$ с заданным порядком и топологической структурой).

На временной шкале $\mathbb{T}$ используются „операторы скачка” или функции перехода.

Определение 1. *Отображения* σ, $\rho\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, *определяемые соотношениями*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}\colon s > t\} \in \mathbb{T}, \quad \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}\colon s < t\},$$

называются операторами скачка. При этом предполагается, что $\inf\varnothing = \sup\mathbb{T}$ (*т. е.* $\sigma(t) = t$, *если* $\mathbb{T}$ *имеет максимум* t) *и* $\sup\varnothing = \inf\mathbb{T}$ (*т. е.* $\rho(t) = t$, *если* $\mathbb{T}$ *имеет минимум* t).

С помощью операторов $\sigma(t)$ и $\rho(t)$ текущие значения времени $\{t\}$ на временной шкале $\mathbb{T}$ классифицируются так:

а) t плотные справа на $\mathbb{T}$ (rd на $\mathbb{T}$), если $t < \sup\mathbb{T}$ и $\sigma(t) = t$;

б) t плотные слева на $\mathbb{T}$ (ld на $\mathbb{T}$), если $t < \inf\mathbb{T}$ и $\rho(t) = t$;

в) t рассеянные справа на $\mathbb{T}$ (rs на $\mathbb{T}$), если $\sigma(t) > t$;

г) t рассеянные слева на $\mathbb{T}$ (ls на $\mathbb{T}$), если $\rho(t) < t$.

Зернистость временной шкалы при переходе вперед описывается функцией

$\mu(t) = \sigma(t) - t$.

Очевидно, если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $\mu(t) = 0$, и если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $\mu(t) = 1$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Определение 2. *Функция* $u\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *является* Δ*-дифференцируемой в точке* $t \in \mathbb{T}$, *если существует некоторое значение* $\gamma \in \mathbb{R}$ *такое, что для любого* $\varepsilon > 0$ *в окрестности* W *точки* t *выполняется условие*

$$|u(\sigma(t)) - u(s) - \gamma(\sigma(t) - s)| < \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

при всех $s \in W$.

В этом случае $\gamma = u^{\Delta}(t)$ является обобщенной производной функции u на временной шкале $\mathbb{T}$.

Заметим, что если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то $u^{\Delta}(t) = \gamma = \dfrac{du}{dt}$; если же $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то $u^{\Delta}(t) = \gamma = u(t+1) - u(t)$ является первой разностью.

Следующие формулы являются полезными при вычислении Δ-производной функции Ляпунова на временной шкале

$$u(\sigma(t)) = u(t) + \mu(t)u^{\Delta}(t),$$

$$(u \cdot w)^{\Delta} = u^{\Delta}(t)w(t) + u(\sigma(t))w^{\Delta}(t).$$

Определение 3. *Функция* w *называется* Δ*-антипроизводной функции* u, *если выполняется соотношение* $w^{\Delta}(t) = u(t)$ *для любого* $t \in \mathbb{T}$, *и тогда*

$$\int_a^b u(t)\Delta t = w(b) - w(a),$$

где a, $b \in \mathbb{T}$. *Заметим, что* rd*-непрерывная функция допускает существование* Δ*-антипроизводной на* $\mathbb{T}$.

При доказательстве утверждений, рассматриваемых на временной шкале $\mathbb{T}$, используется индуктивный принцип. Напомним этот принцип, следуя [2].

Теорема 1. *Предположим, что* $t_0 \in \mathbb{T}$ *и* $\{A(t)\colon t \in [t_0, \infty)\}$ — *семейство утверждений, удовлетворяющих условиям*:

I. $A(t_0)$ *верно для значения* $t_0 \in \mathbb{T}$.

II. *Если* $t \in [t_0, \infty)$ *рассеяно справа и* $A(t)$ *верно, то* $A(\sigma(t))$ *также верно*.

III. *Если* t *плотно справа и* $A(t)$ *верно, то существует окрестность* W *значения* t *такая, что* $A(s)$ *также верно для всех* $s \in W \cap (t, \infty)$.

IV. *Если* $t \in (t_0, \infty)$ *плотно слева и* $A(s)$ *верно при всех* $s \in [t_0, t)$, *то* $A(t)$ *верно*.

Тогда утверждение $A(t)$ *верно для всех* $t \in [t_0, \infty)$.

Заметим, что если $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, то теорема 1 редуцирует к известному принципу математической индукции.

