УДК 517.9

М. Ю. Матвійчук (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СПІЛЬНІ ПЕРІОДИЧНІ ТРАЄКТОРІЇ ДВОХ ВІДОБРАЖЕНЬ

For a map $f \in C^r(I, I)$, $r \geq 0$, we consider the problem of the existence of a map close to it and having the common periodic trajectories of given periods with f.

Для отображения $f \in C^r(I, I)$, $r \geq 0$, рассматривается проблема существования близкого к нему отображения, имеющего с f общие периодические траектории заданных периодов.

Дослідження періодичних траєкторій є однією з центральних проблем теорії динамічних систем. У даній статті розглядається проблема існування спільних періодичних траєкторій кількох відображень. Деякі аспекти цієї проблеми розглянуто в [1].

Мотивація до розгляду вказаної задачі походить з теорії захисту інформації. Два неперервних відображення відрізка в себе можна розглядати як два ключі, кожен з яких міститься в одній із сторін. Якщо обидва ключі об'єднати, то отримаємо зашифровану інформацію — множину спільних періодів. В роботі ми фактично показуємо, що набір потрібних для цієї мети ключів є достатньо багатим.

Нехай $f, \tilde{f} \in C^r(I, I)$, $r \geq 0$, і $J\left(f, \tilde{f}\right) = \{x \in I \,|\, f^i(x) = \tilde{f}^i(x), i = 1, 2, \ldots\}$ є множиною спільних траєкторій. Множина $J\left(f, \tilde{f}\right)$ є інваріантною відносно відображень $f, \tilde{f}$ та замкненою.

Нехай, як завжди, $\operatorname{Per}(f)$ позначає множину періодичних точок відображення f, а $p(f)$ є підмножиною множини натуральних чисел, що складається з періодів періодичних траєкторій f. Покладемо $\operatorname{Per}(f, \tilde{f}) = J\left(f, \tilde{f}\right) \cap \operatorname{Per}(f)$ і позначимо через $p\left(f, \tilde{f}\right)$ підмножину множини $p(f)$, яку складають періоди траєкторій з $\operatorname{Per}(f, \tilde{f})$.

Нехай $\operatorname{Per}_n(f)$ — множина точок періоду n відображення f.

Нагадаємо відому теорему О. М. Шарковського: *Якщо* $\operatorname{Per}_n(f) \neq \varnothing$ *для деякого натурального* n, *то* $\operatorname{Per}_{n'}(f) \neq \varnothing$ *для будь-якого* $n' \prec n$, *де* $\prec$ *визначається таким упорядкуванням натуральних чисел*:

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec \ldots \prec 5 \cdot 2^2 \prec 3 \cdot 2^2 \prec 2^2 \prec \ldots \prec 5 \cdot 2 \prec 3 \cdot 2 \prec \ldots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3. \quad (1)$$

Будемо говорити, що відображення f є типу n, якщо n — максимальне відносно порядку (1) число з $p(f)$. Може трапитись, що $p(f) = \{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\}$, і, отже, максимального відносно порядку (1) числа в $p(f)$ не існує. Тоді кажуть, що f є типу 2^∞.

Основним результатом статті є така теорема.

Теорема. *Нехай відображення* f *не є типу* 2^∞. *Тоді для довільних підмножини* $M \subseteq p(f)$ *і додатного числа* ε *існує* $f_\varepsilon \in C^r(I, I)$ *таке, що* $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_{C^r} < \varepsilon$ *і* $p(f, f_\varepsilon) = M$.

Доведення полягає у відшуканні замкненої множини $K \subseteq I$, яка містить періодичні траєкторії відображення f періодів лише з M. Тобто K має задовольняти умови

$$K \bigcap \operatorname{Per}(f) \subseteq \bigcup_{p\in M} \operatorname{Per}_p(f), \tag{2}$$

$$\forall p \in M\colon\ K \bigcap \operatorname{Per}_p(f) \neq \varnothing. \tag{3}$$

Якщо відповідна множина існує, то досить покласти

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \delta e^{-\frac{1}{\operatorname{dist}(x, K\bigcap(-\infty, x])} - \frac{1}{\operatorname{dist}(x, K\bigcap[x, +\infty))}},$$

де $\operatorname{dist}(x, \varnothing) = +\infty$.

Тоді $f_\varepsilon \in C^r(I, I)$, $\| f(x) - f_\varepsilon(x)\|_{C^r} < \varepsilon$ для достатньо малого $\delta = \delta(\varepsilon)$, $J(f, f_\varepsilon) = K$ і, отже, $p(f, f_\varepsilon) = M$.

Зауважимо, що у випадку скінченної множини M теорема доводиться просто: досить взяти $K = \bigcup_{p\in M} T_p$, де T_p — деякий цикл періоду p. Оскільки M є скінченною, то K також є скінченною, а отже, замкненою. Умови (2), (3) виконуються.

Аналогічні міркування показують, що при доведенні можна відкинути від M довільну скінченну кількість елементів. Тобто якщо ми доведемо теорему для меншої множини, то для початкової вона також буде доведена.

Введемо необхідні для подальшого викладу означення та доведемо допоміжні твердження.

Означення 1. *Нехай* $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2] \subseteq I$. *Будемо говорити, що відрізок* $[x_1, y_1]$ *накриває* (*f-накриває*) *відрізок* $[x_2, y_2]$, *якщо відрізок з кінцями* $f(x_1)$, $f(y_1)$ *містить* $[x_2, y_2]$, *і позначатимемо це* $[x_1, y_1] \to [x_2, y_2]$ *або* $[x_2, y_2] \leftarrow [x_1, y_1]$.

Зауваження. Якщо $[x_1, y_1] \to [x_2, y_2]$, то $f([x_1, y_1]) \supseteq [x_2, y_2]$.

Для двох відрізків I, J запис $\partial I \to \partial J$ або $\partial J \leftarrow \partial I$ (тут ∂I — межа відрізка I) означатиме, що образом множини ∂I є множина ∂J.

Будемо говорити, що відрізок $[x_1, y_1]$ точно накриває відрізок $[x_2, y_2]$, якщо $f((x_1, y_1)) = (x_2, y_2)$, і позначатимемо $[x_1, y_1] \rightharpoonup [x_2, y_2]$ або $[x_2, y_2] \leftharpoondown [x_1, y_1]$.

