УДК 517.5

Н. П. Адаменко, И. Г. Величко (Запорож. нац. ун-т)

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОПОЛОГИЙ НА КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ

With the use of digraphs, topologies on finite sets are studied. On this basis, a new classification of such topologies is proposed. Some properties of T_0-topologies on finite sets are proved. In particular, it is proved that, in T_0-topologies, there exist open sets containing arbitrary number of elements that does not exceed the cardinality of the set itself.

З допомогою орграфів вивчаються топології на скінченних множинах. На цій основі запропоновано нову класифікацію таких топологій. Доведено деякі властивості T_0-топологій на скінченних множинах і, зокрема, існування в T_0-топологіях відкритих множин, що містять будь-яку кількість елементів, яка не перевищує потужності самої множини.

Идея использования графов для изучения топологий на конечных множествах применялась неоднократно. В работах [1, 2] решались задачи перечисления всех топологий на конечных множествах с помощью транзитивных графов. В данной работе топологии на конечных множествах исследуются и классифицируются с помощью орграфов особого вида.

Пусть τ_X — топология на конечном множестве X (носителе топологии). Будем говорить, что множество $A \in \tau_X$ является максимальным в X, если A не содержится ни в каком другом множестве из τ_X, кроме самого X. При этом множество X будем называть объемлющим для A.

Предположим, что заданы множества A, X, $A \subset X$, и топология τ_A. Выясним, как можно восстановить все топологии на множестве X такие, что τ_A есть индуцированная ими топология и множество A является максимальным в соответствующей топологии на X (в этом случае топологию τ_A и соответствующие топологии на X будем называть согласованными).

Лемма 1. *Если A максимально в X и $B = X \setminus A$, то для любого открытого множества $V \in \tau_X$ пересечение $V \cap B$ равно или пустому множеству, или самому множеству B.*

Доказательство. Предположим противное: пусть существует множество $V \in \in \tau_X$ такое, что пересечение $V \cap B = C$, где $C \neq \varnothing$, $C \neq B$. Очевидно, что $A \subset A \cup V \subset X$. То, что эти включения строгие, следует из того, что $A \cap B = \varnothing$, $(A \cup V) \cap B = C$, $X \cap B = B$. Значит, в этом случае множество A не является максимальным.

Лемма доказана.

Теорема 1 [о топологиях на объемлющем множестве]. *Пусть X — конечное множество, $A \subset X$, $B = X \setminus A$ и τ_A — топология на A. Предположим, что $L \in \tau_A$, а набор $\sum_L$ состоит из всех элементов топологии τ_A и всевозможных множеств вида $\left\{W_i \cup B \mid L \subset W_i \subset A, W_i \in \tau_A\right\}$. Набор τ_X подмножеств* *множества X является топологией в X, согласованной с τ_A, тогда и только тогда, когда он есть набор $\sum_L$ для некоторого L.*

Доказательство. Покажем, что если τ_X — топология на X, согласованная с τ_A, то существует $L \in \tau_A$ такое, что $\tau_X = \sum_L$. Выберем множество L следующим образом: $L = \Big(\bigcap\limits_{W \in \tau_X, W \supset B} W \Big) \cap A$. Очевидно, что таким образом определенное множество L принадлежит τ_A. Рассмотрим произвольное множество M из τ_X. Если $M \subset A$, то оно является элементом τ_A и, следовательно, $M \in \sum_L$. Если $M \not\subset A$, то по лемме оно обязательно содержит в себе множество B. Поскольку множество $M \setminus B = M \cap A$ открыто в τ_A и содержит в себе L, то и в этом случае $M \in \sum_L$. Значит, $\tau_X \subset \sum_L$.

Покажем, что для выбранного L имеет место включение $\sum_L \subset \tau_X$. Пусть множество $M \in \sum_L$. Если $M \in \tau_A$, то $M \in \tau_X$. Если же $M \notin \tau_A$, то по определению набора $\sum_L$ получим $M = W \cup B$, где $L \subset W \subset A$ и $W \in \tau_A$. Так как $L \subset W$, то и в этом случае $M = W \cup B = (W \cup L) \cup B = W \cup (L \cup B) = W \cup \Big(\bigcap\limits_{U \in \tau_X, U \supset B} U \Big)$ принадлежит τ_X. Таким образом, топология τ_X совпадает с набором $\sum_L$ для некоторого L.

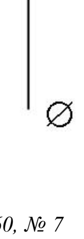
Легко проверяется, что для любого $L \in \tau_A$ набор $\sum_L$ есть топология на X, согласованная с топологией τ_A.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Если задана топология на множестве A, то любая топология на объемлющем множестве X (согласованная с топологией на A) получается следующим образом: выбираем любое открытое множество $L \in \tau_A$, каждый элемент из τ_A, содержащий в себе L, объединяем с $B = X \setminus A$ и к полученной системе множеств добавляем все элементы τ_A. Этот набор является топологией на множестве X.*

Каждой топологии на конечном множестве будем ставить в соответствие ориентированный конечный граф (колчан) Q [3]. При этом вершинам колчана соответствуют открытые в заданной топологии τ_X множества. Из вершины v_i в вершину v_j ведет стрелка, если множество, соответствующее вершине v_i, вложено во множество, соответствующее вершине v_j, и между ними нет промежуточных открытых множеств. Колчан, который соответствует некоторой топологии на конечном множестве X, будем называть T-колчаном. При этом пустое множество и X соответствуют вершинам T-колчана, которые являются истоком и стоком соответственно.

