УДК 517.956.4

Ю. Н. Бернацкая (Нац. ун-т „Киево-Могилянская академия”, Киев)

О ПОВЕДЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

A parabolic equation is considered on a Riemannian manifold of nonpositive section curvature (a Cartan – Hadamard-type manifold). The second boundary-value problem for this equation is set in a bounded domain whose surface is a smooth submanifold. It is proved that the gradient of the single-layer potential for such problem possesses a jump in crossing the submanifold similarly to its behavior in the Euclidean space.

На рімановому многовиді недодатної секційної кривини (многовиді типу Картана – Адамара) розглянуто параболічне рівняння. Другу граничну задачу для нього задано в обмеженій області, поверхнею якої є гладкий підмноговид. Доведено, що градієнт потенціалу простого шару для такої задачі має стрибок при переході через підмноговид подібно до його поведінки в евклідовому просторі.

1. Введение. Пусть $\mathcal{M}$ — полное односвязное риманово многообразие размерности n, удовлетворяющее условиям, приведенным ниже. На этом многообразии рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа – Бельтрами, который определяется через ортобазис $\{e_k\}$ в $T_x\mathcal{M}$ формулой $\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \sum_k \left\langle \nabla_{e_k} \operatorname{grad} u,\ e_k \right\rangle$. Для этого уравнения решается вторая краевая задача внутри или вне некоторой ограниченной области D с границей $\mathcal{S}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_x}\right|_{\mathcal{S}} = f(t, x), \qquad u|_{t=T_0} = 0, \tag{2}$$

где ν_x — внешняя единичная нормаль к $\mathcal{S}$ в $\mathcal{M}$ в точке x, а функция $f(t, x)$ непрерывна на $(T_0, T) \times D$.

Приведенная задача в евклидовом пространстве решена методом потенциала простого слоя основоположником этого метода для параболических граничных задач В. Погожельским. Его результаты изложены в монографии А. Фридмана [1], где в библиографии можно найти ссылки на оригинальные работы.

Решение методом потенциала требует дополнительного доказательства наличия скачка градиента потенциала при переходе через границу $\mathcal{S}$. Поскольку при доказательстве этого факта существенно используется евклидова геометрия, непосредственно перенести его на многообразие не представляется возможным. Хотя интуитивно ясно, что потенциал простого слоя и его градиент на многообразии будут вести себя так же, как в евклидовом пространстве, однако это утверждение требует строгого доказательства.

Очевидность повторения свойств вытекает из результатов Г. Маккина [2], согласно которым любое параболическое уравнение в евклидовом пространстве с невырожденной матрицей диффузии, зависящей от координаты и времени, может быть перенесено на гладкое многообразие. Последнее строится на основе матрицы диффузии: метрический тензор берется равным обратной к этой матрице. В результате неоднородность матрицы диффузии переходит в нелинейность пространства. И такие универсальные функции, как потенциалы простого и двойного слоя, являясь характеристиками уравнения, должны сохранять свои свойства.

Следует отметить, что поскольку оператор Лапласа – Бельтрами в координатной записи имеет слагаемое, отвечающее за снос:

$$\Delta u = g^{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma^i_{ij}\, g^{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x^k},$$

к уравнению (1) с самосопряженным оператором приводятся только уравнения диффузии (или теплопроводности) со специальным сносом. При произвольном сносе или его отсутствии вместо (1) получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + \langle \operatorname{grad} u, B\rangle, \tag{3}$$

где векторное поле $B : \mathcal{M} \to T_x\mathcal{M}$ задает снос.

Преобразование матрицы диффузии в геометрию многообразия оказалось очень эффективным в теории диффузионных процессов. Когда же С. Варадан [3] нашел асимптотику фундаментального решения $p(t, x, y)$

$$\lim_{t\to 0}[-2t \ln p(t, x, y)] = \rho^2(x, y),$$

этот подход начали использовать в теории дифференциальных уравнений. Появилось множество работ, предлагающих оценки фундаментального решения вида

$$f_1(t, x, y)\exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2t}\right\} \le p(t, x, y) \le$$

$$\le f_2(t, x, y)\exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2t}\right\},$$

где функции $f_i(t, x, y)$ зависели от геометрии многообразия, а гауссовский множитель $\exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2t}\right\}$ описывал диффузию вдоль геодезической, длина которой между точками x и y обозначена как $\rho(x, y)$. В частности, для многообразия отрицательной ограниченной сверху и снизу секционной кривизны возможна двусторонняя оценка с функциями $\frac{\mathrm{const}}{f_i(t)}$, а для многообразий типа Картана – Адамара эти функции можно определить и более точно: $f_i(t) = t^{n/2}$ [4].

К сожалению, почти все работы ограничиваются оценками решения, не предлагая схемы его построения. Благодаря работам К. Иосиды [5] и В. Г. Бондаренко [6] имеется схема построения методом параметрикса фундаментального решения параболического уравнения на многообразиях типа Картана – Адамара. Для сходимости итерационной процедуры требуется наложить еще некоторые условия на секционную кривизну. Настоящая работа является первой попыткой доказать свойство скачка градиента потенциала простого слоя в пространстве с геометрией, отличной от евклидовой, что необходимо для построения решения второй краевой задачи.

После постановки задачи, которой посвящен второй пункт статьи, в третьем пункте предложено доказательство существования скачка градиента потенциала простого слоя на рассматриваемом многообразии. Вычислена также величина скачка. В последнем пункте содержатся выводы, а именно, утверждается возможность построения решения второй краевой задачи для параболического уравнения на многообразии с помощью рассматриваемого потенциала.

2. Постановка задачи. Определим потенциал простого слоя для рассматриваемого уравнения по аналогии с линейным пространством $\mathbb{R}^n$ формулой

$$V(t,x) = \int_{T_0}^{t} d\tau \int_{\mathcal{S}} \mu(\tau, y)\, p(t-\tau, x, y)\, dS_y, \tag{4}$$

где $p(t,x,y)$ — фундаментальное решение уравнения (1), $\mu(t,x)$ — плотность потенциала, dS_y — элемент объема подмногообразия $\mathcal{S}$.