3. Уравнение возмущенного движение на $\mathbb{T}$**.** Пусть $\mathbb{T}$ — неограниченная сверху временная шкала с зернистостью $\mu(t)$, на которой исследуется динамика некоторой нелинейной системы.

Определение 4. *Вектор-функция* $f\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *является* rd*-непрерывной, если*:

1) *она непрерывна в каждой точке* $(t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ *с плотным справа значением* t;

2) *существуют пределы* $f(t^-, x) = \lim\limits_{(s, y) \to (t^-, x)} f(s, y)$ *и* $\lim\limits_{y \to x} f(t, y)$ *при каждом* (t, x) *с плотным слева значением* t.

Наряду с множеством $\mathbb{T}$ будем рассматривать множества $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$, если $b = \inf \mathbb{T}$ является плотным слева, и $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus \{b\}$, если b является рассеянным слева.

Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$x^\Delta(t) = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $x^\Delta(t)$ — производная вектор-функции $x(t)$, определенная на временной шкале $\mathbb{T}$. О системе (1) будем предполагать следующее:

H_1. Вектор-функция $f(t, x)$ является *rd*-непрерывной на $[t_0, \infty) \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытая связанная окрестность состояния $x = 0$.

H_2. Вектор-функция $f(t, x)$ является покомпонентно регрессивной на $\mathbb{T}$, т. е.

$$e^{\mathrm{T}} + \mu(t) f(t, x) \neq 0 \quad \text{при всех} \quad t \in [t_0, \infty),$$

где $e^{\mathrm{T}} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$.

H_3. Вектор-функция $f(t, x)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица на любом подмножестве множества $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$.

H_4. Вектор-функция $f(t, x) = 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$, если и только если $x = 0$.

Для заданных $(t_0, x_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ непрерывная функция $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ называется локальным решением задачи

$$x^\Delta(t) = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2}$$

если для некоторого $\tau \in \mathbb{T} \bigcap (\sigma(t_0), \infty)$ вектор-функция x является Δ-дифференцируемой на $\mathbb{T} \bigcap [t_0, \tau)$ и ее Δ-производная удовлетворяет уравнению (2) при каждом $t \in \mathbb{T} \bigcap [t_0, \tau)$ и $x(t_0) = x_0$.

Заметим, что начальную задачу (2) можно записать в виде интегрального уравнения на временной шкале $\mathbb{T}$ в виде

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \Delta s, \qquad t \geq t_0, \quad t_0, t \in \mathbb{T}.$$

Если $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, то задача (1) обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение на $\mathbb{R}$.

Обозначим через $C_{rd}\left(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ множество всех *rd*-непрерывных вектор-функций, отображающих $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

4. Анализ устойчивости. Определения различных типов устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (1) получаются из определений устойчивости $x = 0$ нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений путем незначительной их модификации.

Приведем одно из таких определений.

Определение 5. *Состояние равновесия* $x = 0$ *системы* (1) *является устойчивым, если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $t_0 \in \mathbb{T}$ *существует положительная функ-*

ция $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$, *rd-непрерывная по* t_0 *для каждого* ε, *такая, что из условия* $\|x_0\| < \delta$ *следует* $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *при всех* $t \geq t_0$.

Анализ устойчивости решений системы (1) будем проводить с помощью обобщенного прямого метода Ляпунова (см. [4]). С этой целью будем применять двухиндексную систему функций

$$U(t, x) = \left[v_{ij}(t, x)\right], \quad i, j = 1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$

где $v_{ii}\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ и $v_{ij}\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ при всех $i \neq j$.

Знакоопределенность матричнозначной функции (3) можно установить с помощью метрики $v_0(t, x) = a^{\mathrm{T}} U(t, x) a$, $a \in \mathbb{R}^m$.

С помощью функции (3) построим скалярную функцию

$$v(t, x, \eta) = \eta^{\mathrm{T}} U(t, x) \eta, \qquad \eta \in R_+^m, \quad \eta > 0, \tag{4}$$

и вычислим ее Δ-производную.

Пусть $U\colon \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m \times m}$ и $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Формулой

$$v_+^{\Delta}(t, x, \eta) = \eta^{\mathrm{T}} U_+^{\Delta}(t, x) \eta, \tag{5}$$

где

$$U_+^{\Delta}(t, x(t)) =$$

$$= \begin{cases} \left(\limsup [U(t + \vartheta, x) - U(t, x)]\vartheta^{-1} \colon \vartheta \to 0^+, \vartheta + t \in \mathbb{T}\right), & \text{если} \quad t = \sigma(t), \\ [U(\sigma(t), x) - U(t, x)]\mu^{-1}(t), & \text{если} \quad t < \sigma(t), \end{cases}$$

определяется Δ-производная функции $v(t, x, \eta)$ вдоль решений исследуемой системы в данной точке.

