УДК 517.5

В. Ф. Бабенко
(Днепропетр. нац. ун-т; Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т инженеров ж.-д. трансп.; Днепропетр. нац. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

A new sharp inequality of the Kolmogorov type is proved that estimates the norm of a mixed derivative of fractional order (in the Marchaud sense) of a function of two variables with the help of the norm of function itself and norms of its first-order partial derivatives.

Доведено нову точну нерівність типу Колмогорова, яка оцінює норму мішаної похідної дробового порядку (в сенсі Маршо) функції двох змінних через норму самої функції і норми її частинних похідних першого порядку.

Во многих вопросах анализа возникает необходимость рассматривать производные и интегралы дробного порядка (см., например, [1]). Классическое определение Лиувилля производных дробного порядка $\alpha \in (0,1)$ функции $x(u)$, $u \in \mathbb{R}$, заданной на всей действительной оси, таково [1, с. 43]:

$$\left(D_{+}^{\alpha} x\right)(u) \ := \ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{du} \int_{-\infty}^{u} \frac{x(t)}{(u-t)^{\alpha}} dt,$$

$$\left(D_{-}^{\alpha} x\right)(u) \ := \ -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{du} \int_{u}^{\infty} \frac{x(t)}{(u-t)^{\alpha}} dt.$$

Не менее важны, а в ряде вопросов более удобны, производные в смысле Маршо [2] (см. также [1, с. 95 – 97])

$$\left(D_{\pm}^{\alpha} x\right)(u) \ := \ \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{\infty} \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{1}$$

Ниже для сокращения записей будем полагать $A_{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}$.

Известно (см., например, [1, с. 96]), что для достаточно хороших функций значения этих производных совпадают:

$$\left(\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} x\right)(u) \ = \ \left(D_{\pm}^{\alpha} x\right)(u). \tag{2}$$

Для выполнения этого равенства достаточно, например, чтобы функция $x(u)$ была локально абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$ ($x \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$).

Для $\delta > 0$ рассмотрим задачу

$$\left\| \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} x \right\|_{\infty} \to \sup; \ x \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \quad \| x \|_{\infty} \le \delta, \quad \| x' \|_{\infty} \le 1, \tag{3}$$

где

$$\| x \|_{\infty} \ := \ \operatorname{ess\,sup}\{ | x(u) | : u \in \mathbb{R} \}.$$

Задача (3) является частным случаем общей задачи о точной оценке нормы

„промежуточной" производной при известных оценках норм функции и ее производной более высокого порядка (см., например, [3], § 1.7), которая активно изучалась многими математиками. Обзоры известных точных результатов по ее решению в случае производных целого порядка и дальнейшие ссылки можно найти, например, в [3 – 5]. Случай производных дробного порядка менее исследован.

Заметим, что для рассматриваемого класса функций в силу условия $x \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ выполняются равенства (2).

Решение задачи (3) содержится в следующем точном неравенстве типа Колмогорова (см. [6]):

$$\left\| \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} x \right\|_{\infty} \le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \| x \|_{\infty}^{1-\alpha} \| x' \|_{\infty}^{\alpha},$$

причем данное неравенство обращается в равенство для функции $x(u)$, которая определяется следующим образом: $x(u) = |u| - 1/2$, если $|u| \le 1$, и $x(u) = 1/2$, если $|u| \ge 1$. Из приведенного неравенства получаем

$$\sup_{\substack{x \in AC(\mathbb{R}) \\ \|x\|_{\infty} \le \delta, \|x'\|_{\infty} \le 1}} \left\| \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha} x \right\|_{\infty} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{(2\delta)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Другие известные точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных см. в работах [7 – 10].

Отметим, что в случае функций двух и более переменных точных неравенств типа Колмогорова известно немного (см. [11 – 15]).

В данной статье рассмотрим аналог задачи (3) для функций двух переменных $x(u)$, $u = (u_1, u_2)$, заданных на $\mathbb{R}^2$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$;

$$\Delta_{t_1} x(u_1, u_2) := x(u_1, u_2) - x(u_1 + t_1, u_2),$$

$$\Delta_{t_2} x(u_1, u_2) := x(u_1, u_2) - x(u_1, u_2 + t_2),$$

$$\Delta_{t_1} \Delta_{t_2} x(u_1, u_2) := x(u_1, u_2) - x(u_1 + t_1, u_2) - x(u_1, u_2 + t_2) + x(u_1 + t_1, u_2 + t_2),$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad \varepsilon_i = \pm,$$

$$\| x \|_{\infty} := \operatorname{ess\,sup} \left\{ | x(u) | : u \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Смешанные производные Маршо $\mathbb{D}_{\varepsilon}^{\alpha} x$ порядка α определяются равенством (см. [1, с. 347])

$$\left(\mathbb{D}_{\varepsilon}^{\alpha} \right) x(u) := A_{\alpha} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_{-\varepsilon_1 t_1} \Delta_{-\varepsilon_2 t_2} x(u_1, u_2)}{t_1^{1+\alpha_1} t_2^{1+\alpha_2}} dt_1 \, dt_2,$$

где $A_{\alpha} = A_{\alpha_1} A_{\alpha_2}$.

