УДК 517.95

І. М. Медвідь (Львів нац. ун-т)

ПАРАБОЛІЧНА ВАРІАЦІЙНА НЕРІВНІСТЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

We prove the existence and uniqueness of a solution of a nonlinear parabolic variational inequality in an unbounded domain without conditions at infinity. In particular, the growth of the initial data at infinity may not necessarily be limited and a solution of the inequality is unique without any restriction on its behavior at infinity.

Доказано существование и единственность решения нелинейного параболического вариационного неравенства в неограниченной области без условий на бесконечности. В частности, исходные данные могут неограниченно возрастать на бесконечности, а решение неравенства является единственным без требований к его поведению на бесконечности.

Одним із альтернативних способів дослідження фізичних задач є варіаційні нерівності. Крім того, вони є одним із методів дослідження крайових задач і задач Коші. Результати, одержані для варіаційних нерівностей (існування та єдиність розв'язку), можна інтерпретувати як коректність різноманітних задач для диференціальних рівнянь.

Починаючи з 1984 р., після опублікування праці Брезіса [1], актуальним стало дослідження однозначної розв'язності задач Коші і крайових задач в необмежених областях без умов на нескінченності [2 – 12]. У працях, опублікованих раніше (у тому числі [13 – 19]), досліджено задачі, для яких така розв'язність забезпечувалась лише у класах функцій, які задовольняють певну умову зростання на нескінченності.

Сьогодні актуальним є дослідження варіаційних нерівностей, про що свідчать праці [20 – 25], які узагальнюють багато результатів, отриманих раніше. Тому природно дослідити параболічну варіаційну нерівність, що описує загальний клас фізичних задач, які моделюються рівняннями того ж типу, що і у вказаних вище працях. У цій роботі за таке модельне рівняння беремо

$$u_t + \triangle^2 u - \triangle u + \triangle_p^{(2)}(u) - \triangle_q(u) + |u|^{r-2}u = 0, \qquad (1)$$

де

$$\triangle_p^{(2)}(u) = \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{x_i x_i}|^{p-2} u_{x_i x_i}\right), \quad p > 1, \qquad \triangle_q(u) = \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i}\right), \quad q > 1.$$

Параболічні диференціальні рівняння четвертого порядку представляють значний інтерес в науці про матеріали, інженерії, біологічній математиці, комплексному аналізі та ін.

У праці [26] досліджено питання існування та єдиності розв'язку задачі Коші для розширеного рівняння Фішера – Колмогорова

$$u_t = -\gamma D^4 u + D^2 u + u - u^3, \quad \gamma > 0, \tag{2}$$

яке з'явилось при вивченні фазових переходів критичних точок і досліджувалось як модельне рівняння високого порядку для бістабільних систем (див. [26]). Тут доведено існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння (2) в $\mathbb{R} \times (0, T)$ для будь-якого $T < 3^2/[4^4 \gamma \beta^3]$ з початковою функцією, яка задовольняє умову росту

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u_0^2(x) \exp(-\beta |x|^{4/3}) dx < \infty, \quad \beta > 0.$$

Аналогічні результати в більш загальному випадку отримано для варіаційної нерівності [22].

У [27] встановлено існування та єдиність слабкого розв'язку для узагальненої моделі тонкої плівки

$$u_t + \operatorname{div}(|\nabla \triangle u|^{p-2} \nabla \triangle u) = f - \operatorname{div} g, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, T],$$

$$u|_{\partial\Omega} = \triangle u|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0.$$

Властивості розв'язків задачі Коші для рівняння тонкої плівки

$$u_t + \operatorname{div}(u^n \nabla \triangle u - u^m \nabla \triangle u) + f(x, t, u) = 0$$

вивчено в [28, 29].

У праці [30] вивчено неперервну модель для епітаксіального росту тонкої плівки

$$u_t + \triangle^2 - \nabla \cdot (f(\nabla u)) = g, \quad (x,t) \in \Omega \times (0, T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \triangle u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

і показано існування, єдиність та регулярність розв'язків у відповідних функціональних просторах.

Як з математичної, так і з фізичної точки зору доцільно вивчати рівняння, що аналогічне до (3) і містить нелінійні доданки, що включають як дифузію четвертого порядку, так і абсорбцію (рівняння (1)). Крім того, його можна розглядати як рівняння, що більш загально описує ті ж самі процеси, що і рівняння Фішера – Колмогорова.

У праці [24] вивчено варіаційну нерівність для модельного рівняння, аналогічного до (1), тільки без члена $\triangle_p^{(2)}(u)$. У випадку сильної абсорбції ($r > 2$) доведено існування та єдиність розв'язку без умов на нескінченності.

У цій роботі доведено існування та єдиність розв'язку для одного класу параболічних варіаційних нерівностей для модельного рівняння типу (1) без умов на нескінченності.

Нехай $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$, де Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\tau \in (0, T]$, $T < +\infty$; $\partial\Omega \in C^1$; $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < R\}$; $\Omega_\tau = Q_\tau \cap \{t = \tau\}$. Припустимо, що множина $B_R \cap \Omega = \Omega^R$ є областю і поверхня $\partial\Omega^R$ є регулярною [31, с. 45] для кожного $R > 1$. Нехай $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0, \tau)$, $\Omega_\tau^R = \Omega_\tau \cap B_R$, $\tau \in (0, T]$; $\partial\Omega^R = \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R$;

$\Gamma_1^R = \partial\Omega \cap \partial\Omega^R$; $\Gamma_2^R = \partial\Omega^R \setminus \Gamma_1^R$; $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$; ν — зовнішня нормаль до $\partial\Omega$.

Введемо простори (для кожного $R > 1$):

$$\overset{\circ}{H}_1{}^2(\Omega^R) = \left\{u\colon u \in H^2(\Omega^R),\ \ u|_{\Gamma_1^R} = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1^R} = 0\right\},$$

$$H^2_{0,\,1}(\Omega^R) = \big\{u\colon u \in H^2(\Omega^R),\ \ u|_{\Gamma_1^R} = 0\big\},$$

$$H^2_{1,\,0}(\Omega^R) = \left\{u\colon u \in H^2(\Omega^R),\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1^R} = 0\right\},$$

$$H^2_{1,1}(\Omega^R) = \left\{u\colon u \in H^2(\Omega^R),\ \ u|_{\Gamma_1^R \cap S_1} = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1^R \cap S_2} = 0\right\}.$$

Нехай $\widetilde{H}^2(\Omega^R)$ — один із просторів $H^2_{0,\,1}(\Omega^R)$, $H^2_{1,\,0}(\Omega^R)$, $H^2_{1,\,1}(\Omega^R)$, а $V_2(\Omega^R)$ — такий замкнутий простір, що $\overset{\circ}{H}_1{}^2(\Omega^R) \subset V_2(\Omega^R) \subset \widetilde{H}^2(\Omega^R)$, $V_2(\Omega^{R_1}) \subset V_2(\Omega^R)$, $R_1 > R$. Крім того, нехай

$$V_{2,\,0}(\Omega^R) = \left\{u\colon u \in V_2(\Omega^R),\ \ u|_{\Gamma_2^R} = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2^R} = 0\right\}.$$

Через $V_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ позначимо простір таких функцій v, що $v \in V_2(\Omega^R)$ для кожного $R > 1$, а через $L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ — простір таких функцій v, що $v \in L^r(\Omega^R)$ для кожного $R > 1$, де $r \in (1, +\infty]$. Нехай $W(\Omega^R)$ — такий банахів простір, що $V_2(\Omega^R)$ щільно і неперервно вкладений в $W(\Omega^R)$ (для кожного $R > 1$), а

$$W_{\mathrm{loc}}(\,\overline{\Omega}\,) = \big\{w\colon w \in W(\Omega^R)\ \ \forall R > 1\big\}.$$

Розглянемо в області Q_T параболічну варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[v_t(v-u)\psi(x) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta((v-u)\psi(x)) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)|u_{x_ix_i}|^{p-2}u_{x_ix_i}((v-u)\psi(x))_{x_ix_i} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}((v-u)\psi(x))_{x_i} + g(x,t,u)(v-u)\psi(x) -$$
$$-\frac{\gamma}{2}(v-u)^2\psi(x) - \sum_{|\alpha|\leqslant 2} f_\alpha(x,t)D^\alpha((v-u)\psi(x))\Bigg]e^{-\gamma t}\,dxdt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|v-u|^2\psi(x)e^{-\gamma\tau}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|v-u_0|^2\psi(x)\,dx, \qquad (4)$$

