УДК 517.956

Д. В. Капанадзе (Тбил. ун-т, Грузия)

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ

We prove the uniqueness of solution of the inverse problem of single-layer potential for star-shaped smooth surfaces in the case of the metaharmonic equation $\Delta v - K^2 v = 0$. For the Laplace equation, a similar statement is not true.

Доведено єдиність розв'язку оберненої задачі потенціалу простого шару для зіркових гладких поверхонь у випадку метагармонічного рівняння $\Delta v - K^2 v = 0$. Аналогічне твердження у випадку рівняння Лапласа є хибним.

Решение обратной задачи теории потенциала имеет теоретическое и практическое значение. Известно, что обратная задача теории потенциала является математической моделью разведки полезных ископаемых и изучения внутреннего строения Земли. Для практики требуется дальнейшее развитие теории.

Характерная особенность обратных задач — их некорректность по Адамару. Важным моментом при теоретическом исследовании задачи, некорректной по Адамару, является доказательство теоремы единственности. Впервые единственность ее решения в классе звездных областей постоянной плотности в случае объемного потенциала была доказана П. С. Новиковым [1], результаты исследования которого расширены в работах [2 – 7]. В работе И. М. Рапопорта [2] исследования проводятся для логарифмического потенциала простого слоя. Им, в частности, доказано, что в отличие от объемного потенциала обратная задача для потенциала простого слоя в случае единичной плотности и в классе звездных областей может иметь не единственное решение.

В настоящей статье рассматривается метагармоническое уравнение и доказывается единственность решения обратной задачи, если кусочно-гладкая замкнутая ограниченная поверхность S_i, $i = 1, 2$, не содержит плоскую часть. Плотность $\mu \in C(R^3)$, $\mu(x) > 0$, $x \in R^3$. Кроме того, единственность решения обратной задачи устанавливается для звездных поверхностей $S_i \in C^{(2,\alpha)}$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим метагармоническое уравнение $\Delta u - K^2 u = 0$ (или уравнение Клейна – Гордона), $K > 0$. Пусть

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-k|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \in R^3, \quad y \in R^3,$$

— главное фундаментальное решение [8, с. 46] уравнения $\Delta U - K^2 U = 0$. Потенциал простого слоя и объемный потенциал обозначим так:

$$U^{\psi}(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \Gamma(x, y)\psi(y)dS_y, \qquad V^f(x) = \int\limits_{\Omega} \Gamma(x, y) f(y)dS_y,$$

где Ω — кусочно-гладкая ограниченная область, $\psi \in L_1(\partial\Omega)$, $f \in L_1(\Omega)$. В дальнейшем через S_i, $i = 1, 2$, обозначается кусочно-гладкая замкнутая поверхность из пространства R^3. Кусочно-гладкую ограниченную односвязную область, граница которой есть S_i, $i = 1, 2$, обозначим через Ω_i, $i = 1, 2$ ($S_i = \partial\Omega_1$), связную компоненту дополнения $R^3 - \overline{Q}$, которая содержит бесконечно удаленную точку, — через Q^∞, $\varnothing$ — пустое множество. Подразумевается, что каждая гладкая часть поверхности принадлежит $C^{(2,\alpha)}$.

Определение 1. *Пусть S — кусочно-гладкая замкнутая поверхность ($S \subset \subset R^3$, или область Ω, $\partial\Omega = S$). Будем говорить, что для гладкой точки $x_0 \in S$ ($x_0 \in \partial\Omega$) кривизна $\rho(x_0) \neq 0$, если существует плоскость P_0, которая проходит через нормаль ν_{x_0}, и кривизна плоской кривой $S \cap P_0$ в точке x_0 отлична от нуля.*

1. О единственности решения обратной задачи для потенциала простого слоя в случае единичной плотности. Сформулируем обратную задачу теории потенциала. Пусть S_1, S_2 — кусочно-гладкие замкнутые поверхности из R^3 ($S_i = \partial\Omega_i$, $i = 1, 2$). Возникает вопрос: при каких условиях из равенства потенциалов

$$\int_{S_1} \Gamma(x, y) dS_y = \int_{S_2} \Gamma(x, y) dS_y, \qquad x \in \Omega^\infty, \tag{1}$$

следует, что $S_1 = S_2$ ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$)?