Пусть $AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ — класс функций $x(u)$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, таких, что при любом фиксированном значении одной переменной получаемая функция другой переменной является локально абсолютно непрерывной. Для функций $x \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ при почти всех $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ существуют частные производные $D^{(1,0)} x(u_1, u_2) = \frac{\partial x}{\partial u_1}(u_1, u_2)$ и $D^{(0,1)} x(u_1, u_2) = \frac{\partial x}{\partial u_2}(u_1, u_2)$.

Точная формулировка задачи такова:

$$\left\| \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x \right\|_\infty \to \sup, \quad x \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2), \quad \|x\|_\infty \le \delta, \quad \left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty \le 1, \quad \left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty \le 1. \tag{4}$$

Для решения этой задачи докажем точное неравенство типа Колмогорова для норм $\left\| \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x \right\|_\infty$, $\|x\|_\infty$, $\left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty$, $\left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty$.

Теорема. *Пусть* $x(u) \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, $\|x\|_\infty < \infty$, $\left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty < \infty$, $\left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty < \infty$, $\left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty \left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty \ne 0$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. *Тогда имеет место точное неравенство*

$$\left\| \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x \right\|_\infty \le \frac{2}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)} \frac{2^{1-(\alpha_1+\alpha_2)}}{1-(\alpha_1+\alpha_2)} \|x\|_\infty^{1-(\alpha_1+\alpha_2)} \left\| D^{(1,0)} \right\|_\infty^{\alpha_1} \left\| D^{(0,1)} \right\|_\infty^{\alpha_2}. \tag{5}$$

Доказательство. Имеем

$$\left\| \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x \right\|_\infty \le A_\alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\left\| \Delta_{-\varepsilon_1 t_1} \Delta_{-\varepsilon_2 t_2} x(\cdot, \cdot) \right\|_\infty}{t_1^{1+\alpha_1} t_2^{1+\alpha_2}} dt_1 \, dt_2. \tag{6}$$

Для оценки нормы смешанной разности используем неравенства $(t_1, t_2 > 0)$

$$\left\| \Delta_{-\varepsilon_1 t_1} \Delta_{-\varepsilon_2 t_2} x(\cdot, \cdot) \right\|_\infty \le 2^2 \|x\|_\infty,$$

$$\left\| \Delta_{-\varepsilon_1 t_1} \Delta_{-\varepsilon_2 t_2} x(\cdot, \cdot) \right\|_\infty \le 2 \left\| \Delta_{-\varepsilon_1 t_1} x(\cdot, \cdot) \right\|_\infty \le 2 t_1 \left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty,$$

$$\left\| \Delta_{-\varepsilon_1 t_1} \Delta_{-\varepsilon_2 t_2} x(\cdot, \cdot) \right\|_\infty \le 2 \left\| \Delta_{-\varepsilon_2 t_2} x(\cdot, \cdot) \right\|_\infty \le 2 t_2 \left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty.$$

Объединяя эти оценки, получаем

$$\left\| \Delta_{-\varepsilon_1 t_1} \Delta_{-\varepsilon_2 t_2} x(\cdot, \cdot) \right\|_\infty \le 2 \min\left\{ 2\|x\|_\infty, t_1 \left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty, t_2 \left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty \right\}. \tag{7}$$

Применяя (7) в (6), получаем

$$\left\| \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x(u) \right\|_\infty \le 2 A_\alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\min\left\{ 2\|x\|_\infty, t_1 \left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty, t_2 \left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty \right\}}{t_1^{1+\alpha_1} t_2^{1+\alpha_2}} dt_1 \, dt_2 =: 2 A_\alpha I. \tag{8}$$

Для произвольных $h_1, h_2 > 0$ разобьем область интегрирования $\mathbb{R}_+^2$ в (8) на три части:

$$\mathbb{R}_+^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3,$$

$$U_1 = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^2 : h_2 t_1 \le h_1 t_2, t_1 \le h_1 \right\},$$

$$U_2 = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^2 : h_1 t_2 \le h_2 t_1, t_2 \le h_2 \right\},$$

$$U_3 = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^2 : t_1 \ge h_1, t_2 \ge h_2 \right\}.$$

Попарные пересечения этих частей имеют нулевую плоскую меру Лебега, так что

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

где I_k — интеграл в (8) по области U_k, $k = 1, 2, 3$.