де

$$D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\quad |\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n,$$

$$\alpha_i\in\mathbb{N}\cup\{0\},\quad i=\overline{1,n},\quad p>1,\quad q>1,\quad \gamma\in\mathbb{R}.$$

Будемо говорити, що коефіцієнти (4) задовольняють відповідно умови (A), (B), (C) і (G), якщо:

(A) $a_{\alpha\beta}\in C(\overline{Q}_T),\ 1<|\alpha|=|\beta|\leqslant 2;$
$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta\geqslant a_0\sum_{|\alpha|=2}|\xi_\alpha|^2\ \ \forall(x,t)\in Q_T\ \ \forall\xi\in\mathbb{R}^{(n^2+n)/2},$
$a_0>0,$
$\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}a_{\alpha\beta}(x,t)\eta_\alpha\eta_\beta\geqslant a_0\sum_{|\alpha|=1}|\eta_\alpha|^2\ \ \forall\,(x,t)\in Q_T\ \ \forall\,\eta\in\mathbb{R}^n;$
$a_{00}\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T),\ \ a_{00}(x,t)\geqslant a_1\ \ \forall\,(x,t)\in Q_T,\ \ a_1\in\mathbb{R};$
$|a_{\alpha\beta}(x,t)|\leqslant a^0R^{\kappa}\ \ \forall\,(x,t)\in Q_T^R\ \ \forall\,R>1,\ \ |\alpha|=|\beta|=2,\ \ \kappa\geqslant 0;$
$|a_{\alpha\beta}(x,t)|\leqslant a^0R^{\kappa_1}\ \ \forall\,(x,t)\in Q_T^R\ \ \forall\,R>1,\ \ |\alpha|=|\beta|=1,\ \ \kappa_1\geqslant 0;$

(B) $b_i\in C(\overline{Q}_T),\ \ 0<b_0\leqslant b_i(x,t)\leqslant b^0R^{\kappa_2}\ \ \forall(x,t)\in Q_T^R\ \ \forall\,R>1,\ \ i=1,\ldots,n,\ \ \kappa_2\geqslant 0;$

(C) $c_i\in C(\overline{Q}_T),\ \ 0<c_0\leqslant c_i(x,t)\leqslant c^0R^{\kappa_3}\ \ \forall(x,t)\in Q_T^R\ \ \forall\,R>1,\ \ i=1,\ldots,n,\ \ \kappa_3\geqslant 0;$

(D) функція $g(\cdot,\cdot,\xi)$ є вимірною в Q_T для всіх $\xi\in\mathbb{R}$;
функція $g(x,t,\cdot)$ є неперервною на $\mathbb{R}$ майже для всіх $(x,t)\in Q_T$;
$\big(g(x,t,\xi)-g(x,t,\eta)\big)(\xi-\eta)\geqslant g_0|\xi-\eta|^r,$
$\big|g(x,t,\xi)\big|\leqslant g_1|\xi|^{r-1},\ \ r\in(1,+\infty),$ для всіх $\xi,\eta\in\mathbb{R}$ і майже для всіх $(x,t)\in Q_T$, де $g_0,\ g_1$ — невід'ємні сталі.

Нехай $\mathcal{K}$ — опуклий замкнений конус в $V_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ і $W_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Означення 1. *Функцію u, яка задовольняє включення*

$$u\in C\big([0,T];L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)\cap L^r\big((0,T);L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)\cap L^2\big((0,T);V_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big),$$

$u\in\mathcal{K}$ майже для всіх $t\in(0,T)$, і нерівність (4) *для всіх $\tau\in(0,T]$, для всіх $\psi\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x)\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}^n$, для деякого $\gamma\in[\gamma_0,+\infty)$ і для всіх функцій $v\in L^r\big((0,T);L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)\cap L^2\big((0,T);V_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ таких, що $v_t\in L^2\big((0,T);L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ і $v\in\mathcal{K}$ майже для всіх $t\in(0,T)$, будемо називати розв'язком нерівності* (4) *з початковою умовою*

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega. \tag{5}$$

Як і в [32, с. 284], можна довести таку лему.

Лема 1. *Нехай*

$$w\in C\big([0,T];L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)\cap L^r\big((0,T);L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)\cap L^2\big((0,T);V_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big),$$

$w\in\mathcal{K}$ майже для всіх $t\in(0,T)$, $u_0\in\mathcal{K}$. Тоді розв'язок задачі

$$\rho w_{\rho t}+w_\rho=w,\qquad w_\rho(x,0)=u_0(x),\quad t\in[0,T],\quad x\in\Omega, \tag{6}$$

слабко збігається до w у просторі $L^2\big((0,T);V_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)\cap L^r\big((0,T);L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ при $\rho\to+0$.

Розглянемо функцію $\vartheta_{R,s}(x) = \big[h_R(x)\big]^s$, $s \geqslant 4$, де $h_R(x) = (R^2 - |x|^2)/R$, якщо $|x| \leqslant R$, і $h_R(x) = 0$, якщо $|x| > R$. Зауважимо, що для функції $\vartheta_{R,s}$ справджуються такі оцінки:

$$\left|\frac{\partial \vartheta_{R,s}(x)}{\partial x_i}\right| \leqslant 2s[h_R(x)]^{s-1}, \qquad \left|\frac{\partial^2 \vartheta_{R,s}(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant 4s^2[h_R(x)]^{s-2}$$

для всіх $i, j = 1, \ldots, n$. Нехай $s_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \max\big\{4p/(2-p); 2q/(2-q); 4\big\}$.

Як наслідок результату, отриманого в [4, с. 221], правильною є наступна лема.

Лема 2. *Для кожної функції* $u \in V_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ *виконується оцінка*

$$\int\limits_{\Omega^R} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 \big[h_R(x)\big]^{s-2} \, dx \leqslant \delta \int\limits_{\Omega^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^2 \big[h_R(x)\big]^{s} \, dx +$$

$$+ \frac{(2s-3)^2}{4\delta} \int\limits_{\Omega^R} |u|^2 \big[h_R(x)\big]^{s-4} \, dx, \tag{7}$$

де δ *— будь-яке число з проміжку* $(0,1)$, $R > 1$.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* (A), (B), (C), (G) *і, крім того,* $r > 2$, $p,\ q \in (2n/(n+2), 2)$, $g_0 > 0$, $\kappa,\ \kappa_1 \in [0,1)$, $\kappa_2 \in [0, (p(n+2) - 2n)/(2p))$, $\kappa_3 \in [0, (q(n+2) - 2n)/(2q))$, $\gamma_0 > \max\{0; 1 - 2a_1\}$, *то нерівність* (4) *може мати лише один розв'язок.*

Доведення. Припустимо, що нерівність (4) має два розв'язки: $u^{(1)}$ і $u^{(2)}$. Запишемо нерівність (5) для кожного з них і покладемо $v = w_\rho$, де w_ρ — розв'язок задачі (6) при $w = (u^{(1)} + u^{(2)})/2$. Додамо отримані нерівності і, враховуючи те, що

$$\int\limits_{Q_T} w_{\rho t}(w_\rho - w)\psi(x) e^{-\gamma t} \, dxdt = -\rho \int\limits_{Q_T} w_{\rho t}^2 \psi(x) e^{-\gamma t} \leqslant 0,$$

а також лему 1, перейдемо до границі при $\rho \to +0$. В результаті отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u D^\beta (u\psi(x)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \Big(|u^{(1)}_{x_i x_i}|^{p-2} u^{(1)}_{x_i x_i} - |u^{(2)}_{x_i x_i}|^{p-2} u^{(2)}_{x_i x_i} \Big) (u\psi(x))_{x_i x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i(x,t) \Big(|u^{(1)}_{x_i}|^{q-2} u^{(1)}_{x_i} - |u^{(2)}_{x_i}|^{q-2} u^{(2)}_{x_i} \Big) (u\psi(x))_{x_i} +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} u^2 \psi(x) + \big(g(x,t,u_1) - g(x,t,u_2) \big) u\psi(x) \Bigg] e^{-\gamma t} \, dxdt \leqslant 0, \tag{8}$$