Теорема 1. *Пусть S_i, $i = 1, 2,$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность из R^3 ($S_i = \partial\Omega_i$, $i = 1, 2$). Если $\overline{\Omega}_1 \subset \overline{\Omega}_2$ ($S_1 \neq S_2$), то потенциалы поверхностей S_1, S_2 не совпадают на Ω^∞.*

Доказательство. Будем предполагать, что $\partial\Omega_i = \partial\overline{\Omega}_i$, $i = 1, 2$. Допустим противное, т. е.

$$\int_{S_1} \Gamma(x, y) dS_y = \int_{S_2} \Gamma(x, y) dS_y, \qquad x \in \Omega^\infty. \tag{2}$$

В данном случае очевидно, что $\Omega^\infty = \Omega_2^\infty$.

Умножим предыдущее равенство потенциалов на функцию $|x|e^{K|x|}$. Тогда

$$\int_{S_1} \frac{|x|e^{K|x|}e^{-K|x-y|}}{|x-y|} dS_y = \int_{S_2} \frac{|x|e^{K|x|}e^{-K|x-y|}}{|x-y|} dS_y, \qquad x \in \Omega_2^\infty.$$

Перейдем к пределу при $x \to \infty$. В результате получим

$$|S_1| = |S_2| = |\partial\Omega_1| = |\partial\Omega_2|,$$

где $|S_i|$, $i = 1, 2,$ — площадь поверхности S_i, $i = 1, 2$. С другой стороны, из равенства потенциалов (2) получаем ($U^\gamma(x) < 1$, $x \in \Omega_2$, $U^\gamma(x) = 1$ квазивсюду на S_2)

$$\int_{S_1} U^\gamma(y) dS_y = \int_{S_2} U^\gamma(y) dS_y,$$

где γ — равновесная мера [9] компакта $S_2 = \partial\Omega_2$.

Покажем, что $U^\gamma(x) = 1$ для каждой гладкой точки $x = \partial\Omega_2$ и $U^\gamma(x) < 1$ при $x \in \Omega_2$. В самом деле, пусть Ω_n^1, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ — последовательность гладких односвязных областей, удовлетворяющая условиям $\Omega_n^1 \in C^{(2,\alpha)}$, $\overline{\Omega}_{n+1}^1 \subset \Omega_n$, $\bigcap_1^\infty \Omega_n^1 = \overline{\Omega}_n$. Пусть, далее, U^{γ_n} — равновесный потенциал [9, с. 179] компакта $\partial\Omega_n^1$, $V_n(x)$ — решение задачи Дирихле в области Ω_n^1, когда граничное значение $\varphi_n(x) = 1$ при $x \in \partial\Omega_n^1$. Известно, что последовательность

$V_n(x)$ сходится [10, с. 92 – 194] для точки $x \in \Omega_2$. Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} V_n(x) = V(x), \quad x \in \Omega_2 \quad (V^{\gamma_n}(x) = V_n(x),\ x \in \overline{\Omega}_n^1).$$

Поскольку гладкая точка $x = \partial\Omega_2$ есть точка устойчивости задачи Дирихле [10, с. 194], то $V(x) = 1$. Существует подпоследовательность $\{\gamma_{n_k}\}$, слабо сходящаяся [9] к γ_0. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} U^{\gamma_{n_k}}(x) = U^{\gamma_0}(x), \quad x \in \Omega_2 \quad (U^{\gamma_0}(x) = V(x),\ x \in \Omega_2).$$

Потенциал U^{γ_0} для гладкой точки $x_0 = \partial\Omega_2$ удовлетворяет условию [9, с. 261]

$$\lim_{\substack{x\in\nu_1\\ x\to x_0}} U^{\gamma_0}(x) = U^{\gamma_0}(x_0) = 1 \quad (U^{\gamma_0}(x) = V^{\gamma}(x),\ x \in \overline{\Omega}_2,\ \gamma_0 = \gamma),$$

где ν_1 — внутренняя или внешняя нормаль в точке x_0. В силу принципа максимума метагармонического уравнения $U^{\gamma}(x) < 1$, $x \in \Omega_2$ ($U^{\gamma}(x) \le 1$, $x \in \overline{\Omega}_2$). Таким образом,

$$\int_{S_1} U^{\gamma}(y)dS_y < |S_1|, \qquad \int_{S_2} U^{\gamma}(x)dS_x < |S_2|.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Пусть S_1, S_2 — кусочно-гладкие ограниченные замкнутые поверхности. Предположим, что S_i, $i = 1, 2$, не содержит плоскую часть. Тогда решение обратной задачи теории потенциала единственно* ($S_i = \partial\Omega_i$, $\Omega = \Omega_1 \cup \cup \Omega_2$).