Оценим интеграл I_2:

$$I_2 \le \iint\limits_{U_2} \frac{t_2 \left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty}{t_1^{1+\alpha_1} t_2^{1+\alpha_2}} dt_1 dt_2 = \left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty \int\limits_0^{h_2} t_2^{-\alpha_2} \int\limits_{\frac{h_1}{h_2} t_2}^{\infty} t_1^{-1-\alpha_1} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{\left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty}{\alpha_1} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{-\alpha_1} \int\limits_0^{h_2} t_2^{-\alpha_1-\alpha_2} dt_2 = \frac{\left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty}{\alpha_1 (1 - (\alpha_1 + \alpha_2))} \frac{h_2^{1-\alpha_2}}{h_1^{\alpha_1}}.$$

Аналогично

$$I_1 \le \frac{\left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty}{\alpha_2 (1 - (\alpha_1 + \alpha_2))} \frac{h_1^{1-\alpha_1}}{h_2^{\alpha_2}}.$$

Интеграл I_3 оценивается так:

$$I_3 \le \int\limits_{h_1}^{\infty} \int\limits_{h_2}^{\infty} \frac{2 \| x \|_\infty}{t_1^{1+\alpha_1} t_2^{1+\alpha_2}} dt_1 dt_2 = \frac{2 \| x \|_\infty}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2}}.$$

В результате для произвольных $h_1, h_2 > 0$ получаем аддитивное неравенство

$$\left\| \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x(u) \right\|_\infty \le$$

$$\le 2 A_\alpha \left(\frac{2 \| x \|_\infty}{\alpha_1 \alpha_2} h_1^{-\alpha_1} h_2^{-\alpha_2} + \frac{\left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty}{\alpha_1 (1 - (\alpha_1 + \alpha_2))} \frac{h_2^{1-\alpha_2}}{h_1^{\alpha_1}} + \frac{\left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty}{\alpha_2 (1 - (\alpha_1 + \alpha_2))} \frac{h_1^{1-\alpha_1}}{h_2^{\alpha_2}} \right). \tag{9}$$

Полагая в правой части неравенства (9)

$$h_1 = 2 \frac{\| x \|_\infty}{\left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty}, \qquad h_2 = 2 \frac{\| x \|_\infty}{\left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty},$$

имеем

$$\left\| \mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x(u) \right\|_\infty \le 2 A_\alpha \| x \|_\infty^{1-(\alpha_1+\alpha_2)} \left\| D^{(1,0)} x \right\|_\infty^{\alpha_1} \left\| D^{(0,1)} x \right\|_\infty^{\alpha_2} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{\alpha_1 \alpha_2 2^{\alpha_1+\alpha_2}} + \frac{2^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{\alpha_2 (1 - (\alpha_1 + \alpha_2))} + \frac{2^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{\alpha_1 (1 - (\alpha_1 + \alpha_2))} \right),$$

что совпадает с (5).

Теперь построим функцию $f(u_1, u_2)$, которая обращает (5) в равенство.

Сначала определим $f(u_1, u_2)$ для $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^2$. Положим

$$f(u_1, u_2) = u_2 - u_1 + \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad u_2 \le u_1 \le 1,$$

$$f(u_1, u_2) = u_2 - \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad u_2 \le 1 \le u_1,$$

$$f(u_1, u_2) = u_1 - u_2 + \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad u_1 \le u_2 \le 1,$$

$$f(u_1, u_2) = u_1 - \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad u_1 \le 1 \le u_2,$$

$$f(u_1,u_2) = \frac{1}{2}, \quad \text{если} \quad u_1>1, \quad u_2>1.$$

Продолжим $f(u_1,u_2)$ на всю плоскость $\mathbb{R}^2$ четным образом по каждой переменной.

Очевидно, что

$$\|f\|_\infty = \frac{1}{2}, \qquad \left\|D^{(1,0)}f\right\|_\infty = \left\|D^{(0,1)}f\right\|_\infty = 1. \tag{10}$$

Кроме того, для смешанной разности в нуле при $t_1, t_2>0$ справедливы равенства

$$\Delta_{t_1}\Delta_{t_2} f(0,0) = 2t_2, \quad \text{если} \quad t_2 \le \min\{t_1,1\},$$

$$\Delta_{t_1}\Delta_{t_2} f(0,0) = 2t_1, \quad \text{если} \quad t_1 \le \min\{t_2,1\},$$

$$\Delta_{t_1}\Delta_{t_2} f(0,0) = 2, \quad \text{если} \quad t_1\ge 1,\, t_2\ge 1.$$