Теперь мы можем установить некоторые теоремы обобщенного прямого метода Ляпунова для динамических уравнений на временной шкале.

Теорема 2. *Предположим, что вектор-функция* f *в системе* (1) *удовлетворяет условиям* $H_1 - H_4$ *и существуют*:

1) *матричнозначная функция* $U\colon \mathbb{T} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{m \times m}$ *и вектор* $y \in \mathbb{R}^m$ *такие, что функция* $v(t, x, y) = y^T U(t, x) y$ *локально липшицева по* x *при всех* $t \in \mathbb{T}$;

2) *функции* $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \psi_{i3} \in K$*-классу и функции* $\tilde{\psi}_{i2}(t, u)$ *являются rd-непрерывными по* t *и возрастающими по* u, $\tilde{\psi}_{i2}(t, 0) = 0$ *при всех* $i = 1, 2, \ldots, m$;

3) *симметричные* $(m \times m)$*-матрицы* $A_1(y)$ *и* $\tilde{A}_2(y)$, *при которых выполняются неравенства*:

а) $\psi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|) A_1(y) \psi_1(\|x\|) \leq v(t, x, y) \leq \tilde{\psi}_2^{\mathrm{T}}(t, \|x\|) \tilde{A}_2(y) \psi_2(t, \|x\|)$ *при всех* $(t, x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^m$;

б) $\psi_1^{\mathrm{T}}(\|x\|) A_1(y) \psi_1(\|x\|) \leq v(t, x, y) \leq \psi_2^{\mathrm{T}}(\|x\|) \tilde{A}_2(y) \psi_2(\|x\|)$ *при всех* $(t, x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^m$;

в) *симметричная* $(m \times m)$*-матрица* $A_3 = A_3(t)$ *такая, что* $v_+^{\Delta}(t, x, y) \leq$ $\leq \psi_3^{\mathrm{T}}(\|x\|) A_3 \psi_3(\|x\|)$ *при всех* $(t, x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^m$.

Тогда если матрицы $A_1(y)$ *и* $\tilde{A}_2(y)$, $y \neq 0 \in \mathbb{R}^m$, *положительно определенные и матрица* A_3 *полуопределенно отрицательная, то*:

а) *состояние* $x = 0$ *системы* (1) *устойчиво при условии* 3а);

б) *состояние* $x = 0$ *системы* (1) *равномерно устойчиво при условии* 3б).

Доказательство этой теоремы приведено в статье [5].

***Следствие* 1.** *Если все условия теоремы* 2 *выполняются при* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *то теорема* 2 *обращается в теорему* 2.5.1 *из монографии* [4], *которая доказана для непрерывной на* $\mathbb{R}$ *системы, соответствующей системе* (1).

***Следствие* 2.** *Если все условия теоремы* 2 *выполняются при* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *то теорема* 2 *обращается в теорему* 3.3.3 *из монографии* [6], *которая доказана для дискретной по времени системы, соответствующей системе* (1).

Теорема 3. *Пусть вектор-функция* f *в системе* (1) *удовлетворяет условиям* $H_1 - H_4$ *и существуют*:

1) *матричнозначная функция* $U\colon \mathbb{T}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}^{m\times m}$ *и вектор* $y \in \mathbb{R}^m$ *такие, что функция* $v(t, x, y) = y^{\mathrm{T}} U(t, x) y$ *локально липшицева по* x *при всех* $t \in \mathbb{T}$;

2) *функции* η_{1i}, η_{2i}, $\eta_{3i} \in K$*-классу*, $i = 1, 2, \ldots, m$, *и симметричные* $(m \times m)$*-матрицы* $C_j(y)$, $j = 1, 2$, *такие, что*:

а) $\eta_1^{\mathrm{T}}(\|x\|) C_1(y) \eta_1(\|x\|) \le v(t, x, y) \le \eta_2^{\mathrm{T}}(\|x\|) C_2(y) \eta_2(\|x\|)$ *при всех* $(t, x, y) \in \mathbb{T}\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}^m$;

б) *симметричная* $(m\times m)$*-матрица* $C_3 = C_3(t)$ *такая, что*

$$v_+^{\Delta}(t, x, y) \le \eta_3^{\mathrm{T}}(\|x\|) C_3 \eta_3(\|x\|) + m\big(t, \eta_3(\|x\|)\big)$$
$$\text{при всех } (t, x, y) \in \mathbb{T}\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}^m,$$