Лема 1. *Якщо* $[x_1, y_1] \rightharpoonup [x_2, y_2]$, *то* $f([x_1, y_1]) = [x_2, y_2]$, $f(\{x_1, y_1\}) = \{x_2, y_2\}$. *Зокрема*, $[x_1, y_1] \to [x_2, y_2]$.

Доведення. Досить довести першу рівність. Множина $f([x_1, y_1])$ є компактом, оскільки є образом компакту при неперервному відображенні. Зокрема, $f([x_1, y_1])$ — замкнена множина. Тому $f([x_1, y_1]) \supseteq \operatorname{cl}((x_2, y_2)) = [x_2, y_2]$. Також $f([x_1, y_1]) = f(\operatorname{cl}((x_1, y_1))) \subseteq \operatorname{cl}(f((x_1, y_1))) = \operatorname{cl}((x_2, y_2)) = [x_2, y_2]$. Маємо $f([x_1, y_1]) = [x_2, y_2]$.

Лему доведено.

Лема 2. *Якщо* $[x_1, y_1] \to [x_2, y_2]$ *і* $\Delta_f[x_1, y_1] \equiv f(y_1) - f(x_1) \neq 0$, *то існує відрізок* $[x_3, y_3] \subseteq [x_1, y_1]$ *такий, що* $[x_3, y_3] \rightharpoonup [x_2, y_2]$ *і* $\Delta_f[x_3, y_3] \times \Delta_f[x_1, y_1] > 0$.

Доведення. Нехай, наприклад, $\Delta_f[x_1, y_1] > 0$, тобто $f(x_1) \le x_2$, $f(y_1) \ge y_2$. Покладемо

$$x_3 := \max\{x \in [x_1, y_1] \,\|\, f(x) = x_2\},$$

$$y_3 := \min\{x \in [x_3, y_1] \,\|\, f(x) = y_2\}.$$

За визначенням $[x_3, y_3] \subseteq [x_1, y_1]$ і $\Delta_f[x_3, y_3] = y_2 - x_2 > 0$.

Теорема Коші про проміжне значення гарантує включення $f((x_3, y_3)) \supseteq$

$\supseteq (x_2, y_2)$. Водночас для будь-якого $x \in (x_3, y_3)$ виконується наступне:

$f(x) > x_2$, бо інакше, оскільки $f(y_1) \geq y_2 > x_2$, на інтервалі (x_1, y_1) знайдеться точка з $f^{-1}(x_2)$, що неможливо за визначенням точки x_3;

$f(x) < y_2$ аналогічно з урахуванням $f(x_3) = x_2 < y_2$ і визначення точки y_3.

Отже, $f((x_3, y_3)) \supseteq (x_2, y_2)$ і $f((x_3, y_3)) \subseteq (x_2, y_2)$. Звідси $[x_3, y_3] \rightharpoonup [x_2, y_2]$.

У випадку $\Delta_f [x_1, y_1] < 0$ досить покласти $x_3 := \max\{x \in [x_1, y_1] \,|\, f(x) = y_2\}$, $y_3 := \min\{x \in [x_3, y_1] \,|\, f(x) = x_2\}$.

Лему доведено.

Означення 2. *Будемо говорити, що скінченна послідовність натуральних чисел* $i_1, i_2, \ldots, i_n$ *є простою, якщо* n *— найменший період нескінченної послідовності* $i_1, i_2, \ldots, i_n, i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$.

Зафіксуємо деякий цикл $B = \{\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_m\}$, де $m \geq 3$.

Лема 3. *Нехай* $I_n \rightharpoonup I_{n-1} \rightharpoonup \ldots \rightharpoonup I_2 \rightharpoonup I_1 \to I_n$, $I_j \subseteq [\beta_{i_j}, \beta_{i_j+1}]$, $j = \overline{1, n}$. *Тоді існує* $x \in I_n$ *таке, що* $f^n(x) = x$ *і* $f^j(x) \in I_{n-j}$, $j = \overline{0, n-1}$. *Якщо при цьому* $x \notin B$ *і послідовність* $i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1$ *є простою, то* x *— точка періоду* n.

Доведення. За лемою 1 та зауваженням 1 маємо

$$f(I_n) = I_{n-1},\ f(I_{n-1}) = I_{n-2}, \ldots,\ f(I_2) = I_1,\ f(I_1) \supseteq I_n. \tag{4}$$

Звідси $f^n(I_n) \supseteq I_n$. За теоремою Коші існує $x \in I_n$ таке, що $f^n(x) = x$.

Крім того, з (4) маємо $f^j(x) \in I_{n-j}$, $j = \overline{0, n-1}$.

Припустимо, що $x \notin B$ і x — точка періоду k, $k < n$. Тоді для будь-якого n_1 маємо $f^{n_1+k}(x) = f^{n_1}(x)$, отже, відрізки $[\beta_{i_p}, \beta_{i_p+1}]$ та $[\beta_{i_s}, \beta_{i_s+1}]$ при $|p - s| = k$ мають спільну точку, яка при цьому є внутрішньою, бо $x \notin B$. Тому $[\beta_{i_p}, \beta_{i_p+1}] = [\beta_{i_s}, \beta_{i_s+1}]$ і $i_p = i_s$ при $|p - s| = k$. Таким чином, k — період послідовності $i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1, i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1, \ldots$. Отримали суперечність з тим, що послідовність $i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1$ є простою.

Лему доведено.

Лема 4. *Нехай для відрізків* $I_j \subseteq [\beta_{i_j}, \beta_{i_j+1}]$ *мають місце накриття*

$$I_n \rightharpoonup I_{n-1} \rightharpoonup \ldots \rightharpoonup I_2 \rightharpoonup I_1 \rightharpoonup [\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}], \tag{5}$$

$$[\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}] \to [\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}]. \tag{6}$$

Припустимо, що виконуються умови:

а) $I_n \subseteq (\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1})$;

б) $\prod_{j=1}^{n} \Delta_f I_j > 0$;

в) *послідовність* $i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1$, *а також послідовності вигляду*

$$\underbrace{\underbrace{i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1}, \underbrace{i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1}, \ldots, \underbrace{i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1}}_{k}\ \underbrace{i_n, i_n, \ldots, i_n}_{r},$$

де $k \geq 1$, $r = \overline{1, n}$, *є простими. Тоді існує такий набір* $\{T_p$ *— цикл довжини* $p \,|\, p \geq n\}$, *що*

$$\left(\bigcup_{p=n}^{\infty} T_p\right)' \cap \operatorname{Per}(f) \subseteq \operatorname{Per}_n(f). \tag{7}$$

Доведення. За накриттями (5) побудуємо індуктивно послідовність відрізків $\{I_{k,j} \,|\, k \geq 1,\ j = \overline{1,n}\}$.