Условия на многообразие $\mathcal{M}$ формулируются в терминах тензора кривизны $R(x)$ [6]:

1а) $\langle R(x)(U,V)U, V\rangle \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{M}$, $U, V \in T_x\mathcal{M}$, т. е. секционная кривизна многообразия неположительна;

1б) для произвольных ортобазисов $\{e_k\}$, $\{h_k\}$ в $T_x\mathcal{M}$

$$\sum_k \left|\langle R(x)(U,e_k)V, h_k\rangle\right| \leq c_R \sqrt{\operatorname{Ric}(x)(U,U)\operatorname{Ric}(x)(V,V)},$$

а константа c_R не зависит от x;

1в) вдоль любой геодезической γ скалярная кривизна убывает достаточно быстро, т. е. $\int_0^\infty s r(\gamma(s))\,ds < c_r$, где c_r не зависит от γ;

1г) ковариантные производные тензора кривизны удовлетворяют оценкам

$$\left\|\left(\nabla_{X(s)} R\right)(\varphi(s))(Y(s), \dot\varphi(s))Z(s)\right\| \leq f_1(\varphi(s))\,\|X(s)\|\|Y(s)\|\|Z(s)\|,$$

$$\left\|\nabla_{U(s)} \nabla_{X(s)} R(\varphi(s))(Y(s), \dot\varphi(s))Z(s)\right\| \leq f_2(\varphi(s))\,\|X(s)\|\|Y(s)\|\|Z(s)\|\|U(s)\|,$$

где функции f_1 и f_2 такие, что вдоль любой геодезической γ выполняется неравенство $\int_0^\infty s^2 f_k(\gamma(s))\,ds < c_f$, в котором c_f не зависит от γ.

Кроме того, для существования решения краевой задачи следует потребовать определенной гладкости от подмногообразия $\mathcal{S}$ — оно должно иметь свойства поверхности Ляпунова. *Условия на подмногообразие* $\mathcal{S}$:

2а) в каждой точке $x \in \mathcal{S}$ существует касательное пространство $T_x\mathcal{S}$;

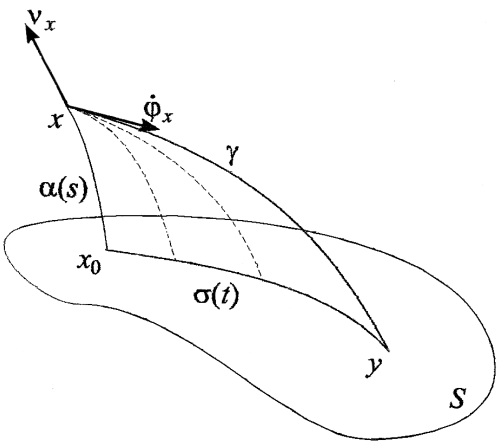
2б) существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in \mathcal{S}$ множество $\mathcal{S} \cap B(x;\delta)$ связно ($B(x;\delta)$ — геодезический шар в $\mathcal{M}$ радиуса δ с центром в точке x) и шар $B(x;\delta)$ пересекается геодезическими, параллельными нормали ν_x, не более чем в одной точке; сфера радиуса δ с центром в точке x называется сферой Ляпунова;

2в) нормаль ν_x удовлетворяет неравенству Липшица, т. е. непрерывна на $\mathcal{S}$; это означает, что существует число $c_\nu > 0$ такое, что

$$\left|\nu_y - \Phi_\gamma(y,x)\,\nu_x\right| \leq c_\nu\,\rho(x,y) \quad \forall x, y \in \mathcal{S},$$

где $\rho(x,y)$ — расстояние в $\mathcal{M}$ между точками x и y, $\gamma(s)$ — геодезическая, соединяющая эти точки в $\mathcal{M}$, $\Phi_\gamma(y,x)$ — оператор параллельного переноса из точки x в точку y вдоль геодезической γ в $\mathcal{M}$.

3. Свойство скачка градиента потенциала простого слоя. Известно, что в линейном пространстве градиент простого слоя имеет скачок при переходе через границу $\mathcal{S}$ области D. Докажем, что подобным свойством обладает и потенциал простого слоя для уравнения на многообразии. А именно, докажем, что справедливо равенство (см. рисунок)



$$\lim_{s\to 0}\langle \operatorname{grad}_x V(t,\alpha(s)),\dot\alpha(s)\rangle \;=\; \mu(t,x_0) \;+\; \int_{T_0}^{t} d\tau \int_{\mathcal{S}} \mu(\tau,y)\,\frac{\partial p(t-\tau,x_0,y)}{\partial \nu_{x_0}}\,dS_y,$$

где $\alpha(s)$ — геодезическая $\left(\alpha(0) = x_0,\ \alpha(0) = \nu_{x_0}\right)$, выходящая из точки x_0 в направлении нормали к подмногообразию $\mathcal{S}$. Вычисление выражения $\left\langle \operatorname{grad}_{x_0} V(t,\alpha(s)),\ \dot\alpha(s)\right\rangle$ приводит к интегралу

$$\int_{T_0}^{t} d\tau \int_{\mathcal{S}} \mu(\tau,y)\,\frac{\partial p(t-\tau,x_0,y)}{\partial \nu_{x_0}}\,dS_y,$$

который является несобственным, поскольку в точке $y = x_0$ теряет смысл. Взять такой интеграл удается, если вывести точку x_0 из подмногообразия $\mathcal{S}$, например сместить вдоль $\alpha(s)$. Пусть $\alpha(s) = x$ — фиксированная точка. Будем искать интеграл

$$\int_{T_0}^{t} d\tau \int_{\mathcal{S}} \mu(\tau,y)\,\frac{\partial p(t-\tau,x,y)}{\partial \nu_{x}}\,dS_y,$$

где ν_x — нормаль ν_{x_0}, параллельно перенесенная из точки x_0 вдоль геодезической $\alpha(s)$, т. е. $\nu_x = \Phi_\alpha(x,x_0)\nu_{x_0}$. Кроме того, $\nu_x = \dot\alpha(s)$, поскольку полагаем, что s — натуральный параметр. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть многообразие $\mathcal{M}$ удовлетворяет условиям* 1, *а подмногообразие $\mathcal{S}$ — условиям* 2. *Тогда для второй краевой задачи* (1), (2), *заданной в области $D\subset\mathcal{M}$ с границей $\mathcal{S}$, можно построить потенциал простого слоя по формуле* (2), *определенный везде в* $(T_0,\infty)\times\mathcal{M}$.