де $u = u^{(1)} - u^{(2)}$, $\psi = \vartheta_{R,s}(x)$. Згідно з умовою (A) і лемою 2

$$\mathcal{I}_1 := \int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u D^\beta(u\psi(x)) e^{-\gamma t}\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant (a_0 - \delta_0) \int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u|^2 [h_R(x)]^s e^{-\gamma t}\, dxdt -$$

$$-\mu_1(\delta_0) R^{4\kappa} \int\limits_{Q_T} |u|^2 [h_R(x)]^{s-4} e^{-\gamma t}\, dxdt,$$

$$\mathcal{I}_2 := \int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u D^\beta(u\psi(x)) e^{-\gamma t}\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant (a_0 - \delta_1) \int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^2 [h_R(x)]^s e^{-\gamma t}\, dxdt -$$

$$-\mu_2(\delta_1) R^{2\kappa_1} \int\limits_{Q_T} |u|^2 [h_R(x)]^{s-2} e^{-\gamma t}\, dxdt,$$

$\delta_0 > 0, \delta_1 > 0$, $\mu_1(\delta_0), \mu_2(\delta_1)$ — деякі додатні сталі. З умови (B) випливає

$$\mathcal{I}_3 := \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \Big(|u^{(1)}_{x_ix_i}|^{p-2} u^{(1)}_{x_ix_i} - |u^{(2)}_{x_ix_i}|^{p-2} u^{(2)}_{x_ix_i} \Big) u_{x_ix_i} \psi(x) e^{-\gamma t}\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant b_0 \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n \Big(|u^{(1)}_{x_ix_i}|^{p-2} u^{(1)}_{x_ix_i} - |u^{(2)}_{x_ix_i}|^{p-2} u^{(2)}_{x_ix_i} \Big) u_{x_ix_i} \big[h_R(x)\big]^s e^{-\gamma t}\, dxdt.$$

Для оцінки інтеграла

$$\mathcal{I}_4 := \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \Big(|u^{(1)}_{x_ix_i}|^{p-2} u^{(1)}_{x_ix_i} - |u^{(2)}_{x_ix_i}|^{p-2} u^{(2)}_{x_ix_i} \Big) u_{x_i} \psi_{x_i}(x) e^{-\gamma t}\, dxdt$$

використаємо нерівність

$$\big(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta \big)(\xi - \eta) \leqslant 2^{2-p} |\xi - \eta|^p, \tag{9}$$

яка є правильною для всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ і $p \in (1, 2]$. Тоді

$$\mathcal{I}_4 \geqslant -\delta_2 \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n \Big| |u^{(1)}_{x_ix_i}|^{p-2} u^{(1)}_{x_ix_i} - |u^{(2)}_{x_ix_i}|^{p-2} u^{(2)}_{x_ix_i} \Big|^{p'} \psi(x) e^{-\gamma t}\, dxdt -$$

$$-\delta_2 \int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|=1} \big| D^\alpha u \big|^2 \psi(x) e^{-\gamma t}\, dxdt -$$

$$-\mu_3(\delta_2) \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n \Big| b_i(x,t) \psi_{x_i}(x) [\psi(x)]^{-1/p' - 1/2} \Big|^{2p/(2-p)}\, dxdt,$$

де $\delta_2 > 0$, $\mu_3(\delta_2) > 0$, $p' = p/(p-1)$.

Аналогічно

$$\mathcal{I}_5 := \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\Big(|u^{(1)}_{x_ix_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_ix_i} - |u^{(2)}_{x_ix_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_ix_i}\Big)u\psi_{x_ix_i}(x)e^{-\gamma t}\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\delta_3 \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \left||u^{(1)}_{x_ix_i}|^{p-2}u^{(1)}_{x_ix_i} - |u^{(2)}_{x_ix_i}|^{p-2}u^{(2)}_{x_ix_i}\right|^{p'}\psi(x)e^{-\gamma t}\,dxdt-$$

$$-\delta_3 \int\limits_{Q_T} |u|^2\psi(x)e^{-\gamma t}\,dxdt-$$

$$-\mu_4(\delta_3) \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n}\Big|b_i(x,t)\psi_{x_ix_i}(x)[\psi(x)]^{-1/p'-1/2}\Big|^{2p/(2-p)}\,dxdt,$$

де $\delta_3 > 0$, $\mu_4(\delta_3) > 0$, і

$$\mathcal{I}_6 := \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)\Big(|u^{(1)}_{x_i}|^{q-2}u^{(1)}_{x_i} - |u^{(2)}_{x_i}|^{q-2}u^{(2)}_{x_i}\Big)u\psi_{x_i}(x)e^{-\gamma t}\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant -\delta_4 \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \left||u^{(1)}_{x_i}|^{q-2}u^{(1)}_{x_i} - |u^{(2)}_{x_i}|^{q-2}u^{(2)}_{x_ix_i}\right|^{q'}\psi(x)e^{-\gamma t}\,dxdt-$$

$$-\delta_4 \int\limits_{Q_T} |u|^2\psi(x)e^{-\gamma t}\,dxdt-$$

$$-\mu_5(\delta_4) \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n}\Big|c_i(x,t)\psi_{x_i}(x)[\psi(x)]^{-1/q'-1/2}\Big|^{2q/(2-q)}\,dxdt,$$

де $\delta_4 > 0$, $\mu_5(\delta_4) > 0$.

Якщо $s \geqslant s_0$, то з умов (B), (C) і оцінок функцій ψ_{x_i}, $\psi_{x_ix_i}$ отримаємо

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n}\Big|b_i(x,t)\psi_{x_i}(x)\big[\psi(x)\big]^{-1/p'-1/2}\Big|^{2p/(2-p)}\,dxdt \leqslant \mu_6 R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n},$$

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n}\Big|b_i(x,t)\psi_{x_ix_i}(x)\big[\psi(x)\big]^{-1/p'-1/2}\Big|^{2p/(2-p)}\,dxdt \leqslant \mu_6 R^{(2p(\kappa_2-2))/(2-p)+s+n},$$

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n}\Big|c_i(x,t)\psi_{x_i}(x)\big[\psi(x)\big]^{-1/q'-1/2}\Big|^{2q/(2-q)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \mu_6 R^{(2q(\kappa_3-1))/(2-q)+s+n}, \quad \mu_6 > 0.$$

З умови (C) випливає

$$\mathcal{I}_7 := \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)\Big(|u_{x_i}^{(1)}|^{q-2}u_{x_i}^{(1)} - |u_{x_i}^{(2)}|^{q-2}u_{x_i}^{(2)}\Big)u_{x_i}\psi(x)e^{-\gamma t}\,dxdt \geqslant$$

$$\geqslant c_0 \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{n} \Big(|u_{x_i}^{(1)}|^{q-2}u_{x_i}^{(1)} - |u_{x_i}^{(2)}|^{q-2}u_{x_i}^{(2)}\Big)u_{x_i}[h_R(x)]^s e^{-\gamma t}\,dxdt.$$

На підставі нерівності (9) для всіх ξ, $\eta \in \mathbb{R}$ і $p \in (1,2]$ виконується нерівність

$$\big||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\big|^{p'} \leqslant 2^{2-p}(\xi-\eta)\big(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\big). \tag{10}$$

Враховуючи умови (A), (G), нерівність (10) і оцінки інтегралів $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_7$, із (8) отримуємо нерівність

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg[(a_0 - \delta_0)\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha u|^2 +$$

$$+(a_0 - \delta_1 - \delta_2)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha u|^2 + \Big(a_1 + \frac{\gamma}{2} - \delta_3 - \delta_4\Big)u^2 +$$

$$+(b_0 - \delta_2 2^{2-p} - \delta_3 2^{2-p})\sum_{i=1}^{n}\big(|u_{x_ix_i}^{(1)}|^{p-2}u_{x_ix_i}^{(1)} - |u_{x_ix_i}^{(2)}|^{p-2}u_{x_ix_i}^{(2)}\big)u_{x_ix_i} +$$

$$+(c_0 - \delta_4 2^{2-q})\sum_{i=1}^{n}\big(|u_{x_i}^{(1)}|^{q-2}u_{x_i}^{(1)} - |u_{x_i}^{(2)}|^{q-2}u_{x_i}^{(2)}\big)u_{x_i} + g_0|u|^r\Bigg]\psi(x)e^{-\gamma t}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \mu_1(\delta_0)R^{4\kappa}\int\limits_{Q_T}|u|^2[h_R(x)]^{s-4}e^{-\gamma t}\,dxdt +$$

$$+\mu_2(\delta_1)R^{2\kappa_1}\int\limits_{Q_T}|u|^2[h_R(x)]^{s-2}e^{-\gamma t}\,dxdt +$$

$$+\mu_6(\delta_2,\delta_3,\delta_4)\Big(2R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n} + R^{(2q(\kappa_3-1))/(2-q)+s+n}\Big), \quad \mu_6 > 0. \tag{11}$$