Для $\varepsilon=(-,-)$ оценим $\left\|\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f(u)\right\|_\infty$ снизу:

$$\left\|\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f(u)\right\|_\infty \ge \left(\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon\right) f(0,0) =$$

$$= A_\alpha\left(\iint\limits_{t_2\le\min\{t_1,1\}} + \iint\limits_{t_1\le\min\{t_2,1\}} + \iint\limits_{t_1\ge1,t_2\ge1}\right)\frac{\Delta_{t_1}\Delta_{t_2} f(0,0)}{t_1^{\alpha_1+1}t_2^{\alpha_2+1}}\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= 2A_\alpha\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2(1-(\alpha_1+\alpha_2))} + \frac{1}{\alpha_1(1-(\alpha_1+\alpha_2))}\right) = \frac{2A_\alpha}{\alpha_1\alpha_2(1-(\alpha_1+\alpha_2))}.$$

Учитывая (10) и приведенное выше выражение для $\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f(0,0)$, получаем

$$\frac{\left\|\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon f\right\|_\infty}{\|f\|_\infty^{1-(\alpha_1-\alpha_2)}\left\|D^{(1,0)}f\right\|_\infty^{\alpha_1}\left\|D^{(0,1)}f\right\|_\infty^{\alpha_2}} \ge \frac{2}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)}\frac{2^{1-(\alpha_1+\alpha_2)}}{1-(\alpha_1+\alpha_2)},$$

откуда и следует точность неравенства (5).

Аналогичным образом строятся экстремальные функции и для других значений вектора $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$.

Теорема доказана.

Из теоремы выводим такое следствие.

Следствие. *В условиях теоремы* 1

$$\sup_{\substack{x\in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2),\|x\|_\infty\le\delta,\\ \left\|D^{(1,0)}x\right\|_\infty\le1,\left\|D^{(0,1)}x\right\|_\infty\le1}} \left\|\mathbb{D}^\alpha_\varepsilon(x)\right\|_\infty = \frac{2\cdot(2\delta)^{1-(\alpha_1+\alpha_2)}}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)\left(1-(\alpha_1+\alpha_2)\right)}.$$

Замечания. **1.** Мы получили мультипликативное неравенство (5) из аддитивного неравенства (9). Легко видеть, что верно и обратное — из неравенства (5) следует неравенство (9) при всех значениях $h_1, h_2>0$.

2. Для выполнения неравенства (5) для всех функций из данного класса показатели степеней при нормах $\|x\|_\infty$, $\left\|D^{(1,0)}x\right\|_\infty$, $\left\|D^{(0,1)}x\right\|_\infty$ единственно возможные. В этом легко убедиться, рассматривая наряду с функцией $x(u_1,u_2)$ семейство функций вида $Cx(\delta_1u_1,\delta_2u_2)$, $C\in\mathbb{R}$, δ_1, $\delta_2\in\mathbb{R}_+$.

3. Условие $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ теоремы опустить нельзя, так как для построенной функции $f(u_1, u_2)$ при $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ получаем

$$\mathbb{D}_{\varepsilon}^{\alpha} f(0,0) = \infty.$$

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 650 с.
2. *Marchaud A.* Sur les derivées et sur les différences des fonctions de variables réelles // J. math. pures et appl. – 1927. – **6**. – P. 337 – 425.
3. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения.– Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
4. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 44 – 66.
5. *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – **51**, № 6. – С. 88 – 124.
6. *Бабенко В. Ф., Чурілова М. С.* Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2001. – Вип. 6. – С. 16 – 20.
7. *Гейсберг С. П.* Обобщение неравенства Адамара // Сб. науч. тр. Ленингр. мех. ин-та. – 1965. – **50**. – С. 42 – 54.
8. *Arestov V. V.* Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approxim. Theory. Banach Center Publ. – Warsaw: PWN, 1979. – P. 19 – 34.
9. *Babenko V. F., Churilova M. S.* On the Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives // East J. Approxim. – 2002. – **8**, № 4. – P. 437 – 446.
10. *Magaril-Il'jaev G. G., Tihomirov V. M.* On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line // Anal. math. – 1981. – **7**, № 1. – P. 37 – 47.
11. *Коновалов В. Н.* Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 1. – С. 67 – 78.
12. *Буслаев А. П., Тихомиров И. М.* О неравенствах для производных в многомерном случае // Там же. – 1979. – **25**, № 1. – С. 59 – 74.
13. *Тимошин О. А.* Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядков // Докл. РАН. – 1995. – **344**, № 1. – С. 20 – 22.
14. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Multivar. Approxim. and Splines / Eds G. Nirnberger, J. W. Schmidt, G. Walz. – Basel: Birkhäuser, 1997. – P. 1 – 12.
15. *Бабенко В. Ф.* О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных // Доп. НАН України. – 2000. – № 5. – С. 7 – 11.

Получено 26.06.06