Градиент определенного таким образом потенциала имеет скачок при переходе через границу $\mathcal{S}$ области D, т. е. существуют пределы

$$U_i(t_0,x_0) \;=\; \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0)\\ x\in D}} \langle \operatorname{grad}_x V(t,x),\nu_x\rangle,$$

$$U_e(t_0,x_0) \;=\; \lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,t_0)\\ x\notin D}} \langle \operatorname{grad}_x V(t,x),\nu_x\rangle$$

и справедливы равенства

$$U_i(t_0, x_0) = -\mu(t_0, x_0) + \left\langle \operatorname{grad}_{x_0} V(t_0, x_0), \nu_{x_0} \right\rangle,$$

$$U_e(t_0, x_0) = \mu(t_0, x_0) + \left\langle \operatorname{grad}_{x_0} V(t_0, x_0), \nu_{x_0} \right\rangle.$$

Доказательство. Проанализировав функцию, представляющую градиент рассматриваемого потенциала, выделим в ней член, содержащий особенность, и докажем непрерывность остальных. Затем найдем пределы и докажем равенства, содержащиеся в теореме, для случая единичной плотности потенциала. И наконец, распространим полученный результат на случай произвольной плотности.

Для наглядности доказательства осуществим такое построение (см. рисунок): точки $x \in \mathcal{M}$, x_0, $y \in \mathcal{S}$ соединим геодезическими в соответствующих метриках. Точки x и x_0 соединяет геодезическая $\alpha(s)$, ортогональная к подмногообразию $\mathcal{S}$, точки x и y — геодезическая $\gamma(\rho)$ в смысле метрики $\mathcal{M}$. Точки x_0 и y соединены геодезической $\sigma(\varepsilon)$ в смысле метрики $\mathcal{S}$, где натуральный параметр ε является переменной, т. е. точка y будет подвижной. Рассмотрим вариацию $\varphi(s, \varepsilon)$, $\varphi(s, 0) = \alpha(s)$, геодезической $\gamma(\rho)$.

Производную вдоль нормали $\dfrac{\partial p(t, x, y)}{\partial \nu_x}$ выразим с использованием представления градиента фундаментального решения из [7]

$$\operatorname{grad}_x p(t, x, y) = \left(\frac{\rho(x, y)}{t} e(x, y) + W(t, x, y) \right) p(t, x, y),$$

где векторное поле $W(t, x, y)$ ограничено: $\| W(t, x, y) \| \le c_W$, а $e(x, y)$ — касательный вектор к геодезической, соединяющей точку x с y, — в нашем построении является вектором $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}\right|_{s=0}$, который будем обозначать $\dot{\varphi}_x$. Тогда

$$\langle \operatorname{grad}_x V(t, \alpha(s)), \dot{\alpha}(s) \rangle = \int_{T_0}^{t} d\tau \int_{\mathcal{S}} \mu(\tau, y) \frac{\partial p(t-\tau, x, y)}{\partial \nu_x} dS_y =$$

$$= \int_{T_0}^{t} d\tau \int_{\mathcal{S}} \mu(\tau, y) \frac{\rho(x, y)}{t - \tau} (\dot{\varphi}_x, \nu_x)\, p(t - \tau, x, y) dS_y +$$

$$+ \int_{T_0}^{t} d\tau \int_{\mathcal{S}} \mu(\tau, y) \langle W(t-\tau, x, y), \nu_x \rangle\, p(t-\tau, x, y) dS_y.$$

Второй интеграл представляет собой непрерывную функцию, а первый распадается на два интеграла, если учесть, что по методу параметрикса для параболического уравнения на римановом многообразии [6] фундаментальное решение ищут в виде суммы

$$p(t, x, y) = m(t, x, y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathcal{M}} m(t-\tau, x, z) r(\tau, z, y)\, V(dz),$$

где начальное приближение имеет вид

$$m(t, x, y) = e^{-\frac{\phi(x,y)}{2}} q(t, x, y), \qquad q(t, x, y) = (2\pi t)^{-n/2} \exp\left\{ \frac{\rho^2(x, y)}{2t} \right\}.$$

Интеграл в этой сумме также ограничен, поэтому особенность содержится только в слагаемом

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{T_0}^{t} d\tau \int\limits_{S} \mu(\tau, y)\,\frac{\rho(x, y)\langle\dot{\varphi}_x, \nu_x\rangle}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}}\exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x, y)}{2}\right\} dS_y .$$

Пусть плотность потенциала тождественно равна единице $\mu(t, x) \equiv 1$. Проинтегрировав это слагаемое по времени, устремив нижний предел к $-\infty$ и применив замену $\eta = \frac{\rho^2}{2(t-\tau)}$, $\frac{1}{t-\tau} = \frac{2\eta}{\rho^2}$, $d\tau = \frac{\rho^2}{2\eta^2}d\eta$, получим

$$U(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{S} \frac{\rho(x, y)\langle\dot{\varphi}_x, \nu_x\rangle}{(t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}}\exp\left\{-\frac{\rho^2(x, y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x, y)}{2}\right\} dS_y =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}}\int\limits_{S}\frac{\langle\dot{\varphi}_x, \nu_x\rangle}{\rho^{n-1}}\exp\left\{-\frac{\phi(x, y)}{2}\right\} dS_y .$$