Покладемо в (11) $\gamma = \max\big\{2(1 - a_1 + \delta_3 + \delta_4); 1\big\}$ і, врахувавши оцінку

$$|u|^2 + |u|^r \geqslant |u|^{r_1}, \quad r_1 \in (2, r),$$

з (11) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q_T}|u|^{r_1}\big[h_R(x)\big]^s e^{-\gamma t}\,dxdt \leqslant \mu_7 R^{4\kappa}\int\limits_{Q_T}|u|^2[h_R(x)]^{s-4}e^{-\gamma t}\,dxdt +$$

$$+\mu_8 R^{2\kappa_1}\int\limits_{Q_T}|u|^2\big[h_R(x)\big]^{s-2}e^{-\gamma t}\,dxdt +$$

$$+\mu_9\left(R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n}+R^{(2q(\kappa_3-1))/(2-q)+s+n}\right), \tag{12}$$

μ_7, μ_8, μ_9 — деякі додатні сталі. Оскільки

$$\mu_7 R^{4\kappa}\int\limits_{Q_T}|u|^2[h_R(x)]^{s-4}e^{-\gamma t}\,dxdt+\mu_8 R^{2\kappa_1}\int\limits_{Q_T}|u|^2[h_R(x)]^{s-2}e^{-\gamma t}\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant \delta_5\int\limits_{Q_T}|u|^{r_1}[h_R(x)]^{s}e^{-\gamma t}\,dxdt+$$

$$+\mu_{10}\left(R^{(4\kappa r_1)/(r_1-2)}\int\limits_{Q_T}\big[h_R(x)\big]^{s-4r_1/(r_1-2)}\,dxdt+\right.$$

$$\left.+R^{(2\kappa_1 r_1)/(r_1-2)}\big[h_R(x)\big]^{s-2r_1/(r_1-2)}\,dxdt\right),\quad \delta_5>0,\quad \mu_{10}>0,$$

то з (12) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_T}|u|^{r_1}[h_R(x)]^{s}\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\mu_{11}\left(R^{(4r_1(\kappa-1))/(r_1-2)+s+n}+R^{(2r_1(\kappa_1-1))/(r_1-2)+s+n}\right)+$$

$$+\mu_{12}\left(R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n}+R^{(2q(\kappa_3-1))/(2-q)+s+n}\right),\qquad \mu_{11},\quad \mu_{12}>0. \tag{13}$$

Нехай $R_0>1$ — довільне фіксоване число і $R>R_0$. Оскільки

$$\int\limits_{Q_T}|u|^{r_1}[h_R(x)]^{s}\,dxdt\geqslant(R-R_0)^s\int\limits_{Q_T^{R_0}}|u|^{r_1}\,dxdt,$$

то з (13) випливає нерівність

$$\int\limits_{Q_T^{R_0}}|u|^{r_1}\,dxdt\leqslant\mu_{11}\left(R^{(4r_1(\kappa-1))/(r_1-2)+n}+R^{(2r_1(\kappa_1-1))/(r_1-2)+n}\right)\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s+$$

$$+\mu_{12}\left(R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+n}+R^{(2q(\kappa_3-1))/(2-q)+n}\right)\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s. \tag{14}$$

Зауважимо, що

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s=1,\qquad \lim_{r_1\to+2}\frac{4r_1(1-\kappa)}{r_1-2}=\lim_{r_1\to+2}\frac{2r_1(1-\kappa_1)}{r_1-2}=\infty.$$

Отже, на підставі умов теореми ліву частину нерівності (14) можна зробити як завгодно малою. Враховуючи довільність R_0, отримуємо твердження теореми.

Перейдемо до доведення існування розв'язку нерівності (1). Нехай, крім того,

$$\operatorname{int}\mathcal{K} \neq \varnothing, \qquad \psi\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \quad \forall\, \psi \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad \psi(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Позначимо через $\mathcal{K}_R$ звуження множини $\mathcal{K}$ на область Ω^R. Припустимо, що для кожного $R > 1$ виконується умова

(B_1) існує оператор $\mathcal{B}_R$, який задовольняє умови: $\mathcal{B}_R\colon W(\Omega^R) \to (V_{2,0}(\Omega^R))^\star$ семінеперервний і обмежений;
$\big\langle \mathcal{B}_R(u) - \mathcal{B}_R(v), (u-v)\psi \big\rangle \geqslant 0 \;\forall\, u, v \in V_{2,0}(\Omega^R)\; \forall \psi \in C^2(\mathbb{R}^n),\, \psi(x) \geqslant 0;$
$\mathcal{K}_R = \big\{ u\colon u \in W(\Omega^R),\ \mathcal{B}_R(u) = 0 \big\}.$

Тут і далі $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означає скалярний добуток між просторами $\big(V_{2,0}(\Omega^R)\big)^\star$ і $V_{2,0}(\Omega^R)$.

***Зауваження* 1.** Такі оператори існують (приклади 6.1 і 6.3 [32, с. 400]).

Доведемо допоміжну теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C), (B_1), (G) *і, крім того,* $p,\ q \in (1,2),\ g(x,t,u) = e(x,t)|u|^{r-2}u,\ r > 1,\ e \in L^\infty(Q_T^R);\ e(x,t) \geqslant e_0 \geqslant 0$ *майже для всіх* $(x,t) \in Q_T^R$; $\gamma_0 > \max\{0; 1 - 2a_1\}$; $f_\alpha \in L^2(Q_T^R)$ *при* $|\alpha| \leqslant 2$, $u_0 \in V_{2,0}(\Omega^R)$, $u_0 \in \operatorname{int}\mathcal{K}_R$. *Тоді існує функція*

$$u \in C\big([0,T]; L^2(\Omega^R)\big) \cap L^r(Q_T^R) \cap L^2\big((0,T); V_{2,0}(\Omega^R)\big),$$

$u \in \mathcal{K}_R$ *майже для всіх* $t \in (0,T)$, *яка задовольняє нерівність*

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[w_t (w-u)\psi(x) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u D^\beta((w-u)\psi(x)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n b_i(x,t)|u_{x_i x_i}|^{p-2} u_{x_i x_i}((w-u)\psi(x))_{x_i x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n c_i(x,t)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}((w-u)\psi(x))_{x_i} + e(x,t)|u|^{r-2}u(w-u)\psi(x) -$$

$$- \frac{\gamma}{2}(w-u)^2\psi(x) - \sum_{|\alpha|\leqslant 2} f_\alpha(x,t) D^\alpha((w-u)\psi(x)) \Bigg] e^{-\gamma t}\, dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R} |w-u|^2 \psi(x) e^{-\gamma\tau}\, dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R} |w-u_0|^2\psi(x)\, dx \tag{15}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, *для всіх* $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geqslant 0$, *для деякого* $\gamma \geqslant \gamma_0$ *і всіх функцій* $w \in L^r(Q_T^R) \cap L^2((0,T); V_{2,0}(\Omega^R))$ *таких, що* $w_t \in L^2(Q_T^R)$, $w \in \mathcal{K}_R$ *майже для всіх* $t \in (0,T)$.