Доказательство. Допустим противное, т. е.

$$\int_{S_1} \Gamma(x, y)dS_y = \int_{S_2} \Gamma(x, y)dS_y, \quad x \in \Omega^{\infty}, \tag{3}$$

но поверхности не совпадают. Поскольку S_i, $i = 1, 2$, не содержит часть плоскости, существует гладкая точка $x_0 \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_1^{\infty}$, $x_0 \notin \overline{\Omega}_2$, $\rho(x_0) \ne 0$ (или $x_0 \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega^{\infty}$, $x_0 \notin \overline{\Omega}_1$). Выполним линейное преобразование в пространстве R^3, после которого плоскость P_{x_0} (см. определение 1) совпадает с плоскостью x_1Ox_3 и нормаль в точке x_0 параллельна плоскости x_1Ox_3. Обозначим $\sigma = \{x : (x - x_0) < \varepsilon\} \cap (P_{x_0} \cap S_1)$,

$$\sigma_1 = \left\{x : |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \sigma \cap (x_3 > x_3^0), \quad x_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0).$$

Уравнение кривой σ_1 имеет вид $x_3 = \tau(x_1)$, где $x_0 - \varepsilon < x_1 < x_0$, $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon/2$ (или $x_1^0 < x_1 < x_1^0 + \varepsilon_1$). Ясно, что кривая σ_1 лежит на плоскости x_1Ox_3. Подразумевается, что $S_1 \cup S_2 \subset \{x : x_3 > 0\}$.

Равенство потенциалов (3) перепишем следующим образом:

$$\int_{S_1} U^{\psi}(y)\,dS_y \;=\; \int_{S_2} U^{\psi}(y)\,dS_y, \quad \psi \in C(\partial\Omega^{\infty}).$$

Рассмотрим гладкую ограниченную односвязную область Ω_0, которая удовлетворяет условиям $S_1 \bigcup S_2 \subset \overline{\Omega}_0$, $\Omega_0 \in C^{(2,\alpha)}$, $\sigma \subset \partial\Omega_0$, $\sigma \bigcap S_2 = \varnothing$. Из предыдущего равенства получаем

$$\int_{\sigma} V(x)\,dS_x \;=\; \int_{S_2} V(x)\,dS_x \;-\; \int_{S_1-\sigma} V(x)\,dS_x, \tag{4}$$

где V — гармоническая функция из $C(\overline{\Omega}_0)$, для которой справедливо представление

$$V(x) \;=\; -\int_{\partial\Omega_0} \frac{\partial G(x,\,y)}{\partial\nu_y}\,\varphi(y)\,dS_y, \quad \varphi \in C(\partial\Omega_0).$$

Рассмотрим следующее граничное значение гармонической функции V на кривой σ_1 [11]:

$$\varphi \;=\; \delta_{x_1} \times \delta_0 \times Y_3\,.$$

Здесь δ_{x_1}, δ_0 — одномерные меры Дирака, сосредоточенные соответственно в точках $\xi_1 = x_1$, $x_2 = 0$. Распределение φ действует следующим образом ($x_1^0 - \varepsilon_1 < x_1 < x_1^0$):

$$(\varphi, f) \;=\; \left\{\left(\delta_{x_1} \times \delta_0,\; \int_{\sigma} f(y_1,\,y_2,\,y_3)\,dS\right)\right\} \;=\; f(x_1,\,0,\,\tau(x_1))\sqrt{1+[\tau'(x_1)]^2}\,.$$

Пусть, далее, f_n^1, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — последовательность непрерывных функций, для которой выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int f_n^1(y_1)\psi_1(y_1)\,dy_1 \;=\; \psi_1(x_1),$$

$$\psi \in C[x_1^0 - \varepsilon_1,\, x_1^0], \qquad x_1 \in (x_1^0 - \varepsilon_1,\, x_1^0).$$