$I_{1,1}$: Оскільки $I_1 \rightharpoonup [\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}]$ і $I_n \subseteq [\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}]$, то $I_1 \to I_n$. За лемою 2 існує відрізок $I_{1,1} \subseteq I_1$ такий, що $I_{1,1} \rightharpoonup I_n$ і $\Delta_f I_{1,1} \cdot \Delta_f I_1 > 0$.

$I_{1,2}$: Маємо $I_2 \to I_{1,1}$. За лемою 2 існує відрізок $I_{1,2} \subseteq I_2$ такий, що $I_{1,2} \rightharpoonup$ $\rightharpoonup I_{1,1}$ і $\Delta_f I_{1,2} \cdot \Delta_f I_2 > 0$.

$\vdots$

$I_{1,n}$: Використавши накриття $I_n \to I_{1,n-1}$, отримаємо відрізок $I_{1,n} \subseteq I_n$ з властивостями $I_{1,n} \rightharpoonup I_{1,n-1}$, $\Delta_f I_{1,n} \cdot \Delta_f I_n > 0$.

$I_{2,1}$: Знову розглянемо накриття $I_{1,1} \rightharpoonup I_n \supseteq I_{1,n}$. Звідси $I_{1,1} \to I_{1,n}$. За лемою 2 існує відрізок $I_{2,1} \subseteq I_{1,1}$ такий, що $I_{2,1} \rightharpoonup I_{1,n}$, $\Delta_f I_{2,1} \cdot \Delta_f I_{1,1} > 0$. Також за побудовою $\Delta_f I_{1,1} \cdot \Delta_f I_1 > 0$. Перемноживши дві останні нерівності, отримаємо $\Delta_f I_{2,1} \cdot \left(\Delta_f I_{1,1}\right)^2 \cdot \Delta_f I_1 > 0$, звідки $\Delta_f I_{2,1} \cdot \Delta_f I_1 > 0$.

Продовжуватимемо цей процес нескінченно. В результаті отримаємо послідовність відрізків $\{I_{k,j} \,|\, k \geq 1, j = \overline{1,n}\}$, що задовольняє властивості

$$\begin{gathered}
[\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}] \leftharpoondown I_1 \leftharpoondown I_2 \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown I_{n-1} \leftharpoondown I_n \leftharpoondown I_{1,1} \leftharpoondown I_{1,2} \leftharpoondown \ldots \\
\ldots \leftharpoondown I_{1,n-1} \leftharpoondown I_{1,n} \leftharpoondown I_{2,1} \leftharpoondown I_{2,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown I_{2,n-1} \leftharpoondown I_{2,n} \leftharpoondown \ldots,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\forall j = \overline{1,n}\colon\ I_j \supseteq I_{1,j} \supseteq I_{2,j} \supseteq I_{3,j} \supseteq \ldots \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{k,j} =: I^j, \tag{9}$$

$$\forall k \geq 1, \quad j = \overline{1,n}\colon \quad \Delta_f I_{k,j} \cdot \Delta_f I_j > 0. \tag{10}$$

Доведемо, що

$$\forall k \geq 1\colon \quad \partial I^j \subseteq \operatorname{Per}_n(f). \tag{11}$$

З (8) за лемою 1 маємо

$$\partial I_{k,n} \to \partial I_{k,n-1} \to \ldots \to \partial I_{k,2} \to \partial I_{k,1} \to \partial I_{k-1,n}, \quad k \geq 1. \tag{12}$$

Спрямуємо в (12) k до ∞:

$$\partial I^n \to \partial I^{n-1} \to \ldots \to \partial I^2 \to \partial I^1 \to \partial I^n. \tag{13}$$

З властивості (9) та умови a) леми 4 бачимо, що $\bigcup_{j=1}^n \partial I^j$ не містить точок циклу B. Як і в доведенні леми 3, використовуючи простоту послідовності i_n, $i_{n-1}, \ldots, i_1$, можна показати, що всі періоди точок з $\bigcup_{j=1}^n \partial I^j$ є кратними n. Нам потрібно довести, що вони дорівнюють n.

Зауважимо, що $\Delta_f[\cdot, \cdot]$ — неперервна функція від кінців відрізка. Тому, спрямувавши в (10) k до ∞, отримаємо

$$\forall j = \overline{1,n}\colon \quad \Delta_f I^j \cdot \Delta_f I_j \geq 0. \tag{14}$$

Розглянемо два випадки:

1. Одна з нерівностей (14) перетворюється на рівність. Тоді існує j таке, що $\Delta_f I^j = 0$, і, отже, $f\left(\partial I^j\right)$ — одноточкова множина. З (13) видно, що всі ∂I^j складаються з однієї точки і $\bigcup_{j=1}^{n} \partial I^j$ утворює цикл довжини n.

2. Всі нерівності (14) є строгими. Перемножимо їх: $\prod_{j=1}^{n} \Delta_f I^j \cdot \prod_{j=1}^{n} \Delta_f I_j >$ > 0. Звідси за умовою б) маємо

$$\prod_{j=1}^{n} \Delta_f I^j > 0. \tag{15}$$

Нехай $I^1 = [a, b]$. Тоді з (13) та (15) отримуємо

$$\operatorname{sign}\left(f^n(b) - f^n(a)\right) = \operatorname{sign}\left(f\left(f^{n-1}(b)\right) - f\left(f^{n-1}(a)\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sign}\left(f^{n-1}(b) - f^{n-1}(a)\right) \operatorname{sign} \Delta_f I^1 =$$

$$= \operatorname{sign}\left(f^{n-2}(b) - f^{n-2}(a)\right) \operatorname{sign} \Delta_f I^2 \operatorname{sign} \Delta_f I^1 = \ldots$$

$$\ldots = \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sign} \Delta_f I^j = \operatorname{sign}\left(\prod_{j=1}^{n} \Delta_f I^j\right) = 1.$$

Отже, $f^n(b) > f^n(a)$.