Доведення. Використаємо метод Фаедо – Гальоркіна. Нехай $\{\varphi^k\}$ — лінійно незалежна і повна система функцій в $V_{2,0}(\Omega^R) \cap L^r(\Omega^R)$, ортонормована в $L^2(\Omega^R)$. Розглянемо послідовність функцій

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k^N(t)\varphi^k(x), \quad N \in \mathbb{N},$$

де $c_1^N, \ldots, c_N^N$ — розв'язок задачі Коші

$$\langle u_t^N, \varphi^k \rangle + \int\limits_{\Omega^R} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^N D^\beta \varphi^k + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)|u_{x_i x_i}^N|^{p-2} u_{x_i x_i}^N \varphi_{x_i x_i}^k +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)|u_{x_i}^N|^{q-2} u_{x_i}^N \varphi_{x_i}^k + e(x,t)|u^N|^{r-2} u^N \varphi^k - \sum_{|\alpha|\leqslant 2} f_\alpha(x,t) D^\alpha \varphi^k \Bigg] dx +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\langle \mathcal{B}_R(u^N), \varphi^k \rangle = 0, \quad \varepsilon > 0, \tag{16}$$

$$C_k^N(0) = u_{0,k}^N, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{17}$$

причому

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0,k}^N \varphi^k(x), \qquad \lim_{N\to\infty} \|u_0^N - u_0\|_{V_{2,0}(\Omega^R)\cap L^r(\Omega^R)} = 0.$$

На підставі теореми Каратеодорі [33, с. 54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (16), (17), визначений на деякому проміжку $[0, t_0]$, $t_0 \leqslant T$. З оцінок, отриманих нижче, буде випливати, що $t_0 = T$. Домножимо кожну рівність системи (16) відповідно на функцію $c_k^N(t)e^{-\gamma t}$, підсумуємо всі рівняння по k від 1 до N і зінтегруємо по проміжку $[0, \tau]$, $\tau \in (0, T]$. Після виконання цих операцій отримаємо рівність

$$\int\limits_0^\tau \langle u_t^N, u^N \rangle \, dt + \int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^N D^\beta u^N + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)|u_{x_i x_i}^N|^p +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)|u_{x_i}^N|^q + e(x,t)|u^N|^r - \sum_{|\alpha|\leqslant 2} f_\alpha(x,t) D^\alpha u^N \Bigg] e^{-\gamma t} \, dxdt +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \big\langle \mathcal{B}_R(u^N), u^N \big\rangle e^{-\gamma t} \, dt = 0. \tag{18}$$

На підставі умов (A), (B), (C) з (18) легко вивести нерівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau^R} |u^N|^2 e^{-\gamma\tau} \, dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[\Big(a_0 - \delta_6\Big) \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2} |D^\alpha u^N|^2 + b_0 \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i x_i}^N|^p +$$

$$+ c_0 \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^N|^q + e_0|u^N|^r + \Big(a_1 + \frac{\gamma}{2} - \delta_6\Big)|u^N|^2 \Bigg] e^{-\gamma t} \, dxdt +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \mathcal{B}_R(u^N), u^N\rangle e^{-\gamma t}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R} |u^N|^2\,dx + \frac{1}{\delta_6}\int\limits_{Q_T^R}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|f_\alpha(x,t)|^2 e^{-\gamma t}\,dxdt, \quad \delta_6>0. \tag{19}$$

Вибираючи $\delta_6 = \min\big\{1/4; |a_1|/2\big\}$, $\gamma=\gamma_0$, з (19) одержуємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau^R} |u^N|^2 e^{-\gamma_0 t}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\left(\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D^\alpha u^N|^2 + \sum_{i=1}^n |u^N_{x_i xi}|^p + +\sum_{i=1}^n |u^N_{xi}|^q + |u^N|^r\right)e^{-\gamma_0 t}\,dxdt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \mathcal{B}_R(u^N), u^N\rangle e^{-\gamma_0 t}\,dt \leqslant \mu_{13}, \quad \tau\in[0,T], \tag{20}$$

де стала μ_{13} не залежить від N і ε, $\mu_{13}>0$.

З оцінки (20) випливає, що існують підпослідовність $\{u^{N_l}\}$ послідовності $\{u^N\}$, і функції u^ε, χ_i^ε, ξ_i^ε, ζ^ε і z^ε, $i=1,\ldots,n$, такі, що при $l\to\infty$

$u^{N_l}\to u^\varepsilon$ $\star$-слабко в $L^\infty\big((0,T);V_{2,0}(\Omega^R)\big)$,

$u^{N_l}_{x_ix_i}\to u^\varepsilon_{x_ix_i}$ слабко в $L^p(Q_T^R)$, $i=1,\ldots,n$,

$u^{N_l}_{x_i}\to u^\varepsilon_{x_i}$ слабко в $L^q(Q_T^R)$, $i=1,\ldots,n$,

$u^{N_l}\to u^\varepsilon$ слабко в $L^r(Q_T^R)$,

$b_i(\cdot,\cdot)|u^{N_l}_{x_ix_i}|^{p-2}u^{N_l}_{x_ix_i}\to\chi_i^\varepsilon$ слабко в $L^{p'}(Q_T^R)$, $i=1,\ldots,n$,

$c_i(\cdot,\cdot)|u^{N_l}_{x_i}|^{q-2}u^{N_l}_{x_i}\to\xi_i^\varepsilon$ слабко в $L^{q'}(Q_T^R)$, $i=1,\ldots,n$,

$e(\cdot,\cdot)|u^{N_l}|^{r-2}u^{N_l}\to\zeta^\varepsilon$ слабко в $L^{r'}(Q_T^R)$,

$\mathcal{B}_R(u^{N_l})\to z^\varepsilon$ слабко в $L^2((0,T);V^\star_{2,0}(\Omega^R))$.

Нехай k — довільне натуральне число і $N\geqslant k$. Візьмемо довільні кусково-гладкі функції $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_k$. Домножимо перше рівняння системи (16) на функцію $\mu_1(t)$, друге рівняння — на $\mu_2(t)$ і т. д. до k-го рівняння. Підсумуємо одержані рівності та зінтегруємо по t від 0 до τ, $\tau\in(0,T]$. В результаті отримаємо

$$\int\limits_0^\tau \langle u_t^N, v\rangle\,dt + \int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^N D^\beta v+$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)|u^N_{x_ix_i}|^{p-2}u^N_{x_ix_i}v_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^n c_i(x,t)|u^N_{x_i}|^{q-2}u^N_{x_i}v_{x_i}+$$

$$+e(x,t)|u^N|^{r-2}u^N v - \sum_{|\alpha|\leqslant 2} f_\alpha(x,t)D^\alpha v\Bigg]\,dx+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \mathcal{B}_R(u^N), v\rangle\, dt = 0, \tag{21}$$

де $v(x,t) = \sum_{i=1}^k \mu_i(t)\varphi_i(x)$, $x \in \Omega_R$, $t \in (0,\tau)$. Перейдемо в (21) при $N = N_l$ до границі при $l \to \infty$. З урахуванням попередніх зауважень щодо збіжності послідовності $\{u^{N_l}\}$ правильною є рівність

$$\int\limits_0^\tau \langle u_t^\varepsilon, v\rangle\, dt + \int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^\varepsilon D^\beta v + \sum_{i=1}^n \chi_i^\varepsilon v_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^n \xi_i^\varepsilon v_{x_i} +$$

$$+\zeta^\varepsilon v - \sum_{|\alpha|\leqslant 2} f_\alpha(x,t)D^\alpha v\Bigg]\, dx + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle z^\varepsilon, v\rangle\, dt = 0 \tag{22}$$

для будь-яких $v \in L^2\big((0,T); V_{2,0}(\Omega^R)\big) \cap L^r(Q_T^R)$.

Використовуючи, наприклад, доведення теореми 1 [34] (метод монотонності), легко показати, що

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[\sum_{i=1}^n \chi_i^\varepsilon v_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^n \xi_i^\varepsilon v_{x_i} + \zeta^\varepsilon v\Bigg]\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle z^\varepsilon, v\rangle\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[\sum_{i=1}^n b_i(x,t)|u_{x_ix_i}^\varepsilon|^{p-2}u_{x_ix_i}^\varepsilon v_{x_ix_i} + \sum_{i=1}^n c_i(x,t)|u_{x_i}^\varepsilon|^{q-2}u_{x_i}^\varepsilon v_{x_i} +$$

$$+e(x,t)|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon v\Bigg]\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \mathcal{B}_R(u^\varepsilon), v\rangle\, dt \tag{23}$$

для будь-яких $v \in L^2((0,T); V_{2,0}(\Omega^R)) \cap L^r(Q_T^R)$.