Выберем окрестность $B(x_0; \delta)$ точки x_0 согласно условию 2б) и будем полагать, что все построения проводятся в пределах этой окрестности. Интеграл $U(t, x)$ тоже запишем в виде суммы интегралов:

$$U(t, x) = U_0(t, x) + U'(t, x) = \int\limits_{S_\delta(x_0)} + \int\limits_{S/S_\delta(x_0)} ,$$

где $S_\delta(x_0) = \mathcal{S} \cap B(x_0; \delta)$. Второй интеграл будет функцией, непрерывной в любой точке $x_0 \in \mathcal{S}$, поскольку подынтегральное выражение на ограниченном подмногообразии является ограниченной функцией. Потому в дальнейшем будем рассматривать интеграл $U_0(t, x)$.

Представим выражение $\frac{\langle\dot{\varphi}_x, \nu_x\rangle}{\rho^{n-1}}$ в виде $\frac{\omega(\varepsilon)}{u^{n/2}(\varepsilon)}$, где $\omega(\varepsilon) = \rho(x, \sigma(\varepsilon))\langle\dot{\varphi}_x, \nu_x\rangle$ и $u(\varepsilon) = \rho^2(x, \sigma(\varepsilon))$, и разложим $\omega(\varepsilon)$ и $u(\varepsilon)$ по формуле Тейлора в окрестности точки x_0, где $\varepsilon = 0$ (положим $x \notin D$, что соответствует рисунку).

Относительно функции $\omega(\varepsilon)$ можно сказать, что $\omega(0) = -\rho(x, x_0)$ и $\omega'(\varepsilon) = \langle\dot{\varphi}_y, \dot{\sigma}\rangle\langle\dot{\varphi}_x, \nu_x\rangle + \rho\langle Z'_\varepsilon(0), \nu_x\rangle$, где переход к полю Якоби Z_ε осуществлен согласно [8, с. 148]. Производную поля Якоби $Z'_\varepsilon(0)$ находим, интегрируя уравнения Якоби с краевыми условиями $Z_\varepsilon(0) = 0$ и $Z_\varepsilon(\rho) = \dot{\sigma}(\varepsilon) - \dot{\varphi}_y\langle\dot{\varphi}_y, \dot{\sigma}(\varepsilon)\rangle$. Последнее равенство получается дифференцированием тождества $\varphi(\rho(x, \sigma(\varepsilon)), \varepsilon) = \sigma(\varepsilon)$, откуда находим

$$\dot{\varphi}_y\langle\dot{\varphi}_y, \dot{\sigma}(\varepsilon)\rangle + Z_\varepsilon(\rho) = \dot{\sigma}(\varepsilon). \tag{5}$$

Решение уравнения Якоби представим в виде $Z_\varepsilon(\rho) = \mathcal{U}_{12}(\rho, 0)\,Z'_\varepsilon(0)$, откуда $Z'_\varepsilon(0) = \mathcal{U}_{12}^{\pm 1} Z_\varepsilon(\rho) = \mathcal{U}_{12}^{-1}[\dot{\sigma}(\varepsilon) - \dot{\varphi}_y\langle\dot{\varphi}_y, \dot{\sigma}(\varepsilon)\rangle]$. Оператор $\mathcal{U}_{12}$ имеет свойство $\mathcal{U}_{12}^{-1}[\rho\dot{\varphi}(\rho, \varepsilon)] = \dot{\varphi}(0, \varepsilon) = \dot{\varphi}_x$, поэтому

$$w'(\varepsilon) = \langle\dot{\varphi}_y, \dot{\sigma}\rangle\langle\dot{\varphi}_x, \nu_x\rangle + \rho\langle\mathcal{U}_{12}^{-1}\dot{\sigma}, \nu_x\rangle - \langle\dot{\varphi}_y, \dot{\sigma}\rangle\langle\dot{\varphi}_x, \nu_x\rangle = \rho\langle\mathcal{U}_{12}^{-1}\dot{\sigma}, \nu_x\rangle.$$

Вектор $\mathcal{U}_{12}^{-1}\dot{\sigma} = Y(\varepsilon)$ можно считать ограниченным в малом шаре $B(x_0; \delta)$. Обозначим его норму c_Z. Теперь можно записать функцию $\omega(\varepsilon)$:

$$\omega(\varepsilon) = -\rho(x, x_0) + \int_0^{d(x_0,y)} \rho(x, \sigma(\varepsilon)) \langle Y(\varepsilon), \nu_x \rangle d\varepsilon = -\rho(x, x_0) + h_1(x, x_0, y).$$

Функцию $u(\varepsilon)$ представим формулой Тейлора второго порядка. Обозначим $v(\varepsilon) = \langle \dot\varphi_y, \dot\sigma \rangle$, тогда $u'(\varepsilon) = 2\rho(x, \sigma(\varepsilon))\, v(\varepsilon)$ и $u''(\varepsilon) = 2\left[v^2(\varepsilon) + \rho(x, \sigma(\varepsilon)) \times \times v'(\varepsilon)\right]$, где $v'(\varepsilon) = \langle \nabla_{\dot\sigma} \dot\varphi_y, \dot\sigma \rangle + \langle \dot\varphi_y, \nabla_{\dot\sigma} \dot\sigma \rangle$, причем $\nabla_{\dot\sigma} \dot\varphi_y = Z'_\varepsilon(\rho)$. Домножая (5) скалярно на $\dot\sigma(\varepsilon)$, получаем $\langle Z_\varepsilon(\rho), \dot\sigma(\varepsilon) \rangle = 1 - v^2(\varepsilon)$. Вводя векторное поле $B_t = \rho Z'_\varepsilon(\rho) - Z_\varepsilon(\rho)$, определенное в терминах поля Якоби:

$$B_\varepsilon = \int_0^{\rho(x,\sigma(\varepsilon))} s\Phi(\rho(x, \sigma(\varepsilon)), s)\, R(\varphi(s, \varepsilon))\big(\dot\varphi_y(s), Z_\varepsilon(s)\big)\, \dot\varphi_y(s)\, ds,$$