Також $f^n(\{a, b\}) = \{a, b\}$, тому $f^n(a) = a$, $f^n(b) = b$ і $\bigcup_{j=1}^{n} \partial I^j$ розпадається на два цикли періоду n.

Отже, в обох випадках включення (11) виконуються.

Позначимо через T_n деякий цикл довжини n з $\bigcup_{j=1}^{n} \partial I^j$.

Аналогічно, використовуючи накриття (6), побудуємо послідовність відрізків $\left\{J_{k,r} \mid k \geq 1,\ r = \overline{0, n}\right\}$.

Покладемо $J_{1,0} := I_{1,n}$. Далі за накриттям (6), використавши лему 2, побудуємо відрізки $J_{1,1}, J_{1,2}, \ldots, J_{1,n} \subseteq \left[\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}\right]$ такі, що

$$J_{1,0} \leftharpoonup J_{1,1} \leftharpoonup J_{1,2} \leftharpoonup \ldots \leftharpoonup J_{1,n}. \tag{16}$$

Покладемо $J_{2,0} := I_{2,n}$. За властивістю (9) маємо $J_{2,0} \subseteq J_{1,0}$. За накриттями (16) побудуємо аналогічний ланцюг відрізків $J_{2,0} \leftharpoonup J_{2,1} \leftharpoonup J_{2,2} \leftharpoonup \ldots$ $\ldots \leftharpoonup J_{2,n}$ (тут ми навіть не відслідковуємо величини $\Delta_f J_{k,r}$, оскільки вони нам не знадобляться). Продовжимо цей процес нескінченно. В результаті отримаємо послідовність відрізків $\left\{J_{k,r} \mid k \geq 1,\ r = \overline{0, n}\right\}$ з властивостями

$$\forall k \geq 1: \quad I_{k,n} = J_{k,0} \leftharpoonup J_{k,1} \leftharpoonup J_{k,2} \leftharpoonup \ldots \leftharpoonup J_{k,n}, \tag{17}$$

$$\forall r = \overline{0, n}: \quad I_n \supseteq J_{1,r} \supseteq J_{2,r} \supseteq J_{3,r} \supseteq \ldots \supseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} J_{k,r} =: J^r. \tag{18}$$

З властивості (17) за лемою 1 маємо

$$\forall k \geq 1: \quad \partial I_{k,n} = \partial J_{k,0} \leftarrow \partial J_{k,1} \leftarrow \partial J_{k,2} \leftarrow \ldots \leftarrow \partial J_{k,n}.$$

Спрямуємо тут k до ∞:

$$\partial I^n = \partial J^0 \leftarrow \partial J^1 \leftarrow \partial J^2 \leftarrow \ldots \leftarrow \partial J^n. \tag{19}$$

Побудуємо ще один набір відрізків $\left\{L_{q,r,k,j} | q \geq 1,\ r = \overline{1,n},\ k = \overline{1,q},\ j = \overline{1,n}\right\}$. Зафіксуємо довільне число $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

З властивостей (8) і (18) маємо $J_{1,r} \leftarrow I_{1,1} \leftharpoondown I_{1,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown I_{1,n}$.

Застосувавши до цих накриттів n разів лему 2, знайдемо відрізки $L_{1,r,1,1} \subseteq$ $\subseteq I_{1,1},\ L_{1,r,1,2} \subseteq I_{1,2}, \ldots, L_{1,r,1,n} \subseteq I_{1,n}$ такі, що

$$J_{1,r} \leftharpoondown L_{1,r,1,1} \leftharpoondown L_{1,r,1,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{1,r,1,n}. \tag{20}$$

Оскільки $J_{2,r} \subseteq J_{1,r}$ і $L_{1,r,1,n} \subseteq I_{1,n}$, то з (8) і (20) маємо

$$J_{2,r} \leftarrow L_{1,r,1,1} \leftharpoondown L_{1,r,1,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{1,r,1,n} \leftarrow I_{2,1} \leftharpoondown I_{2,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown I_{2,n}.$$

До цих накриттів знову застосовуємо лему 2. Знаходимо відрізки

$$L_{2,r,1,1} \subseteq L_{1,r,1,1},\ L_{2,r,1,2} \subseteq L_{1,r,1,2}, \ldots, L_{2,r,1,n} \subseteq L_{1,r,1,n},$$
$$L_{2,r,2,1} \subseteq I_{2,1},\ L_{2,r,2,2} \subseteq I_{2,2}, \ldots, L_{2,r,2,n} \subseteq I_{2,n}$$

такі, що

$$J_{2,r} \leftharpoondown L_{2,r,1,1} \leftharpoondown L_{2,r,1,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{2,r,1,n} \leftharpoondown L_{2,r,2,1} \leftharpoondown$$
$$\leftharpoondown L_{2,r,2,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{2,r,2,n}.$$

На q-му кроці маємо накриття

$$J_{q,r} \leftarrow L_{q-1,r,1,1} \leftharpoondown L_{q-1,r,1,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{q-1,r,1,n} \leftharpoondown L_{q-1,r,2,1} \leftharpoondown$$
$$\leftharpoondown L_{q-1,r,2,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{q-1,r,2,n} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{q-1,r,q-1,n} \leftarrow$$
$$\leftarrow I_{q,1} \leftharpoondown I_{q,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown I_{q,n}.$$

За лемою 2 знайдемо відрізки $L_{q,r,k,j}$, $k = \overline{1,q}$, $j = \overline{1,n}$, які задовольняють умови

$$\forall k = \overline{1, q-1},\quad j = \overline{1,n}:\quad L_{q,r,k,j} \subseteq L_{q-1,r,k,j},$$
$$\forall j = \overline{1,n}:\quad L_{q,r,k,j} \subseteq I_{q,j},$$
$$J_{q,r} \leftarrow L_{q,r,1,1},$$
$$\forall k = \overline{1,q},\ j = \overline{1,n-1}:\quad L_{q,r,k,j} \leftarrow L_{q,r,k,j+1},$$
$$\forall k = \overline{1,n-1}:\quad L_{q,r,k,n} \leftarrow L_{q,r,k+1,1}.$$