Рассмотрим последовательность граничных значений

$$\varphi_n(y_1, y_2, y_3) \;=\; f_n^1(y_1)f_2(0)y_3, \qquad n \;=\; 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Из (4) получаем (предполагая, что $f_2(0) = 1$)

$$\int_{\sigma_1} f_n^1(y_1)\cdot 1\cdot y_3\,dS \;=\; \int_{x_1^0-\varepsilon_1}^{x_1^0} f_n^1(y_1)\tau(y_1)\sqrt{1+[\tau'(y_1)]^2}\,dy_1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\sigma_1} f_n^1(y_1)\cdot 1\cdot y_3\,dS \;=\; \tau(x_1)\sqrt{1+[\tau'(x_1)]^2}, \qquad x_1 \in (x_1^0 - \varepsilon_1 < x_1 < x_1^0).$$

Очевидно, что $\left(V_{\varphi}(x) \neq 0,\; x \in \Omega_0\right)$

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \sqrt{1 + [\tau'(x_1)]^2} = \infty. \tag{5}$$

С другой стороны, так как

$$\min_{\substack{x \in S_2 \\ y \in \sigma_1}} |x - y| > 0, \qquad \min_{\substack{x \in S_1 - \sigma \\ y \in \sigma_1}} |x - y| > 0,$$

получаем ($\varphi = \delta_{x_1} \times \delta_0 \times Y_3$)

$$\operatorname{Sup}_{x \in S_2} \left|V_\varphi(x)\right| < \infty, \qquad \operatorname{Sup}_{x \in S_1 - \sigma} \left|V_\varphi(x)\right| < \infty. \tag{6}$$

Заметим, что функция Грина области Ω_0 удовлетворяет условию [12]

$$|G(x, y)| + \left|\frac{\partial G(x, y)}{\partial x_k}\right| \le \frac{C_1}{|x - y|^2}, \qquad x \in \Omega_0, \quad y \in \Omega_0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Из (4) – (6) получаем противоречие.

Теорема 2 доказана.

2. О единственности решения обратной задачи для звездных областей.

Теорема 3. *Пусть* S_i, $i = 1, 2,$ — *гладкая ограниченная замкнутая поверхность из класса* $C^{(2,\alpha)}$. *Предположим, что пересечение* $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega^\infty$ — *конечное число кривых. Тогда потенциалы поверхностей* S_1 *и* S_2 *не совпадают на* Ω^∞ ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\partial\Omega_i = S_i$, $i = 1, 2$).

Доказательство. Определим диаметр объединения $S_1 \cup S_2$:

$$d = \operatorname{Sup}_{\substack{x \in S_1 \\ y \in S_2}} |x - y| = |z_1 - z_2|.$$

В силу условия теоремы легко убеждаемся, что в окрестности точки z_1 (или z_2) существует гладкая точка $x_0 \in S_1 \cap \partial\Omega^\infty$, $x_0 \notin \overline{\Omega}_2$, $\rho(x_0) \neq 0$ (см. определение 1). После этого достаточно повторить рассуждения из доказательства теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть* S_i, $i = 1, 2,$ — *гладкие ограниченные замкнутые поверхности из* $C^{(2,\alpha)}$, *звездные относительно общей точки* z_0 ($z_0 \in \Omega_1 \cap \Omega_2$), $S_1 = \partial\Omega_1$, $S_2 = \partial\Omega_2$. *Тогда решение обратной задачи потенциала простого слоя единственно.*

Доказательство. Если $\overline{\Omega}_1 \subset \overline{\Omega}_2$ (или $\overline{\Omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1$), то доказательство следует из теоремы 1.

Поскольку $S_1 \in C^{(2,\alpha)}$, $S_2 \subset C^{(2,\alpha)}$, возможны следующие случаи:

1) пересечение $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega^\infty$ есть конечное число кривых

или

2) существует общая поверхность $\sigma \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega^\infty$.