где функция $m(t, \cdot)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim \frac{m\big(t, \eta_3(\|x\|)\big)}{\|\eta_3\|} = 0 \quad \text{при} \quad \|\eta_3\| \to 0$$

равномерно по $t \in \mathbb{T}$;

в) *постоянная* $(m\times m)$*-матрица* C_3^* *такая, что* $C_3(t) \le C_3^*$ *при всех* $t \in \mathbb{T}$;

3) *постоянная* $\alpha > 0$ *такая, что* $\overline{B}(\alpha) \subset \mathbb{N}$ *и для каждого* $t \in \mathbb{T}$ *непустым является множество*

$$G(t, \alpha) = \{x \in \mathbb{N} : v(t, x, \eta) \le \lambda_m(C_1)\overline{\eta}_1(\alpha)\},$$

где $\lambda_m(C_1)$ — *минимальное собственное значение* C_1, $\overline{\eta}_1(\|x\|) \le \eta_1^{\mathrm{T}}(\|x\|) \times \times \eta_1(\|x\|)$ *при всех* $x \in \mathbb{N}$, $\tilde{\eta}_1 \in K$*-классу*.

Тогда при условии, что матрицы $C_1(y)$, $C_2(y)$ *положительно определенные и матрица* C_3^* *отрицательно определенная, верны утверждения*:

а) *при любых* $t_0 \in \mathbb{T}$ *и* $x \in G(t_0, \alpha)$ *решение* $x(t, t_0, x_0) \to 0$ *равномерно по* t_0 *и* x_0 *при* $t \to \infty$,

б) *состояние* $x = 0$ *системы равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из условий 3а) теоремы и ограничений на матрицы $C_1(y)$ и $C_2(y)$ следует, что функция $v(t, x, y)$ является положительно определенной на $\mathbb{N}$ и убывающей. Из условий (2) находим

$$v_+^{\Delta} v(t, x, y) \le (1-\beta)\lambda_M(C_3)\tilde{\omega}_1(\|x\|), \tag{6}$$

где $0 < \beta < 1$, $\lambda_M(C_3^*) < 0$, $\lambda_M(C_3^*)$ — максимальное собственное значение матрицы C_3^*, функция $\tilde{\omega} \in K$-классу такая, что

$$\tilde{\omega}(\|x\|) \geq \eta_3^{\mathrm{T}}(\|x\|)\eta_3(\|x\|)$$

при всех $x \in \mathbb{N}$.

Согласно условию 3 теоремы существует $\alpha > 0$ такое, что $\bar{B}(\alpha \subset \mathbb{N})$, и тогда

$$G(t, \alpha) \subset \bar{B}(\alpha) \subset \mathbb{N} \tag{7}$$

для любых $t \in \mathbb{T}$.

Из условия (6) следует, что для любых $t_0 \in \mathbb{T}$ и $x \in G(t_0, \alpha)$ имеет место включение $x(t, t_0, x_0) \in G(t_0, \alpha)$ для любого $t \in \mathbb{T}$ и потому из (7) следует, что $x(t, t_0, x_0)$ не может достигнуть границы $\mathbb{N}$ за конечное время.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\varepsilon^* > 0$ так, чтобы

$$\lambda_M(C_2)\tilde{\eta}_2(\varepsilon^*) < \lambda_M(C_1)\tilde{\eta}_1(\varepsilon).$$

Вычислим величину $\lambda_M(C_2)\tilde{\eta}_2(\varepsilon^*)\left((1-\beta)\lambda_M\left(C_3^*\right)\omega(\eta)\right)^{-1}$ и выберем γ больше этой величины. Покажем, что $x(t, t_0, x_0)$ не может превысить значение ε^* для всех $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$. В самом деле, из (6) имеем

$$v(t, x(t), y) \leq v(t_0, x_0, y_0) + (1-\beta)\lambda_M\left(C_3^*\right)\int_{t_0}^{t}\omega(\|x(s)\|)\Delta_s \leq$$

$$\leq \lambda_M(C_2)\tilde{\eta}_2(\varepsilon^*) - \omega(\eta)\gamma, \quad (t_0, t) \in \mathbb{T},$$

что противоречит условию 2a). Следовательно, существует $t_1 \in [t_0, t_0 + \gamma]$, для которого

$$\lambda_M(C_2)\tilde{\eta}_2(\|x(t_1)\|) \leq \lambda_M(C_2)\tilde{\eta}_2(\varepsilon^*) < \lambda_m(C_1)\tilde{\eta}_1(\varepsilon),$$

$$0 \leq v\left(t_i^*, x(t_i^*), y\right) \leq v(t_0, x_0, y) + (1-\beta)\lambda_M\left(C_3^*\right) i\omega\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\frac{1}{2M}\varepsilon < 0,$$

для больших значений i. Это неравенство противоречит условию 2a) теоремы 3 и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t, t_0, x_0)\| = 0$.