Таким чином, застосувавши багато разів лему 2, побудуємо набір відрізків $\left\{L_{q,r,k,j} | q \geq 1,\ r = \overline{1,n}, k = \overline{1,q}, j = \overline{1,n}\right\}$, що задовольняють умови

$$J_{q,1} \leftharpoondown J_{q,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown J_{q,r} \leftharpoondown L_{q,r,1,1} \leftharpoondown L_{q,r,1,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{q,r,1,n} \leftharpoondown$$
$$\leftharpoondown L_{q,r,2,1} \leftharpoondown L_{q,r,2,2} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{q,r,2,n} \leftharpoondown \ldots \leftharpoondown L_{q,r,q,1} \leftharpoondown L_{q,r,q,2} \leftharpoondown \ldots$$
$$\ldots \leftharpoondown L_{q,r,q,n} \leftarrow J_{q,1}, \tag{21}$$

$$\forall k \geq 1,\ j = \overline{1,n}:\quad I_{k,j} \supseteq L_{k,r,k,j} \supseteq L_{k+1,r,k,j} \supseteq L_{k+2,r,k,j} \supseteq \ldots$$
$$\ldots \supseteq \bigcap_{q=k}^{\infty} L_{q,r,k,j} =: L^{r,k,j}. \tag{22}$$

З властивості (21) за лемою 1 маємо

$$\forall k \geq 1,\ q \geq k: \quad \partial J_{q,r} \leftarrow \partial L_{q,r,1,1} \leftarrow \partial L_{q,r,1,2} \leftarrow \ldots \leftarrow \partial L_{q,r,1,n} \leftarrow$$
$$\leftarrow \partial L_{q,r,2,1} \leftarrow \partial L_{q,r,2,2} \leftarrow \ldots \leftarrow \partial L_{q,r,2,n} \leftarrow \ldots \leftarrow \partial L_{q,r,q,1} \leftarrow$$
$$\leftarrow \partial L_{q,r,q,2} \leftarrow \ldots \leftarrow \partial L_{q,r,q,n}.$$

Спрямуємо q до ∞. Врахувавши довільність k, отримаємо

$$\partial J^r \leftarrow \partial L^{r,1,1} \leftarrow \partial L^{r,1,2} \leftarrow \ldots \leftarrow \partial L^{r,1,n} \leftarrow \partial L^{r,2,1} \leftarrow \partial L^{r,2,2} \leftarrow \ldots$$
$$\ldots \leftarrow \partial L^{r,2,n} \leftarrow \ldots \leftarrow \partial L^{r,q,1} \leftarrow \partial L^{r,q,2} \leftarrow \ldots \leftarrow \partial L^{r,q,n} \leftarrow \ldots. \tag{23}$$

Покладемо

$$S = \left(\bigcup_{j=1}^{n} \partial I^j\right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^{n} \partial J^r\right) \cup \left(\bigcup_{r=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{n} \partial L^{r,k,j}\right).$$

Важливість множини S виявиться пізніше: буде показано, що $S \supseteq$ $\supseteq \left(\bigcup_{p=n}^{\infty} T_p\right)'$, де для кожного $p \geq n$ T_p — цикл періоду p.

Дослідимо будову S. З властивостей (13), (19) і (23) маємо таку схему:

$$\begin{array}{llllllll}
\partial J^n & \leftarrow \partial L^{n,1,1} & \leftarrow \partial L^{n,1,2} & \leftarrow \ldots \leftarrow & \partial L^{n,1,n} & \leftarrow \partial L^{n,2,1} & \leftarrow \partial L^{n,2,2} & \leftarrow \ldots \\
\downarrow & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & \\
\partial J^2 & \leftarrow \partial L^{2,1,1} & \leftarrow \partial L^{2,1,2} & \leftarrow \ldots \leftarrow & \partial L^{2,1,n} & \leftarrow \partial L^{2,2,1} & \leftarrow \partial L^{2,2,2} & \leftarrow \ldots \\
\downarrow & & & & & & & \\
\partial J^1 & \leftarrow \partial L^{1,1,1} & \leftarrow \partial L^{1,1,2} & \leftarrow \ldots \leftarrow & \partial L^{1,1,n} & \leftarrow \partial L^{1,2,1} & \leftarrow \partial L^{1,2,2} & \leftarrow \ldots \\
\downarrow & & & & & & & \\
\partial I^n & \leftarrow \partial I^1 & \leftarrow \partial I^2 & & & & & \\
\nwarrow & \partial I^{n-1} & \ldots. & \swarrow & & & &
\end{array}$$

Отже, множина S складається щонайбільше з $2n$ гомоклінічних траєкторій, кожна з яких „приклеюється" до циклу періоду n.

З будови S видно, що

$$S \bigcap \operatorname{Per}(f) \subseteq \operatorname{Per}_n(f). \tag{24}$$

Перейдемо до побудови циклів T_p при $p > n$ (множина T_n в нас вже є). Нехай p — деяке фіксоване натуральне число, більше за n. Тоді воно однозначно подається у вигляді $p = qn + s$, $q \geq 1$, $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

З властивості (21) за лемою 3 існують точки $\gamma_{q,s,k,j}^{(p)} \in L_{q,s,k,j}$, $k = \overline{1, q}$, $j =$ $= \overline{1, n}$, $\varepsilon_{q,r}^{(p)} \in J_{q,r}$, $r = \overline{1, s}$, такі, що

$$\varepsilon_{q,1}^{(p)} \leftarrow \varepsilon_{q,2}^{(p)} \leftarrow \ldots \leftarrow \varepsilon_{q,s}^{(p)} \leftarrow \gamma_{q,s,1,1}^{(p)} \leftarrow \gamma_{q,s,1,2}^{(p)} \leftarrow \ldots \leftarrow \gamma_{q,s,1,n}^{(p)} \leftarrow$$

$$\leftarrow \gamma_{q,s,1,1}^{(p)} \leftarrow \gamma_{q,s,1,2}^{(p)} \leftarrow \ldots \leftarrow \gamma_{q,s,1,n}^{(p)} \leftarrow \ldots \leftarrow \gamma_{q,s,1,1}^{(p)} \leftarrow \gamma_{q,s,1,2}^{(p)} \leftarrow \ldots$$

$$\ldots \leftarrow \gamma_{q,s,1,n}^{(p)} \leftarrow \varepsilon_{q,1}^{(p)}. \tag{25}$$

Покладемо $T_p = \left\{\gamma_{q,s,k,j}^{(p)},\ k = \overline{1,q},\ j = \overline{1,n};\ \varepsilon_{q,r}^{(p)},\ r = \overline{1,s}\right\}$. Множина T_p не містить точок циклу B $\left(\text{хоча б тому, що } \varepsilon_{q,s}^{(p)} \in J_{q,s} \subseteq I_n, \text{ і за умовою а) леми 4 } I_n \subseteq \left(\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}\right)\right)$. З умови в) леми 4, застосовуючи міркування з доведення леми 3, отримуємо, що T_p — цикл періоду p.