В первом случае доказательство следует из теоремы 3. Теперь предположим, что пересечение содержит общую поверхность σ. Очевидно, что

$$\int_{S_1 - \sigma} \Gamma(x, y)\, dS_y = \int_{S_2 - \sigma} \Gamma(x, y)\, dS_y, \quad x \in \Omega^\infty. \tag{7}$$

Обозначим $\omega = \bigcup_{k=1}^{N} \omega_k = (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2) - (\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2)\overline{\omega} = \bigcup_1^N \overline{\omega}_k$, где $\overline{\omega}_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, — односвязная область. Из (7) имеем

$$\int\limits_{S_1-\sigma} U^{\varphi}(y)dS_y = \int\limits_{S_2-\sigma} U^{\varphi}(y)dS_y, \quad \varphi \in C(\partial\overline{\omega}). \tag{8}$$

Отметим, что R^3 — $\overline{\omega}$-связное множество. Легко убедиться, что множество потенциалов $\{U^{\varphi},\ \varphi \in C(\partial\overline{\omega})\}$ плотно в пространстве $L_2(\partial\omega)$. Значит, существует последовательность потенциалов, удовлетворяющая условиям $\{\partial\overline{\omega} = \partial(R^3 - \overline{\omega})\}$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial\omega_1} (U^{\varphi_n}(x) - 1)^2\, dS_x = 0, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi_n \in C(\partial\overline{\omega}), \\ &\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial\omega_0} (U^{\varphi_n}(x) - 1)^2\, dS_x = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\omega_0 = \overline{\omega} - \overline{\omega}_1$ (предельная функция $V(x) = 1$, $x \in \partial\omega_1$, $V(x) = 0$, $x \in \partial\omega_0$). Из (8) и (9) получаем

$$\int\limits_{\partial\omega_1} 1\cdot dS_x = |\partial\omega_1| = 0.$$

Пришли к противоречию.

Теорема 4 доказана.

Заметим, что доказанное утверждение в случае оператора Лапласа $(k = 0)$ неверно [2]. Это связано с тем, что равновесный потенциал компакта $S_2 = \partial\Omega_2$ удовлетворяет условию

$$U^{\gamma}(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega_2.$$

3. О единственности решения обратной задачи для плотности $\mu \in C(R^3)$, $\mu(x) > 0$, $x \in R^3$.

Теорема 5. *Пусть* S_1, S_2 *— кусочно-гладкие ограниченные замкнутые поверхности на* R^3. *Если* $\overline{\Omega}_1 \subset \overline{\Omega}_2$ $(\Omega_1 \neq \Omega_2,\ \partial\Omega_i = S_i,\ i = 1, 2)$, *то потенциалы поверхностей* S_1, S_2 *не совпадают на* $\Omega^{\infty} = \Omega_2^{\infty}$.

Доказательство. Допустим противное, т. е.

$$\int\limits_{S_1} \Gamma(x, y)\mu(y)dS_y = \int\limits_{S_2} \Gamma(x, y)\mu(y)dS_y, \quad x \in \Omega^{\infty}, \tag{10}$$

но $S_1 \neq S_2$.

Как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\int\limits_{S_1} \mu(y)dS_y = \int\limits_{S_2} \mu(y)dS_y. \tag{11}$$

Пусть γ — равновесная мера компакта S_2, $U^{\gamma}(x) = 1$ для гладкой точки $x \in S_2$. После интегрирования по γ из (10) имеем

$$\int_{S_1} U^\gamma(x)\mu(x)\,dS_x = \int_{S_2} U^\gamma(x)\mu(x)\,dS_x = \int_{S_2} \mu(y)\,dS_y. \tag{12}$$

Поскольку $U^\gamma(x) < 1,\ x \in \Omega_2\ (\partial\Omega_i = S_i)$, то

$$\int_{S_1} U^\gamma(x)\mu(y)\,dS_x < \int_{S_2} \mu(y)\,dS_y. \tag{13}$$

Из (11) – (13) получаем противоречие.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть* S_i, $i = 1, 2$, — *кусочно-гладкая ограниченная замкнутая поверхность. Предположим, что* S_i, $i = 1, 2$, *не содержит плоскую часть. Тогда решение обратной задачи в случае плотности* μ *единственно.*

Доказательство. В силу условия теоремы существует гладкая точка $x_0 \in S_1 \cap \partial\Omega^\infty$, $x_0 \notin \overline{\Omega}_2$, $\rho(x_0) \neq 0$. Пусть $\sigma = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\} \cap (S_1 \cap P_{x_0})$, $\overline{\sigma} \cap \overline{\Omega}_2 = \varnothing$, $\sigma_1 = \{x : |x - x_0| < \varepsilon/2\} \cap (S_1 \cap P_0)$. Выполним линейное преобразование координатной системы, после которого плоскость $P_0\ (P_0 = P_{x_0})$ совпадет с плоскостью x_1Ox_3 и нормаль ν_{x_0} будет параллельна плоскости x_1Ox_3.