имеем $v'(\varepsilon) = \dfrac{\langle B_\varepsilon, \dot\sigma \rangle}{\rho} + \dfrac{\langle Z_\varepsilon(\rho), \dot\sigma \rangle}{\rho} + \langle \dot\varphi_y, \nabla_{\dot\sigma} \dot\sigma \rangle$. Тогда

$$u(\varepsilon) = \rho^2(x, x_0) + d^2(x_0, y) + 2 \int_0^{d(x_0,y)} \left[\langle B_{\varepsilon'}, \dot\sigma \rangle + \rho \langle \dot\varphi_y, \nabla_{\dot\sigma} \dot\sigma \rangle \right] (\varepsilon - \varepsilon')\, d\varepsilon' =$$

$$= \rho^2(x, x_0) + d^2(x_0, y) + h_2(x, x_0, y).$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Для предложенного выше геометрического построения имеет место представление*

$$\frac{\langle \dot\varphi_x, \nu_x \rangle}{\rho^{n-1}} = \frac{\pm\rho(x, x_0) + h_1(x, x_0, y)}{\left(\rho^2(x, x_0) + d^2(x_0, y) + h_2(x, x_0, y)\right)^{n/2}},$$

где знак „+” соответствует случаю $x \in D$, знак „–” — случаю $x \notin D$.

Также имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *При выполнении условий* 1 *на многообразие $\mathcal{M}$ и условия* 2б) *на подмногообразие $\mathcal{S}$ имеет место оценка*

$$|h_1(x, x_0, y)| \le \frac{c_Z}{2} (\rho_0 + d)^2,$$

а при выполнении условий 1 *на многообразие $\mathcal{M}$ и условия* 2а) *на подмногообразие $\mathcal{S}$ — оценка*

$$|h_2(x, x_0, y)| \le (c_B + 1)\left[\rho_0 d^2 + \frac{1}{3} d^3\right],$$

где для сокращения выражений введены обозначения $\rho_0 \triangleq \rho(x, x_0)$ и $d \triangleq \triangleq d(x_0, y)$.

Доказательство. Раскладывая $\rho(x, \sigma(\varepsilon))$ по формуле Тейлора вдоль ε в окрестности точки x_0, получаем

$$\rho(x, \sigma(\varepsilon)) = \rho(x, x_0) + \int_0^{\varepsilon} \langle \dot\varphi_y(s), \dot\sigma(\varepsilon') \rangle d\varepsilon' \le \rho_0 + \varepsilon.$$

Отсюда с учетом того, что нормаль единична, норма вектора $Y(\varepsilon)$ ограничена и равна c_Z, легко получаем оценку интеграла

$$|h_1(x, x_0, y)| \le c_Z \int\limits_0^{d(x_0,y)} (\rho_0 + \varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{c_Z}{2}(\rho_0 + d)^2 .$$

Поскольку $|\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma| \le 1$, непосредственно получаем оценку

$$|h_2(x, x_0, y)| \le 2 \int\limits_0^{d(x_0,y)} \|B_{\varepsilon'}\|(\varepsilon - \varepsilon')\, d\varepsilon' + 2 \int\limits_0^{d(x_0,y)} \rho\big(x, \sigma(\varepsilon')\big)(\varepsilon - \varepsilon')\, d\varepsilon' .$$

Векторное поле B_ε на многообразии $\mathcal{M}$, удовлетворяющем условиям 1, оценивается следующим образом:

$$\|B_\varepsilon\| = \sqrt{\sum_k \langle B_\varepsilon, Z_k(\rho)\rangle^2} \le \sum_k |\langle B_\varepsilon, Z_k(\rho)\rangle| \le$$

$$\le \sum_k \left| \int\limits_0^\rho s \Big\langle \Phi_\varphi(\rho, s)\, R\big(\dot\varphi_y(s), Z_\varepsilon(s)\big)\, \dot\varphi_y(s), \Phi_\varphi(\rho, s)\, Z_k(s) \Big\rangle ds \right| \le$$

$$\le c_R \int\limits_0^\rho s \operatorname{Ric}\big(\dot\varphi_y(s), \dot\varphi_y(s)\big) \|Z_\varepsilon(s)\| ds \le c_R \int\limits_0^\rho s r(\varphi(s, \varepsilon)) \|Z_\varepsilon(s)\| ds .$$

Здесь использованы свойства 1б), 1в). Если область изменения ρ лежит вблизи нуля — рассматривается малая окрестность точки x_0 — кривизну можно считать ограниченной: $|r(\varphi(s, \varepsilon))| \le c_r$. Тогда с учетом оценки поля Якоби для такого многообразия $\|Z_\varepsilon(s)\| \le \dfrac{s}{\rho}\|Z_t(\rho)\|$, $Z_\varepsilon\big(\rho(x, \sigma(\varepsilon))\big) = \dot\sigma(\varepsilon)$ имеет место оценка

$$\|B_\varepsilon\| \le c_R \int\limits_0^\rho s r(\varphi(s, \varepsilon)) \|Z_\varepsilon(s)\| ds \le c_R c_r \int\limits_0^\rho \frac{s^2}{\rho}\, ds = \frac{c_R c_r}{3}\rho^2 = c_B \rho^2 .$$

Далее

$$|h_2(x, x_0, y)| \le c_B \int\limits_0^{d(x_0,y)} \rho^2\big(x, \sigma(\varepsilon')\big)(\varepsilon - \varepsilon')\, d\varepsilon' + \int\limits_0^{d(x_0,y)} \rho\big(x, \sigma(\varepsilon')\big)(\varepsilon - \varepsilon)\, d\varepsilon \le$$

$$\le (c_B + 1)\left[\rho_0 d^2 + \frac{d^3}{3}\right].$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *В условиях леммы* 2 *выполняются равенства*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \frac{-\rho(x, x_0) + h_1(x, x_0, y)}{\big(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\big)^{n/2}}\, dS_y = -1,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \notin D}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \frac{\rho(x, x_0) + h_1(x, x_0, y)}{\big(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\big)^{n/2}}\, dS_y = 1,$$

где $S_\delta(x_0)$ *обозначает шар малого радиуса* δ *с центром в точке* x_0.