Уточнимо місце розташування точок циклу T_p.

За побудовою маємо $\gamma_{q,s,1,1}^{(p)} \in L_{q,s,1,1} \subseteq I_{1,1}$, тому $\gamma_{q,s,1,1}^{(p)} \in I_{1,1}$. Доведемо, що $\gamma_{q,s,1,1}^{(p)} \notin I_{2,1}$.

Дійсно, нехай $\gamma_{q,s,1,1}^{(p)} \in I_{2,1}$. Оскільки на підставі (8) мають місце накриття $I_{2,1} \to I_{1,n} \to I_{1,n-1}$, то $f^2\left(\gamma_{q,s,1,1}^{(p)}\right) \in I_{1,n-1} \subseteq \left[\beta_{i_n-1}, \beta_{i_{n-1}+1}\right]$. Але згідно з (25) $f^2\left(\gamma_{q,s,1,1}^{(p)}\right) = \varepsilon_{q,s-1}^{(p)}$ $\left(\text{тут якщо } s = 1, \text{ то можна вважати } f^2\left(\gamma_{q,s,1,1}^{(p)}\right) = \varepsilon_{q,0}^{(p)} = \gamma_{q,s,q,n}^{(p)}\right)$. Тому $f^2\left(\gamma_{q,s,1,1}^{(p)}\right) \in I_n \subseteq \left[\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}\right]$. Отже, відрізки $\left[\beta_{i_n-1}, \beta_{i_{n-1}+1}\right]$ та $\left[\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}\right]$ мають спільну точку $f^2\left(\gamma_{q,s,1,1}^{(p)}\right)$, яка є внутрішньою для них обох, тому що $T_p \cap B = \varnothing$. Отже, $i_n = i_{n-1}$.

Розглядаючи наступні ітерації точки $\gamma_{q,s,1,1}^{(p)}$, бачимо, що $i_{n-1} = i_{n-2}$, $i_{n-2} = i_{n-3}, \ldots,\ i_2 = i_1$. Але послідовність $i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1$ є простою (умова в) леми 4), тому її числа не можуть бути всі однаковими. Отримали суперечність. Отже, $\gamma_{q,s,1,1}^{(p)} \notin I_{2,1}$.

Маємо $\gamma_{q,s,1,1}^{(p)} \in I_{1,1} \setminus I_{2,1}$. Аналогічно доводиться, що

$$\forall k = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,n}: \quad \gamma_{q,s,k,j}^{(p)} \in I_{k,j} \setminus I_{k+1,j}, \tag{26}$$

$$\forall r = \overline{1,s}: \quad \varepsilon_{q,r}^{(p)} \in J_{q,r} \setminus J_{q+1,r}, \tag{27}$$

$$\forall k = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,n}: \quad \gamma_{q,s,k,j}^{(p)} \in L_{q,s,k,j} \setminus L_{q+1,s,k,j}. \tag{28}$$

За такою схемою можна виділити набір циклів $\left\{T_p \mid p \geq n\right\}$.

Доведемо включення (7). Оскільки виконується (24), то достатньо довести, що

$$\left(\bigcup_{p=n}^{\infty} T_p\right)' \subseteq S. \tag{29}$$

Покладемо $A = \bigcup_{p=n}^{\infty} T_p$. Маємо

$$A' = \left(\bigcup_{p=n}^{\infty} T_p\right)' = \left(\bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{\gamma_{q,s,k,j}^{(p)}, k = \overline{1,q}, j = \overline{1,n}; \varepsilon_{q,r}^{(p)}, r = \overline{1,s}\right\}\right)' =$$

$$= \left(\bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{\gamma_{q,s,k,j}^{(p)}, k = \overline{1,q}, j = \overline{1,n}\right\}\right)' \cup \left(\bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{\varepsilon_{q,r}^{(p)}, r = \overline{1,s}\right\}\right)' = C' \cup D',$$

де $C = \bigcup_{p=n}^{\infty}\left\{\gamma_{q,s,k,j}^{(p)},\ k=\overline{1,q},\ \ j=\overline{1,n}\right\}$, $D = \bigcup_{p=n}^{\infty}\left\{\varepsilon_{q,r}^{(p)},\ r=\overline{1,s}\right\}$.

Нехай $x \in D'$. Тоді існує послідовність попарно різних точок $\{x_i = \varepsilon_{q_i,r_i}^{(p_i)},\ i \geq \geq 1\}$ така, що $x_i \to x$, $i \to \infty$. Вважаємо, що $x_i = \varepsilon_{q_i,r'}^{(p_i)}$, $i \geq 1$, де $r' \in \{1, 2, \ldots, n\}$ є фіксованим (при потребі досить перейти до відповідної підпослідовності). Отже, для будь-якого $i \geq 1$ $x_i \in J_{q_i,r'}$.

Для кожного фіксованого q' існує лише скінченна кількість чисел вигляду $q'n + r$, $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, тому множина $\{q_i | i \geq 1\}$ є необмеженою. Звідси та з (18) отримуємо, що для будь-якого $i \geq 1$ $x_i \in \bigcap_{i=1}^{\infty} J_{q_i,r'} = J^{r'}$. Крім того, з (27) видно, що для будь-якого $i \geq 1$ $x_i \notin \operatorname{int}\left(J^{r'}\right)$, тому $x \notin \operatorname{int}\left(J^{r'}\right)$. Отже, $x \in \partial J^{r'}$. Враховуючи довільність точки $x \in D'$, виводимо

$$D' \subseteq S. \tag{30}$$

Нехай $x \in C'$, $x = \lim_{i\to\infty} \gamma_{q_i,s_i,k_i,j'}^{(p_i)}$, де $j' \in \{1, 2, \ldots, n\}$ є фіксованим, а точки $\gamma_{q_i,s_i,k_i,j'}^{(p_i)}$ — попарно різними.