Теорема 3 доказана.

***Следствие* 3.** *Если все условия теоремы* 3 *выполняются при* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *то теорема* 3 *обращается в теорему* 2.5.3 *из монографии* [4], *которая доказана для непрерывной системы*, *соответствующей системе* (1).

***Следствие* 4.** *Если все условия теоремы* 3 *выполняются при* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *то теорема* 3 *обращается в теорему* 3.3.4 *из монографии* [6], *которая доказана для дискретной во времени системы*, *соответствующей системе* (1).

5. Обсуждение результатов. Заметим, что теоремы 2, 3 остаются в силе и в случае, когда среди элементов матричнозначной функции $U(t, x)$ имеется хотя бы один, для которого скалярная функция $v(t, x, y)$ удовлетворяет всем условиям соответствующей теоремы. Ясно, что в ряде случаев вполне оправдано применение простейших функций Ляпунова.

***Пример*.** Рассмотрим на временной шкале $\mathbb{T}$ с функцией зернистости $\mu(t)$ систему динамических уравнений

$$x^{\Delta}(t) = yx^2 - xy^2,$$

$$y^{\Delta}(t) = -x^3. \tag{8}$$

Система (8) при $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= yx^2 - xy^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^3. \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку для функции $v(x, y) = x^2 + y^2$ имеем

$$\dot{v}(x, y)\big|_{(9)} = -2x^2y^2,$$

то состояние $x = y = 0$ системы (9) асимптотически устойчиво, в то время как ее линейное приближение лишь устойчиво.

Для системы (8) и функции $v(x, y)$ на временной шкале $\mathbb{T}$ Δ-производная функции $v(x, y)$ имеет вид

$$v^{\Delta}(x, y)(t)\Big|_{(8)} = -2x^2y^2 + \mu(t)\left\{\left(yx^2 - xy^2\right)^2 + x^6\right\}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что существует значение $\mu^*(t) > 0$ такое, что при $0 < \mu(t) < \mu^*(t)$ состояние $x = y = 0$ системы (8) асимптотически устойчиво, при $\mu(t) = \mu^*(t)$, для которого $-2x^2y^2 + \mu^*(t)\left\{\left(yx^2 - xy^2\right)^2 + x^6\right\} = 0$, устойчиво и при $\mu(t) > \mu^*(t)$ неустойчиво.

Применение прямого метода Ляпунова, основанного на матричнозначной функции для исследования динамики систем на временной шкале, позволяет облегчить построение подходящей функции Ляпунова в случае системы (1) большой размерности.

Предложенный подход может быть применен при исследовании устойчивости систем Такаги – Сугено [7], а также систем в полуупорядоченных пространствах (см. [8, 9]).

1. *Aulbach B., Hilger S.* A unified approach to continuous and discrete dynamics // Qual. Theory Different. Equat. – 1988. – **53**. – P. 37 – 56.
2. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scale: introduction with applications. – Boston; Berlin: Birkhäuser, 2001. – 358 p.
3. *Hilger S.* Analysis on measure chains: a unified approach to continuous and discrete calculus // Res. Math. – 1990. – **18** – P. 18 – 56.
4. *Martynyuk A. A.* Stability by Liapunov's matrix function method with applications. – New York: Marcel Dekker, Inc., 1998. – 276 p.
5. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Об устойчивости динамических систем на временной шкале // Докл. АН. – 2007. – **413**, № 1. – С. 11 – 15.
6. *Martynyuk A. A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics. Novel approaches to Liapunov's matrix functions. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2002. – 300 p.
7. *Benreieb M., Gasmi M., Borne P.* New stability conditions for Takagi – Sugeno fuzzy continuous nonlinear models // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2005. – **5**, № 4. – P. 369 – 379.
8. *Алилуйко А. М., Мазко А. Г.* Инвариантные конусы и устойчивость линейных динамических систем // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1446 – 1461.
9. *Мазко А. Г.* Устойчивость и сравнение состояний динамических систем относительно переменного конуса // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 2. – С. 198 – 213.

Получено 26.09.06