Отже, з нерівностей (23) і (22) випливає, що для всіх $\tau \in (0,T]$ і $v \in L^2((0,T), V_{2,0}(\Omega^R)) \cap L^r(Q_T^R)$, правильною є рівність

$$\int\limits_0^\tau \langle u_t^\varepsilon, v\rangle\, dt + \int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^\varepsilon D^\beta v + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)|u_{x_ix_i}^\varepsilon|^{p-2}u_{x_ix_i}^\varepsilon v_{x_ix_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^n c_i(x,t)|u_{x_i}^\varepsilon|^{q-2}u_{x_i}^\varepsilon v_{x_i} + e(x,t)|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon v -$$

$$-\sum_{|\alpha|\leqslant 2} f_\alpha(x,t)D^\alpha v\Bigg]\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \langle \mathcal{B}_R(u^\varepsilon), v\rangle\, dt = 0. \tag{24}$$

Звідси на підставі теореми 1.17 [35] $u^\varepsilon \in C\big([0,T]; L^2(\Omega^R)\big)$ і, використавши доведення теореми 1.1 [35], можна показати, що $u^\varepsilon(\cdot,0) = u_0$.

Очевидно, що для функцій u^ε правильною є оцінка (20). Таким чином, існують послідовність ε_k, $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$, і функції u, χ_i, ξ_i, ζ, $i = 1,\ldots,n$, такі, що

$u^{\varepsilon_k} \to u$ $\star$-слабко в $L^\infty\big((0,T); V_{2,0}(\Omega^R)\big) \cap L^\infty\big((0,T); L^r(\Omega^R)\big)$,
$b_i(\cdot,\cdot)|u^{\varepsilon_k}_{x_ix_i}|^{p-2}u^{\varepsilon_k}_{x_ix_i} \to \chi_i$ слабко в $L^{p'}(Q_T^R)$, $i = 1,\ldots,n$,
$c_i(\cdot,\cdot)|u^{\varepsilon_k}_{x_i}|^{q-2}u^{\varepsilon_k}_{x_i} \to \xi_i$ слабко в $L^{q'}(Q_T^R)$, $i = 1,\ldots,n$,
$e(\cdot,\cdot)|u^{\varepsilon_k}|^{r-2}u^{\varepsilon_k} \to \zeta$ слабко в $L^{r'}(Q_T^R)$,
$\displaystyle\int_0^T \big\langle \mathcal{B}_R(u^{\varepsilon_k}), u^{\varepsilon_k}\big\rangle\, dt \to 0$ при $k \to \infty$.

Використовуючи семінеперервність і монотонність оператора $\mathcal{B}_R$, легко довести, що $\mathcal{B}_R(u) = 0$. Отже, $u \in \mathcal{K}_R$.

Запишемо (24) для $\varepsilon = \varepsilon_k$, $v = -w\psi(x)e^{-\gamma t}$, де $\psi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geqslant 0$, $w \in L^2((0,T); V_2(\Omega^R)) \cap L^r(Q_T^R)$, $w_t \in L^2(Q_T^R)$, $w \in \mathcal{K}_R$ майже для всіх $t \in (0,T)$, $w\psi|_{\Gamma_2^R} = 0$, $\gamma \geqslant \gamma_0$. Запишемо (24) також для $v = u^{\varepsilon_k}\psi(x)e^{-\gamma t}$. Додавши отримані рівності і взявши до уваги умову (B_1), прийдемо до нерівності

$$\int\limits_{Q_T^R}\Bigg[w_t(w-u^{\varepsilon_k})\psi(x) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^{\varepsilon_k} D^\beta((w-u^{\varepsilon_k})\psi(x)) +$$
$$+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)|u^{\varepsilon_k}_{x_ix_i}|^{p-2}u^{\varepsilon_k}_{x_ix_i}((w-u^{\varepsilon_k})\psi(x))_{x_ix_i} +$$
$$+\sum_{i=1}^n c_i(x,t)|u^{\varepsilon_k}_{x_i}|^{q-2}u^{\varepsilon_k}_{x_i}((w-u^{\varepsilon_k})\psi(x))_{x_i} +$$
$$+e(x,t)|u^{\varepsilon_k}|^{r-2}u^{\varepsilon_k}(w-u^{\varepsilon_k})\psi(x) - \frac{\gamma}{2}(w-u^{\varepsilon_k})^2\psi(x) -$$
$$-\sum_{|\alpha|\leqslant 2} f_\alpha(x,t)D^\alpha((w-u^{\varepsilon_k})\psi(x))\Bigg]e^{-\gamma t}\,dxdt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau^R}|u^{\varepsilon_k}-w|^2\psi(x)e^{-\gamma t}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R}|u_0-w|^2\psi(x)\,dx, \quad \tau \in (0,T]. \tag{25}$$

Використавши доведення теореми 6.1 [32], покажемо, що $u^{\varepsilon_k} \to u$ сильно в $L^2\big((0,T); V_{2,0}(\Omega^R)\big) \cap L^r(Q_T^R)$ при $k \to \infty$.

Покладемо в (25) $\psi \equiv 1$. З (25) випливає

$$\varliminf_{k\to\infty}\int\limits_{Q_T^R}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^{\varepsilon_k} D^\beta u^{\varepsilon_k} + \frac{\gamma}{2}(u^{\varepsilon_k})^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)|u^{\varepsilon_k}_{x_ix_i}|^p +$$
$$+\sum_{i=1}^n c_i(x,t)|u^{\varepsilon_k}_{x_i}|^q + e(x,t)|u^{\varepsilon_k}|^r\Bigg]e^{-\gamma t}\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{Q_T^R}\Bigg[w_t(w-u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u D^\beta w +$$

$$+\frac{\gamma}{2}uw+\sum_{i=1}^{n}\chi_i w_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}\xi_i w_{x_i}+\zeta w+\frac{\gamma}{2}w(u-w)-$$

$$-\sum_{|\alpha|\leqslant 2}f_\alpha(x,t)D^\alpha(w-u)\Bigg]e^{-\gamma t}\,dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0^R}|u_0-w|^2\,dx. \tag{26}$$

Нехай w_ρ — розв'язок задачі (6) при $w=u$. Покладемо в (26) $w=w_\rho$ і перейдемо до границі при $\rho\to 0$. Врахувавши лему 1, в результаті отримаємо

$$\varliminf_{k\to\infty}\int\limits_{Q_T^R}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^{\varepsilon_k}D^\beta u^{\varepsilon_k}+\frac{\gamma}{2}(u^{\varepsilon_k})^2+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)|u^{\varepsilon_k}_{x_ix_i}|^p+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)|u^{\varepsilon_k}_{x_i}|^q+e(x,t)|u^{\varepsilon_k}|^r\Bigg]e^{-\gamma t}\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{Q_T^R}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha uD^\beta u+$$

$$+\frac{\gamma}{2}u^2+\sum_{i=1}^{n}\chi_i u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}\xi_i u_{x_i}+\zeta u\Bigg]e^{-\gamma t}\,dxdt. \tag{27}$$

Віднімемо від лівої частини нерівності (27) вираз

$$\varliminf_{k\to\infty}\int\limits_{Q_T^R}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha uD^\beta(u^{\varepsilon_k}-u)+\frac{\gamma}{2}u(u^{\varepsilon_k}-u)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)|u_{x_ix_i}|^{p-2}u_{x_ix_i}(u^{\varepsilon_k}-u)_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}(u^{\varepsilon_k}-u)_{x_i}+$$

$$+e(x,t)|u|^{r-2}u(u^{\varepsilon_k}-u)\Bigg]e^{-\gamma t}\,dxdt=0.$$

Тоді на підставі умов (B), (C) і нерівності (9) виконується нерівність

$$\varliminf_{k\to\infty}\int\limits_{Q_T^R}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha(u^{\varepsilon_k}-u)D^\beta(u^{\varepsilon_k}-u)+\frac{\gamma}{2}(u^{\varepsilon_k}-u)^2+$$

$$+e(x,t)(|u^{\varepsilon_k}|^{r-2}u^{\varepsilon_k}-|u|^{r-2}u)(u^{\varepsilon_k}-u)\Bigg]e^{-\gamma t}\,dxdt\leqslant 0.$$

Звідси з урахуванням умов (A) і (G) випливає, що

$u^{\varepsilon_k}\to u$ сильно в $L^2\big((0,T);V_{2,0}(\Omega^R)\big)\cap L^r(Q_T^R)$ при $k\to\infty$.