Можливі два випадки:

1. Послідовність $\{k_i : i \geq 1\}$ є обмеженою. Тоді можна вважати, що $k_i = = k'$, $s_i = s'$, $i \geq 1$, де $k' \geq 1$, $s' \geq 1$ — фіксовані. З (28) маємо

$$\forall i \geq 1: \quad \gamma_{q_i,s,k,j'}^{(p_i)} \in L_{q_i,s',k',j'} \setminus L_{q_i+1,s',k',j'}. \tag{31}$$

Спрямувавши в (31) i до ∞, отримаємо $x = \lim_{i\to\infty} \gamma_{q_i,s',k',j'}^{(p_i)} \in L^{s',k',j'} \subseteq S$. Отже, $x \in S$.

2. Послідовність $\{k_i : i \geq 1\}$ не є обмеженою. Тоді можна вважати, що $k_i \to \infty$, $i \to \infty$. З (26) для будь-якого $i \geq 1$ маємо $\gamma_{q_i,s_i,k_i,j'}^{(p_i)} \in I_{k_i,j'} \setminus I_{k_i+1,j'}$. Спрямувавши i до ∞, отримаємо $x \in \partial I^{j'} \subseteq S$.

Ми довели, що для будь-якого $x \in C'$ $x \in S$, звідки з урахуванням (30) отримуємо (29), а отже, і (7).

Лему доведено.

Лема 5. *Нехай відображення f має періодичну траєкторію, довжина якої не є степенем двійки, і $m \cdot 2^l$ (де $m > 1$ є непарним) — найбільше в порядку* (1) *число з $p(f)$. Тоді для кожного $n \neq 1, 2, 2^2, \ldots, 2^l$ виконується еквівалентність* $x \in \operatorname{Per}_n(f) \Leftrightarrow \begin{cases} n \,\vdots\, 2^l, \\ x \in \operatorname{Per}_{n/2^l}\left(f^{2^l}\right). \end{cases}$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $x \in \operatorname{Per}_n(f)$. Тоді з порядку (1) видно, що $n \,\vdots\, 2^l$. Крім того, легко бачити, що $x \in \operatorname{Per}_{n_1}\left(f^{2^l}\right)$, де $n_1 = \dfrac{n}{\left(n, 2^l\right)}$. Оскільки $n \,\vdots\, 2^l$, то $\left(n, 2^l\right) = 2^l$. Звідси $n_1 = \dfrac{n}{2^l}$.

Достатність. Нехай $n \,\vdots\, 2^l$ і $x \in \operatorname{Per}_{n/2^l}\left(f^{2^l}\right)$. Тоді x — періодична точка для відображення f. Нехай n_2 — її період. Потрібно довести, що $n_2 = n$. Маємо $\dfrac{n}{2^l} = \dfrac{n_2}{\left(n_2, 2^l\right)}$. Розглянемо два випадки:

(i) $\dfrac{n}{2^l}$ парне. Тоді $n_2 \vdots 2^{l+1}$, і, отже, $\dfrac{n}{2^l} = \dfrac{n_2}{(n_2, 2^l)} = \dfrac{n_2}{2^l}$. Звідси $n = n_2$.

(ii) $\dfrac{n}{2^l}$ непарне. Оскільки за умовою леми $n \neq 2^l$, то $n = m_1 \cdot 2^l$, де $m_1 > 1$ є непарним. Маємо $n_2 = \dfrac{n}{2^l}(n, 2^l)$. Звідси $n_2 \in \left\{\dfrac{n}{2^l}, \dfrac{n}{2^{l-1}}, \ldots, \dfrac{n}{2}, n\right\} = \{m_1, m_1 \cdot 2, \ldots, m_1 \cdot 2^{l-1}, m_1 \cdot 2^l\}$. Але m_1, $m_1 \cdot 2, \ldots, m_1 \cdot 2^{l-1} \succ m \cdot 2^l$, тому $n_2 = m_1 \cdot 2^l = n$.

Лему доведено.

Доведення теореми. Розглянемо спочатку випадок, коли відображення f має цикл непарного періоду, більшого за 1, і нехай $m = 2k + 1$ — найменший такий період.

Зафіксуємо періодичну траєкторію $B = \{\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_m\}$ періоду m. Як відомо [2], індукована ним на множині $\{1, 2, \ldots, m\}$ перестановка π має вигляд

$$\pi_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k+1 & k+2 & \ldots & 2k & 2k+1 \\ k+1 & 2k+1 & 2k & \ldots & k+2 & k & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

або

$$\pi'_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & k+1 & k+2 & \ldots & 2k & 2k+1 \\ 2k+1 & 2k & \ldots & k+2 & k & k-1 & \ldots & 1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що $\pi = \pi_{2k+1}$. Випадок $\pi = \pi'_{2k+1}$ розглядається аналогічно.

Зауважимо, що

$$\Delta_f[\beta_1, \beta_2] > 0, \qquad \Delta_f[\beta_j, \beta_{j+1}] < 0 \quad \forall j = \overline{2, 2k}. \tag{32}$$

Розглянемо окремо два випадки:

1. M містить нескінченну кількість непарних чисел.

Виберемо найменше непарне $n \in M$, $n \geq 2k + 3$. Можна вважати, що $s \geq 2k + 3$ для будь-якого $s \in M$. Покладемо

$$\begin{gathered} i_1 = k, \quad i_2 = k+2, \quad i_3 = k-1, \quad i_4 = k+3, \ldots, i_{2k-3} = 2, \\ i_{2k-2} = 2k, \quad i_{2k-1} = 1, \\ i_{2k} = i_{2k+1} = \ldots = i_n = k+1. \end{gathered} \tag{33}$$

Тоді, як видно зі структури перестановки π_{2k+1},

$$\begin{gathered} [\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}] \xrightarrow{f} [\beta_{i_{n-1}}, \beta_{i_{n-1}+1}] \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} [\beta_{i_2}, \beta_{i_1+1}] \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f} [\beta_{i_1}, \beta_{i_1+1}] \xrightarrow{f} [\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}], \end{gathered} \tag{34}$$

$$[\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}] \xrightarrow{f} [\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}]. \tag{35}$$