Допустим, что потенциалы совпадают на Ω^∞, т. е. $(\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2)$

$$\int_{S_1} \Gamma(x, y)\mu(y)\,dS_y = \int_{S_2} \Gamma(x, y)\mu(y)\,dS_y, \quad x \in \Omega^\infty,$$

но поверхности S_1 и S_2 не совпадают (подразумевается, что $S_1 \cup S_2 \subset \{x : x_3 > 0\}$).

Пусть ограниченная односвязная область Ω_0 удовлетворяет условиям $\sigma \subset \partial\Omega_0$, $\Omega_0 \in C^{(2,\alpha)}$, $S_1 \cup S_2 \subset \overline{\Omega}_0$.

Из предыдущего равенства потенциалов получаем

$$\int_{S_1} U^\psi(x)\mu(x)\,dS_x = \int_{S_2} U^\psi(x)\mu(x)\,dS_x, \quad \psi \in C(\partial\Omega_0).$$

Отсюда имеем

$$\int_{S_1} V(x)\mu(x)\,dS_x = \int_{S_2} V(x)\mu(x)\,dS_x,$$

где V — гармоническая функция из $C(\overline{\Omega}_0)$.

Очевидно, что (см. теорему 2)

$$\int_{\sigma} V(x)\mu(x)\,dS_x = \int_{S_2} V(x)\mu(x)\,dS_x - \int_{S_1-\sigma} V(x)\mu(x)\,dS_x. \tag{14}$$

На кривой σ_1 рассмотрим распределение [11]

$$\varphi = \delta_{x_1} \cdot \delta_0 \cdot Y_3, \quad (x_1, 0, y_3) \in \sigma_1.$$

Из равенства (14) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\sigma} f_n^1(y_1)y_3\mu(y_1, 0, y_3)\,dS_y = \tau(x_1)\mu[x_1, 0, \tau(x_1)]\sqrt{1 + [\tau'(x_1)]^2}.$$

Здесь последовательность $\{f_n^1(x)\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} \int f_n^1(y_1)\psi(y_1)\,dy_1 = \psi(x_1), \qquad x_1^0 - \varepsilon_1 < x_1 < x_1^0, \quad \psi \in C_0(R^1).$$

Как и при доказательстве теоремы 2, имеем

$$\lim_{x_1\to x_1^0} \tau(x_1)\mu[x_1, 0, \tau(x_1)]\sqrt{1+[\tau'(x_1)]^2} = \infty,$$

минимальное расстояние

$$d(\sigma_1, \sigma_2) > 0, \qquad d(\sigma_1, S_1 - \sigma) > 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Sup}_{x\in S_2} |V(x)| < \infty, \qquad \operatorname{Sup}_{x\in S_1-\sigma} |V(x)| < \infty.$$

Пришли к противоречию.

Аналогично доказывается теорема 6 в случае плотности μ.

1. *Новиков П. С.* О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 3. – С. 165 – 168.
2. *Рапопорт И. М.* Об одной задаче теории потенциала // Укр. мат. журн. – 1950. – **2**, № 2. – С. 50 – 58.
3. *Сретенский Л. Н.* О единственности определения формы притягивающегося тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. – 1954. – **99**, № 1. – С. 20 – 22.
4. *Иванов В. К.* Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – **20**. – С. 793 – 818.
5. *Шашкин Ю. А.* О единственности обратной задачи теории потенциала // Докл. АН СССР. – 1957. – **115**, № 1. – С. 64 – 66.
6. *Страхов В. Н., Бродский М. А.* О единственности в обратной задаче логарифмического потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1985. – № 6. – С. 27 – 47.
7. *Капанадзе Д. В.* О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – **145**, № 1. – С. 78 – 80.
8. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966.
9. *Ландгоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966.
10. *Келдыш М. В.* Математика. – Избр. труды. – М.: Наука, 1985.
11. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979.
12. *Эидусь Д. М.* Оценки производных функции Грина // Докл. АН СССР. – 1956. – **106**, № 1. – С. 207 – 209.

Получено 13.06.06