Оскільки вкладення

$$L^2\big((0,T);V_{2,0}(\Omega^R)\big)\subset L^p\big((0,T);W_0^{2,p}(\Omega^R)\big)\cap L^q\big((0,T);W_0^{1,q}(\Omega^R)\big)$$

є неперервним, то $u^{\varepsilon_k}_{x_ix_i}\to u_{x_ix_i}$ сильно в $L^p(Q_T^R)$, $u^{\varepsilon_k}_{x_i}\to u_{x_i}$ сильно в $L^q(Q_T^R)$, $i=1,\ldots,n$. Отже, на підставі леми 1.3 [32]

$e(\cdot,\cdot)|u^{\varepsilon_k}|^{r-2}u^{\varepsilon_k}\to e(\cdot,\cdot)|u|^{r-2}u$ слабко в $L^{r'}(Q_T^R)$,

$c_i(\cdot,\cdot)|u^{\varepsilon_k}_{x_i}|^{q-2}u^{\varepsilon_k}_{x_i}\to c_i(\cdot,\cdot)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}$ слабко в $L^{q'}(Q_T^R)$,

$b_i(\cdot,\cdot)|u^{\varepsilon_k}_{x_ix_i}|^{p-2}u^{\varepsilon_k}_{x_ix_i}\to b_i(\cdot,\cdot)|u_{x_ix_i}|^{p-2}u_{x_ix_i}$ слабко в $L^{p'}(Q_T^R)$, $i=1,\ldots,n$,

при $k\to\infty$. Враховуючи наведені вище міркування, з нерівності (25) неважко вивести, що

$u^{\varepsilon_k}\to u$ сильно в $C\big([0,T];L^2(\Omega^R)\big)$ при $k\to\infty$.

Перейшовши в (25) до границі при $k\to\infty$, отримаємо твердження теореми 2.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (A), (B), (C), (B$_1$), (G) *і, крім того,* p, $q\in\big(2n/(n+2),2\big)$, κ, $\kappa_1\in[0,1)$, $\kappa_2\in[0,(p(n+2)-2n)/(2p))$, $\kappa_3\in\big[0,(q(n+2)-2n)/(2q)\big)$, $\gamma_0>\max\{0;1-2a_1\}$, $g(x,t,u)=e(x,t)|u|^{r-2}u$, $r>2$, $e\in L^\infty\big((0,T);L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$; $e(x,t)\geqslant e_0>0$ *майже для всіх* $(x,t)\in Q_T$; $f_\alpha\in L^2\big((0,T);L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big)$ *при* $|\alpha|\leqslant 2$, $u_0\in\operatorname{int}\mathcal{K}$. *Тоді існує розв'язок нерівності* (4).

Доведення. Введемо функції

$$f_\alpha^k(x,t)=\begin{cases} f_\alpha(x,t), & (x,t)\in Q_T^{k+1},\\[2ex] 0, & (x,t)\in Q_T\setminus Q_T^{k+1},\end{cases}\qquad |\alpha|\leqslant 2,\quad k\in\mathbb{N},$$

$u_0^k(x)=u_0(x)\zeta_k(x)$, де $\zeta_k\in C^2(\mathbb{R}^n)$, $0\leqslant\zeta_k(x)\leqslant 1$ в $\mathbb{R}^n$, $\zeta_k(x)\equiv 1$ при $|x|\leqslant k$, $\zeta_k(x)\equiv 0$ при $|x|\geqslant k+1$.

За теоремою 2 існує розв'язок u^k нерівності (15) в області Q_T^{k+1} з функціями f_α^k і u_0^k. Продовжимо u^k нулем в область $Q_T\setminus Q_T^{k+1}$ і збережемо за нею те саме позначення. Кожна з функцій u^k задовольняє нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[v_t(v-u^k)\psi(x)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u^kD^\beta((v-u^k)\psi(x))+$$
$$+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)|u^k_{x_ix_i}|^{p-2}u^k_{x_ix_i}((v-u^k)\psi(x))_{x_ix_i}+$$
$$+\sum_{i=1}^n c_i(x,t)|u^k_{x_i}|^{q-2}u^k_{x_i}((v-u^k)\psi(x))_{x_i}-$$
$$-\frac{\gamma}{2}(v-u^k)^2\psi(x)+e(x,t)|u^k|^{r-2}u^k(v-u^k)\psi(x)-$$
$$-\sum_{|\alpha|\leqslant 2}f_\alpha^k(x,t)D^\alpha((v-u^k)\psi(x))\Bigg]e^{-\gamma t}\,dxdt\geqslant$$
$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}|v-u^k|^2\psi(x)e^{-\gamma\tau}\,dx-\frac12\int\limits_{\Omega_0}|v-u_0^k|^2\psi(x)\tag{28}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, для всіх $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{B}_k$, для деякого $\gamma \geqslant \gamma_0$ і всіх функцій $v \in L^r\big((0,T); L^r_{\rm loc}(\overline{\Omega})\big) \cap L^2\big((0,T); V_{2,\rm loc}(\overline{\Omega})\big)$ таких, що $v_t \in L^2\big((0,T); L^2_{\rm loc}(\overline{\Omega})\big)$, $v \in \mathcal{K}$ майже для всіх $t \in (0,T)$.

Нехай $R > 1$ — довільне фіксоване число, $k > R$. Запишемо нерівність (28) для функції u^m, $m > R$, додамо цю нерівність до (28) і виберемо $\psi(x) = \vartheta_{R,s}(x)$, $v = w_\rho$, де w_ρ — розв'язок задачі (6) при $w = (u^k + u^m)/2$. Як при доведенні теореми 1, отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u^{k,m} D^\beta (u^{k,m}\vartheta_{R,s}(x)) +$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\big(|u^k_{x_ix_i}|^{p-2}u^k_{x_ix_i} - |u^m_{x_ix_i}|^{p-2}u^m_{x_ix_i}\big)(u^{k,m}\vartheta_{R,s}(x))_{x_ix_i} +$$

$$+\sum_{i=1}^n c_i(x,t)\big(|u^k_{x_i}|^{q-2}u^k_{x_i} - |u^m_{x_i}|^{q-2}u^m_{x_i}\big)(u^{k,m}\vartheta_{R,s}(x))_{x_i} +$$

$$+\left(a_{00}(x,t) + \frac{\gamma}{2}\right)(u^{k,m})^2\vartheta_{R,s}(x) +$$

$$+e(x,t)(|u^k|^{r-2}u^k - |u^m|^{r-2}u^m)u^{k,m}\vartheta_{R,s}(x)\Bigg] e^{-\gamma t}\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{k,m}|^2 \vartheta_{R,s}(x) e^{-\gamma\tau}\,dx \leqslant 0 \qquad (29)$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, де $u^{k,m} = u^k - u^m$.

З (29) неважко вивести нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[(a_0 - \delta_7) \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha u^{k,m}|^2 +$$

$$+(a_0 - \delta_8 - \delta_9) \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u^{k,m}|^2 + \left(a_1 + \frac{\gamma}{2} - \delta_{10} - \delta_{11}\right)|u^{k,m}|^2 +$$

$$+(b_0 - \delta_9 2^{2-p} - \delta_{10}2^{2-p}) \sum_{i=1}^n \left(|u^k_{x_ix_i}|^{p-2}u^k_{x_ix_i} - |u^m_{x_ix_i}|^{p-2}u^m_{x_ix_i}\right) u_{x_ix_i} +$$

$$+(c_0 - \delta_{11}2^{2-q}) \sum_{i=1}^n \left(|u^k_{x_i}|^{q-2}u^k_{x_i} - |u^m_{x_i}|^{q-2}u^m_{x_i}\right) u_{x_i} +$$

$$+e_0|u^{k,m}|^r \Bigg] \vartheta_{R,s}(x) e^{-\gamma t}\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |u^{k,m}|^2 \vartheta_{R,s}(x) e^{-\gamma\tau}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \mu_{14}(\delta_7) R^{4\kappa} \int\limits_{Q_T} |u^{k,m}|^2 [h_R(x)]^{s-4} e^{-\gamma t}\,dxdt +$$

$$+\mu_{15}(\delta_8)R^{2\kappa_1}\int\limits_{Q_T}|u^{k,m}|^2[h_R(x)]^{s-2}e^{-\gamma t}\,dxdt+$$

$$+\mu_{16}(\delta_9,\delta_{10},\delta_{11})\Big(2R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n}+R^{(2q(\kappa_3-1))/(2-q)+s+n}\Big), \qquad (30)$$

де $\delta_7,\ldots,\delta_{11}>0$, μ_{14}, μ_{15}, μ_{16} — деякі додатні сталі.