Доказательство. Интеграл можно разбить на два слагаемых; их удобно рассмотреть отдельно. Обозначим

$$W_1^{\delta}(t,x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{S_\delta(x_0)} \frac{\rho(x,x_0)}{\left(\rho^2(x_0,x) + d^2(x_0,y)\right)^{n/2}} dS_y .$$

Взятие интеграла предполагает переход к касательному пространству $T_{x_0}S$, где новыми переменными будут координаты вектора ξ, $\|\xi\| = d(x_0, y)$. В силу малости $S_\delta(x_0)$ якобиан перехода $J(x,\xi) = \sqrt{\frac{\det G(\operatorname{Exp}_x \xi)}{\det G(x)}} \left|\det \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{Exp}_x \xi\right|$, где G — метрический тензор подмногообразия S, является гладкой и ограниченной функцией. Кроме того, $\frac{\partial}{\partial \xi} J(x,\theta\xi)$ также является ограниченной функцией в $S_\delta(x_0)$. Тогда якобиан в окрестности нуля можно представить формулой Тейлора $J(x,\xi) = 1 + \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} J(x,\theta\xi),\, \xi \right\rangle$, где $0 < \theta < 0$. Переходя в $W_1^{\delta}(t,x)$ к интегрированию по касательному пространству, получаем

$$W_1^{\delta}(t,x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \int\limits_{T_{x_0}S_\delta(x_0)} \left(\frac{\rho(x_0,x)}{\left(\rho^2(x_0,x) + \|\xi\|^2\right)^{n/2}} + \frac{\rho(x_0,x)\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} J(x,\theta\xi), \xi \right\rangle}{\left(\rho^2(x_0,x) + \|\xi\|^2\right)^{n/2}} \right) dS_\xi .$$

Второе слагаемое можно оценить следующим образом:

$$\frac{\rho(x_0,x)\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} J(x,\theta\xi), \xi \right\rangle}{\left(\rho^2(x_0,x) + \|\xi\|^2\right)^{n/2}} < C \frac{\rho(x_0,x)\|\xi\|}{\left(\rho^2(x_0,x) + \|\xi\|^2\right)^{n/2}} .$$

Для вычисления первого слагаемого перейдем к сферическим координатам, якобиан перехода имеет вид $J = r^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_1 \ldots \sin \varphi_{n-3}$. Первое слагаемое $W_1^{\delta}(t,x)$ принимает вид

$$\int\limits_{T_{x_0}S_\delta(x_0)} \frac{\rho_0}{\left(\rho_0^2 + \|\xi\|^2\right)^{n/2}} dS_\xi = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^{\delta} \frac{\rho_0 r^{n-2}\, dr}{\left(\rho_0^2 + r^2\right)^{n/2}},$$

а оценка второго —

$$C \int\limits_{T_{x_0}S_\delta(x_0)} \frac{\rho_0 \|\xi\|}{\left(\rho_0^2 + \|\xi\|^2\right)^{n/2}} dS_\xi = C \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int\limits_0^{\delta} \frac{\rho_0 r^{n-1}\, dr}{\left(\rho_0^2 + r^2\right)^{n/2}} .$$

Выполним еще одну замену $r = \rho_0 \operatorname{tg} \vartheta$, $r^2 + \rho_0^2 = \frac{\rho_0^2}{\cos^2 \vartheta}$, $dr = \frac{\rho_0\, d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}$ и вычислим предел функции $W_1^{\delta}(t,x)$ при $(t,x) \to (t_0, x_0)$, когда x лежит вне области D. Для первого слагаемого получим

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0) \\ x \notin D}} \int\limits_{T_{x_0} S_\delta(x_0)} \frac{\rho_0\, dS_\xi}{\left(\rho_0^2 + \|\xi\|^2\right)^{n/2}} =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \lim_{\rho_0\to 0}\int_0^{\delta} \frac{\rho_0 r^{n-2}\,dr}{\left(\rho_0^2 + r^2\right)^{n/2}} =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\vartheta\, d\vartheta = \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 1.$$

Второе слагаемое является непрерывной функцией, поскольку

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}} \int_{T_{x_0} S_\delta(x_0)} \frac{\rho_0 \left\langle \frac{\partial}{\partial\xi} J(x, \theta\xi), \xi \right\rangle}{\left(\rho_0^2 + \|\xi\|^2\right)^{n/2}} dS_\xi \le$$

$$\le C \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \lim_{\rho_0\to 0}\int_0^{\delta} \frac{\rho_0 r^{n-1}\,dr}{\left(\rho_0^2 + r^2\right)^{n/2}} \le$$

$$\le C \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \lim_{\rho_0\to 0} \rho_0 \int_0^{\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta}{\rho_0}\right)} \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta} =$$

$$= C \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \lim_{\rho_0\to 0} \rho_0 \ln \frac{\sqrt{\rho_0^2 + \delta^2} + \delta}{\sqrt{\rho_0^2 + \delta^2} - \delta} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}} W_1^{\delta}(t, x) = 1.$$

В случае, когда точка x лежит внутри области D, предел функции $W_1^{\delta}(t, x)$ при $(t, x) \to (t_0, x_0)$ оказывается таким же по модулю, но противоположным по знаку:

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} W_1^{\delta}(t, x) = -1.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое интегралов из условия леммы (оно одинаково в обеих формулах) и обозначим его так:

$$W_2^{\delta}(t, x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \int_{S_\delta(x_0)} \frac{h_1(x, x_0, y)}{\left(\rho^2(x_0, x) + d^2(x_0, y)\right)^{n/2}} dS_y.$$

Используя оценку для $h_1(x, x_0, y)$ из леммы 2, записываем

$$\left| W_2^{\delta}(t, x) \right| \le \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \int_{S_\delta(x_0)} \frac{d}{\left(\rho_0^2 + d^2\right)^{n/2}} dS_y.$$

Интегрируя по приведенной выше схеме, получаем

$$\left|W_2^\delta(t,x)\right| < \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left|\int_0^\delta \frac{r^{n-1}\,dr}{\left(\rho_0^2+r^2\right)^{n/2}} + C\int_0^\delta \frac{r^n\,dr}{\left(\rho_0^2+r^2\right)^{n/2}}\right| \le$$

$$\le \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left|\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\rho_0^2+\delta^2}+\delta}{\sqrt{\rho_0^2+\delta^2}-\delta} + C\delta\right|,$$

т. е. функция $W_2^\delta(t,x)$ является непрерывной, что и завершает доказательство леммы.

Вернемся к интегралу $U_0(t,x)$, который с учетом леммы 1 принимает вид

$$U_0(t,x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}}\int_{S_\delta(x_0)} \frac{\left[\pm\rho(x_0,x)+h_1(x,x_0,y)\right]\exp\left\{-\frac{\phi(x,y)}{2}\right\}}{\left(\rho^2(x_0,x)+d^2(x_0,y)+h_2(x,x_0,y)\right)^{n/2}}\,dS_y,$$

и найдем пределы при $x \to x_0$ для случаев $x \in D$ и $x \notin D$. Как и прежде, выделим в интеграле слагаемое, содержащее особенность. Использовав формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа $(0<\theta<1)$, представим подынтегральное выражение в виде

$$\left(\frac{\pm\rho(x_0,x)+h_1(x,x_0,y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+d^2(x_0,y)\right)^{n/2}}\right)\times$$

$$\times\left(1-\frac{\phi(x,\theta y)}{2}-\frac{n}{2}\,\frac{h_2(x,x_0,\theta y)}{\rho^2(x_0,x)+\theta d^2(x_0,y)}+\frac{n}{4}\,\frac{\phi(x,\theta y)\,h_2(x,x_0,\theta y)}{\rho^2(x_0,x)+\theta d^2(x_0,y)}\right).$$

Первое слагаемое в разложении имеет пределы, установленные леммой 3. Покажем, что все остальные слагаемые являются непрерывными в точках $x_0 \in \mathcal{S}$. Используя оценку $h_2(x,x_0,y)$ из леммы 2 и замену $\theta d = \rho_0\,\mathrm{tg}\,\vartheta$, находим

$$\frac{h_2(x,x_0,\theta y)}{\left(\rho^2(x_0,x)+\theta^2 d^2(x_0,y)\right)} \le (C_B+1)\,\rho_0\left[1+\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\vartheta\right]\sin^2\vartheta\,.$$

На интервале $\left[0,\ \mathrm{arctg}\left(\frac{\delta}{\rho_0}\right)\right]$ ограничивающая функция монотонно возрастает, и ее можно оценить выражением $(C_B+1)\left[\rho_0+\frac{1}{3}\delta\right]$, которое при $x \to x_0$ (т. е. $\rho_0 \to 0$) стремится к $\frac{C_B+1}{3}\delta$, что с учетом леммы 3 означает непрерывность соответствующего слагаемого.

Получим аналогичную оценку функции $\phi(x,\theta y)$, определенной в терминах полей Якоби [6]:

$$\phi(x,y) = \int_0^{\rho(x,y)} \frac{a(\gamma(s),y)}{s}\,ds, \qquad a(\gamma(\rho),y) = \sum_k \left\langle \rho Z_k'(\rho) - Z_k(\rho),\, Z_k(\rho)\right\rangle.$$

Известно [9], что функция $a(x,y)$ вблизи нуля ведет себя как $O\left(\rho^2(x,y)\right)$, а поскольку рассматривается малая окрестность некоторой точки x_0, можно воспользоваться оценкой $|a(x,y)| \le c_a\rho^2(x,y)$. Отсюда

$$|\phi(x,y)| \le \int\limits_0^{\rho(x,y)} c_a s\, ds = \frac{c_a}{2}\rho^2(x,y) < \frac{c_a}{2}(\rho_0 + d)^2,$$

где использовано неравенство треугольника. Применяя замену $\theta d = \rho_0 \operatorname{tg}\vartheta$, получаем оценку $|\phi(x,\theta y)| \le \frac{c_a}{2}(\rho_0 + \delta)^2 \xrightarrow[\rho_0 \to 0]{} \frac{c_a}{2}\delta^2$, что свидетельствует о непрерывности остальных слагаемых интеграла $U_0(t,x)$.

Соберем все найденные пределы (через W_3^δ обозначим слагаемые, которые не вошли в W_1^δ и W_2^δ):

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} U_0(t,x) = \lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\in D}} \left[W_1^\delta(t,x) + W_2^\delta(t,x) + W_3^\delta(t,x) \right] =$$

$$= -1 + \left[W_2^\delta(t_0,x_0) + W_3^\delta(t_0,x_0) \right] = -1 + U_0(t_0,x_0),$$

аналогично

$$\lim_{\substack{(t,x)\to(t_0,x_0)\\ x\notin D}} U_0(t,x) = 1 + U_0(t_0,x_0).$$

Рассмотрим теперь случай произвольной непрерывной плотности $\mu(t,x)$ потенциала простого слоя.