Застосовуючи лему 2 до накриттів (34), отримуємо набір відрізків з властивостями

$$I_n \xrightarrow{f} I_{n-1} \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} I_2 \xrightarrow{f} I_1 \xrightarrow{f} \left[\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}\right], \tag{36}$$

$$I_j \subseteq \left[\beta_{i_j}, \beta_{i_j+1}\right], \quad j = \overline{1, n}, \tag{37}$$

$$\Delta_f I_j \cdot \Delta_f \left[\beta_{i_j}, \beta_{i_j+1}\right] > 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{38}$$

Властивості (35) – (37) дають можливість застосувати лему 4. Перевіримо виконання умов леми 4:

а) З умови $n \geq 2k + 3$ маємо $i_n = i_{n-1} = i_{n-2} = k + 1$. Тому згідно з (36) і (37) $f(x)$, $f^2(x) \in \left[\beta_{k+1}, \beta_{k+2}\right]$ для $x \in I_n$. Отже, $\left\{\beta_{k+1}, \beta_{k+2}\right\} \cap I_n = \varnothing$, бо $f^2\left(\beta_{i_n}\right) \equiv f^2\left(\beta_{k+1}\right) = \beta_k \notin \left[\beta_{k+1}, \beta_{k+2}\right]$ і $f\left(\beta_{i_n+1}\right) \equiv f\left(\beta_{k+2}\right) = \beta_k \notin \left[\beta_{k+1}, \beta_{k+2}\right]$.

Таким чином, $I_n \subseteq \left(\beta_{i_n}, \beta_{i_n+1}\right)$.

б) З (38) маємо $\prod_{j=1}^{n} \Delta_f I_j \cdot \prod_{j=1}^{n} \Delta_f \left[\beta_{i_j}, \beta_{i_j+1}\right] > 0$. Але згідно з (32) і (33)

$$\prod_{j=1}^{n} \Delta_f \left[\beta_{i_j}, \beta_{i_j+1}\right] = \Delta_f [\beta_1, \beta_2] \cdot \prod_{j=2}^{2k} \Delta_f \left[\beta_{i_j}, \beta_{i_j+1}\right] \times$$

$$\times \left(\Delta_f \left[\beta_{k+1}, \beta_{k+2}\right]\right)^{n-2k+1} > 0.$$

Отже, $\prod_{j=1}^{n} \Delta_f I_j > 0$.

в) Кожна з розглядуваних послідовностей містить в кінці таку кількість чисел $k + 1$, яка більше в ній ніде не зустрічається. Тому всі потрібні послідовності є простими.

Отож, ми можемо застосувати лему 4 і виділити набір циклів $\left\{T_p \mid p \geq n\right\}$ з властивістю (7).

Покладемо $K = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{p \in M} T_p\right)$. Тоді K задовольняє умови (2), (3), адже згідно з (7)

$$K = \bigcup_{p \in M} T_p \cup \left(\bigcup_{p \in M} T_p\right)' \subseteq \bigcup_{p \in M} T_p \cup \left(\bigcup_{p \geq n} T_p\right)' \subseteq \bigcup_{p \in M} \operatorname{Per}_p(f).$$

2. M містить нескінченну кількість парних чисел.

Цей випадок доводиться аналогічно першому випадку. Досить вибрати найменше парне $n \geq 4k + 2$, $n \in M$, і розглянути накриття (34), (35) з іншими i_j:

$$i_1 = k, \quad i_2 = k + 2, \quad i_3 = k - 1, \quad i_4 = k + 3, \ldots$$

$$\ldots, i_{2k-3} = 2, \quad i_{2k-2} = 2k, \quad i_{2k-1} = 2k, \quad i_{2k-1} = 1,$$

$$i_{2k} = k, \quad i_{2k+1} = k + 2, \quad i_{2k+2} = k - 1, \quad i_{2k+3} = k + 3, \ldots$$

$$\ldots, i_{4k-4} = 2, \quad i_{4k-3} = 2k, \quad i_{4k-2} = 1,$$

$$i_{4k-1} = i_{4k} = \ldots = i_n = k + 1.$$

Отже, коли f має цикл непарного періоду, теорему доведено.

Нехай тепер довільне відображення f має періодичну траєкторію, період якої не є степенем двійки, і $m \cdot 2^l$ — найбільше в порядку (1) число з $p(f)$. Тоді будемо вважати, що $M \cap \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^l\} = \varnothing$.

Розглянемо відображення f^{2^l}. Воно має траєкторію непарного періоду, а саме, періоду m. Отже, для нього можна застосувати міркування з першої частини доведення. Покладемо $M' = \left\{ n/2^l \mid n \in M \right\}$. Тоді існує замкнена множина K, що задовольняє умови

$$K \cap \operatorname{Per}\left(f^{2^l}\right) \subseteq \bigcup_{p \in M'} \operatorname{Per}_p\left(f^{2^l}\right),$$

$$\forall\, p \in M': \quad K \cap \operatorname{Per}_p\left(f^{2^l}\right) \neq \varnothing.$$

За лемою 5 множина K буде задовольняти умови (2), (3).

Теорему доведено.

Зауважимо, що накладеним в теоремі обмеженням про те, що відображення f не є типу 2^∞, не можна знехтувати. Існує відображення f типу 2^∞ [3], в якого гранична множина для множини всіх періодичних точок складається лише з однієї нерухомої точки x_0. Візьмемо довільну нескінченну множину $M \subseteq \operatorname{Per}(f)$ таку, що $1 \notin M$. Тоді не існує такого відображення $\tilde{f}$, що $p(f, \tilde{f}) = M$. Дійсно, з умови $p(f, \tilde{f}) = M$ випливало б, що значення f і $\tilde{f}$ є однаковими на деякій нескінченній підмножині відрізка $[0, 1]$. Звідси $f(x_0) = \tilde{f}(x_0)$, що суперечить умові $1 \notin M$, оскільки x_0 — нерухома точка.

1. *Polezzi M., Aniz C.* A Sharkovskii-type theorem for pairs of maps // Far East J. Dynam. Syst. – 2005. – **7**, № 1. – P. 65 – 75.
2. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с.
3. *Шарковский А. Н.* О циклах и структуре непрерывного отображения // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 3. – С. 40 – 41.

Одержано 06.03.07,
після доопрацювання — 24.12.07