Із (30), як і в доведенні теореми 1, отримаємо оцінку

$$\int\limits_{Q_T}\left[\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D^\alpha u^{k,m}|^2+|u^{k,m}|^r+|u^{k,m}|^{r_1}\right]\vartheta_{R,s}(x)e^{-\gamma_0 t}\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{k,m}|^2\vartheta_{R,s}(x)e^{-\gamma_0\tau}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\mu_{17}\Big(R^{(4r_1(\kappa-1))/(r_1-2)+s+n}+R^{(2r_1(\kappa_1-1))/(r_1-2)+s+n}\Big)+$$

$$+\mu_{18}\Big(R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+s+n}+R^{(2q(\kappa_3-1))/(2-q)+s+n}\Big), \qquad (31)$$

$$\tau\in[0,T],\quad \mu_{17},\ \mu_{18}>0.$$

Нехай $R>R_0>1$. Тоді з (31) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_T^{R_0}}\left[\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|D^\alpha u^{k,m}|^2+|u^{k,m}|^r+|u^{k,m}|^{r_1}\right]dxdt+\int\limits_{\Omega_\tau^{R_0}}|u^{k,m}|^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\mu_{19}e^{\gamma_0 T}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s\Big(R^{(4r_1(\kappa-1))/(r_1-2)+n}+R^{(2r_1(\kappa_1-1))/(r_1-2)+n}+$$

$$+R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+n}+R^{(2q(\kappa_3-1))/(2-q)+n}\Big),\quad \tau\in[0,T],\quad \mu_{19}>0. \qquad (32)$$

Оскільки $\lim\limits_{r_1\to+2}r_1/(r_1-2)=+\infty$, то існує таке $r_2\in(2,r)$, що

$$(4r_2(\kappa-1))/(r_2-2)+n<0,\qquad (2r_2(\kappa_1-1))/(r_2-2)+n<0.$$

Крім того, з умови теореми $\big(2p(\kappa_2-1)\big)/(2-p)+n<0$, $\big(2q(\kappa_3-1)\big)/(2-q)+n<0$. Нехай $\varepsilon>0$ — довільне фіксоване число. Існує таке R_1, $R_1>R_0$, що

$$\mu_{19}e^{\gamma_0 T}\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s\Big(R^{(4r_1(\kappa-1))/(r_1-2)+n}+R^{(2r_1(\kappa_1-1))/(r_1-2)+n}+$$

$$+R^{(2p(\kappa_2-1))/(2-p)+n}+R^{(2q(\kappa_3-1))/(2-q)+n}\Big)<\varepsilon.$$

Отже, з (32) випливає, що послідовність $\{u^k\}$ є фундаментальною у просторі $C\big([0,T];L^2(\Omega^{R_0})\big)\cap L^2\big((0,T);V_2(\Omega^{R_0})\big)\cap L^r(Q_T^{R_0})$. Оскільки R_0 довільне, то

$$u^k \to u \quad \text{сильно в} \quad C\big([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big) \cap L^2\big((0,T); V_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big) \cap$$

$$\cap L^r\big((0,T); L^r_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\big) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Для кожної невід'ємної функції $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ в (28) можна перейти до границі при $k \to \infty$.

Теорему доведено.

1. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity // Appl. Math. and Optim. – 1984. – **12**, № 3. – P. 271 – 282.
2. *Herrero M. A., Pierre M.* The Cauchy problem for $u_t - \triangle u^m = 0$, when $0 < m < 1$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – **291**, № 1. – P. 145 – 158.
3. *Pierre M.* Nonlinear fast diffusion with measures as data. In "Nonlinear parabolic equations: qualitative properties of solutions", ed. by L. Boccardo and A. Tesei // Pitman Res. Notes Math. – 1987. – **149**. – P. 179 – 188.
4. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1989. – **106**, № 3. – P. 217 – 241.
5. *Di Benedetto A., Herrero M. A.* Non-negative solutions of the evolution p-Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$ // Ibid. – 1990. – **111**, № 3. – P. 225 – 290.
6. *McLeod B., Pelitier L. A., Vazquez J. L.* Solutions of nonlinear Ode appearing in the theory of diffusion with absorption // Different. Integr. Equat. – 1991. – **4**, № 1. – P. 1 – 14.
7. *Бокало Н. М.* Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 4. – С. 620 – 627.
8. *Vazquez J. L., Walias M.* Existence and uniqueness of solutions of diffusion-absorption equations with general data // Different. Integr. Equat. – 1994. – **7**, № 1. – P. 15 – 36.
9. *Бокало Н. М.* Краевые задачи для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. – 1996. – **37**, № 5. – С. 977 – 985.
10. *Гладков А. Л.* Об уравнении фильтрации-абсорбции с переменным коэффициентом // Дифференц. уравнения. – 2001. – **37**, № 1. – С. 42 – 47.
11. *Gladkov A., Guedda M.* Diffusion-absorption equation without growth restrictions on the data at infinity // J. Math. Anal. and Appl. – 2002. – **274**, № 1. – P. 16 – 37.
12. *Marchi C., Tesei A.* Higher-order parabolic equations without conditions at infinity // Ibid. – 2002. – **269**, № 1. – P. 352 – 368.
13. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Мат. сб. – 1935. – **42**, № 2. – С. 199 – 216.
14. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, вып. 5. – С. 7 – 72.
15. *Herrero M. A., Velázquez J. L.* On the dynamics of a semilinear heat equation with strong absorption // Communs Part. Different. Equat. – 1989. – **14**, № 12. – P. 1653 – 1715.
16. *Шишков А. Е.* Поведение обобщенных решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 624 – 631.
17. *Акулов В. Ф., Шишков А. Е.* Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 8. – С. 1200 – 1210.
18. *Акулов В. Ф., Шишков А. Е.* Об единственности решений смешанных задач и задачи Коши для параболических уравнений высокого порядка с неограниченными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 2. – С. 149 – 155.
19. *Шишков А. Е.* Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности // Там же. – 1995. – **47**, № 2. – С. 277 – 289.
20. *Fridman A.* Regularity theorems for variational inequalities in unbounded domains and applications to stopping time problems // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1973. – **52**. – P. 134 – 160.
21. *Urbańska K.* Parabolic variational inequality in unbounded domains // Мат. студ. – 2003. – **19**, № 2. – С. 165 – 180.
22. *Доманська Г. П., Колінько М. О., Лавренюк С. П.* Параболічні варіаційні нерівності в необмежених областях зі зростаючими даними // Доп. НАН України. – 2005. – № 6. – С. 28 – 32.

23. *Domanskaya G. P., Kolin'ko M. E., Lavrenyuk S. P.* A parabolic variational inequality in unbounded domains // Different. Equat. – 2006. – **42**, № 1. – P. 68 – 87.
24. *Лавренюк С. П., Медвідь І. М.* Параболічна варіаційна нерівність високого порядку в необмежених областях // Доп. НАН України. – 2006. – № 7. – P. 12 – 18.
25. *Медвідь І. М.* Еліптична варіаційна нерівність в необмежених областях // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 2. – С. 108 – 116.
26. *Пелетье Л. А., Похожаев С. И.* Задача Коши для расширенного уравнения Фишера – Колмогорова // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 3. – С. 351 – 366.
27. *Xu M., Zhou S.* Existence and uniqueness of weak solutions for a generalized thin film equation // Nonlinear Anal. – 2005. – **60**, № 4. – P. 755 – 774.
28. *Таранец Р. М., Шишков А. Е.* Эффект временной задержки распространения носителя в уравнениях тонких пленок // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 935 – 952.
29. *Dal Passo R., Giacomelli L., Shishkov A.* The thin film equation with nonlinear diffusion // Communs Part. Different. Equat. – 2001. – **26**, № 9&10. – P. 1509 – 1557.
30. *King B. B., Stein O., Winkler M.* A fourth-order parabolic equation modeling epitaxial thin film growth // J. Math. Anal. and Appl. – 2003. – **286**, № 2. – P. 459 – 490.
31. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
32. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.
33. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 475 с.
34. *Медвідь І.* Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 149 – 166.
35. *Бокало М. М., Дмитрів В.* Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь в анізотропних просторах // Там же. – 2001. – Вип. 59. – С. 84 – 101.

Одержано 03.05.06,
після доопрацювання — 13.02.07