Докажем, что при $x_0 \in \mathcal{S}$ разность потенциала с заданной плотностью $\mu(t,x)$ и с некоторой постоянной $\mu(t_0,x_0)$ является функцией, определенной всюду и непрерывной в точке (t_0,x_0). Для этого, как и выше, достаточно рассмотреть слагаемое, содержащее особенность. Тогда

$$U_1(t,x) - \mu(t_0,x_0)\, U_0(t,x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{T_0}^{t} d\tau \int\limits_{\mathcal{S}} [\mu(\tau,y) - \mu(t_0,x_0)] \exp\left\{ -\frac{\rho^2(x,y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x,y)}{2} \right\} \frac{\rho(x,y)\langle \dot{\varphi}_y, \nu_y \rangle}{(t-\tau)^{n/2+1}} dS_y -$$

$$- \frac{\mu(t_0,x_0)}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{-\infty}^{T_0} d\tau \int\limits_{\mathcal{S}} \exp\left\{ -\frac{\rho^2(x,y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x,y)}{2} \right\} \frac{\rho(x,y)\langle \dot{\varphi}_y, \nu_y \rangle}{(t-\tau)^{n/2+1}} dS_y. \qquad (6)$$

Второй интеграл, содержащийся в правой части формулы, непрерывен в окрестности точки (t_0,x_0), так как $t > T_0$ и функция под интегралом не имеет особенностей.

Для доказательства непрерывности первого интеграла воспользуемся теоремой о равномерной сходимости интеграла [10, с. 287]. Поскольку функция $U_0(t,x)$ непрерывна всюду в $(T_0,\infty)\times\mathcal{M}$, кроме компактного подмногообразия $\mathcal{S}$, на котором она имеет конечный разрыв (от -1 до 1), существует такая константа c, что для всех $x \in \mathcal{M}$

$$\left| \int\limits_{\mathcal{S}} \frac{\langle \dot{\varphi}_y, \nu_y \rangle}{\rho^{n-1}} \exp\left\{ -\frac{\phi(x,y)}{2} \right\} dS_y \right| < c.$$

Зададим произвольное $\delta > 0$ и выберем в $\mathcal{S}$ такую окрестность $\mathcal{S}_\delta$ точки (t_0,x_0), что $|\mu(t,x) - \mu(t_0,x_0)| < \dfrac{\delta}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)c}$ при $(t,x) \in \mathcal{S}_\delta$. Тогда

$$\left| \int_{T_0}^{t} d\tau \int_{S_\delta} [\, \mu(\tau, y) - \mu(t_0, x_0) \,] \exp\left\{ -\frac{\rho^2(x, y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x, y)}{2} \right\} \frac{\rho(x, y) \left\langle \dot{\varphi}_y, \nu_y \right\rangle}{(t-\tau)^{n/2+1}} dS_y \right| \le$$

$$\le \frac{\delta}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) c} \int_{T_0}^{t} d\tau \int_{S_\delta} \exp\left\{ -\frac{\rho^2(x, y)}{2(t-\tau)} - \frac{\phi(x, y)}{2} \right\} \frac{\rho(x, y) \left| \left\langle \dot{\varphi}_y, \nu_y \right\rangle \right|}{(t-\tau)^{n/2+1}} \left| dS_y \right| =$$

$$= \frac{\delta}{c} \int_{S_\delta} \frac{\left| \left\langle \dot{\varphi}_y, \nu_y \right\rangle \right|}{\rho^{n-1}} \exp\left\{ -\frac{\phi(x, y)}{2} \right\} \left| dS_y \right| < \delta.$$

Таким образом, первый интеграл равномерно сходится в точке (t_0, x_0); это означает, что данный интеграл, как функция t и x, непрерывен в точке (t_0, x_0).

Теорема доказана.

4. Выводы. Доказанное (теорема 1) свойство скачка градиента потенциала простого слоя на подмногообразии позволяет использовать метод потенциала при решении второй краевой задачи для параболического уравнения на многообразии типа Картана – Адамара, какими являются многообразия, удовлетворяющие условиям 1. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если многообразие* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет условиям* 1, *подмногообразие* $\mathcal{S}$ — *условиям* 2, *то решение задачи* (1), (2) *существует и представляется потенциалом простого слоя*

$$u(t, x) = \int_{T_0}^{t} d\tau \int_{S} \mu(\tau, y)\, p(t-\tau, x, y) \, dS_y ,$$

плотность которого $\mu(t, x)$ *находится из интегрального уравнения*

$$\pm\mu(t, x) = \int_{T_0}^{t} d\tau \int_{S} \mu(\tau, y) \frac{\partial p(t-\tau, x, y)}{\partial \nu_x} dS_y - f(t, x),$$

где знак „+” *соответствует внутренней задаче*, *а знак* „–” — *внешней*.

Кроме того, найдена величина скачка (лемма 3); она совпадает с таковой для случая евклидова пространства [1].

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
2. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. – М.: Мир, 1973. – 184 с.
3. *Varadhan S.R.S.* On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients // Communs Pure and Appl. Math. – 1967. – **20**, № 2. – P. 431 – 455.
4. *Григорьян А. А.* О фундаментальном решении уравнения теплопроводности на произвольном римановом многообразии // Мат. заметки. – 1987. – **41**, № 5. – С. 687 – 692.
5. *Yosida K.* On the fundamental solution of the parabolic equation in a Riemannian space // Osaka Math. J. – 1953. – **5**, № 1. – P. 659 – 685.
6. *Бондаренко В. Г.* Метод параметрикса для параболического уравнения на римановом многообразии // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1443 – 1448.
7. *Бондаренко В. Г.* Логарифмический градиент ядра теплопроводности на римановом многообразии // Мат. заметки. – 2003. – **73**, № 5.
8. *Постников М. М.* Вариационная теория геодезических. – М.: Наука, 1965.
9. *Bondarenko V.* Duffusion sur variete de courbure non positive // Comptes Rendus A. S. – 1997. – **324**, № 10. – P. 1099 – 1103.
10. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Наука, 1961. – 400 с.

Получено 26.06.06