Перейдем к выяснению того, когда произвольный колчан будет T-колчаном. Из теоремы 1 следует такое утверждение.



Теорема 2. 1. *Колчан, изображенный на рисунке, является T-колчаном.*

2. *Пусть есть T-колчан на множестве A и $B \cap A = \varnothing$. Из любой вершины L колчана Q_A достраивается стрелка в новую вершину, соответствующую $L \cup B$. Из этой новой вершины достраивается подграф, изоморфный подграфу T-колчана Q_A с истоком в вершине L. Все соответствующие вершины обоих подграфов соединяются стрелками. Этот колчан будет изображать топологию на множестве $X = A \cup B$, согласованную с топологией на множестве A, т. е. будет T-колчаном.*

Покажем, что способом, описанным в данной теореме, можно получить все T-колчаны топологий на произвольном конечном множестве.

Напомним, что топология называется T_0-топологией, если для любых двух ее различных точек хотя бы одна имеет окрестность, не содержащую другую точку.

Лемма 2. *Если топология τ является T_0-топологией на n-элементном множестве X, то существует хотя бы одно $(n-1)$-элементное открытое множество в τ.*

Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что не существует $(n-1)$-элементного открытого множества и максимальное по мощности открытое множество $V \in \tau$ состоит из $n-k$, $2 \leq k < n$, элементов. Рассмотрим произвольные точки x_1 и x_2 из $X \setminus V$. Поскольку τ является T_0-топологией, хотя бы одна из этих точек имеет окрестность, не содержащую другую точку. Пусть, для определенности, U_{x_1} — окрестность точки x_1, не содержащая x_2. Тогда множество $W = V \cup U_{x_1}$ является открытым в τ и его мощность больше чем $n-k$, а это противоречит максимальности V. Таким образом, $k = 1$.

Лемма доказана.

Теорема 3. *Все T-колчаны T_0-топологий могут быть получены описанным в теореме 2 способом.*

Доказательство. Пусть τ_{A_n} является T_0-топологией на n-элементном множестве A_n. Выберем $(n-1)$-элементное открытое множество A_{n-1} (оно существует по лемме 2) и рассмотрим на нем индуцированную топологию $\tau_{A_{n-1}}$. В силу согласованности топологий T-колчан, соответствующий топологии τ_{A_n}, получается из T-колчана, соответствующего топологии $\tau_{A_{n-1}}$, описанным в п. 2 теоремы 2 способом. Далее в $\tau_{A_{n-1}}$ выберем $(n-2)$-элементное открытое множество A_{n-2} и рассмотрим на нем индуцированную топологию $\tau_{A_{n-2}}$. T-колчан, соответствующий $\tau_{A_{n-1}}$, получается описанным в п. 2 теоремы 2 способом из T-колчана, соответствующего $\tau_{A_{n-2}}$. Процедуру повторяем до тех пор, пока не придем к топологии τ_{A_1} на одноэлементном множестве, T-колчан которой изображен на рисунке. Таким образом, искомый T-колчан топологии τ_{A_n} образуется из T-колчана, изображенного на рисунке, применением $n-1$ раз п. 2 теоремы 2. В силу произвольности n получаем утверждение теоремы.

Следствие 2. *T-колчаны всех топологий на конечном множестве можно получить описанным в теореме 2 способом.*

Доказательство. Пусть τ — топология на n-элементном множестве X, не являющаяся T_0-топологией. Тогда существуют точки a и b, неотделимые в смысле аксиомы T_0. Переобозначим во множестве X и элементах из τ подмножество $\{a, b\}$ через c. Указанную процедуру повторяем до тех пор, пока не придем к

T_0-топологии. На каждом из шагов (а их конечное число) получаем T-колчан, изоморфный T-колчану исходной топологии.

Следствие доказано.

Отнесем к одному классу топологии, которые имеют изоморфные T-колчаны. Поскольку изоморфизм орграфов есть отношение эквивалентности, получаем классификацию топологий на конечных множествах.

Рассмотрим T-колчан T_0-топологий. По теореме 3 T-колчан T_0-топологии на n-элементном множестве может быть построен из T-колчана, изображенного на рисунке, применением $n-1$ раз п. 2 теоремы 2. Так как каждый раз при применении п. 2 теоремы 2 мощность носителя топологии увеличивается на единицу, построенный T-колчан будет соответствовать топологии на n-элементном множестве. Рассмотрим произвольный маршрут из истока в сток. Множества, соответствующие вершинам этого маршрута, строго упорядочены по включению. Значит, их мощности образуют монотонно возрастающую последовательность целых чисел $a_0 = 0, a_1, \ldots, a_n = n$. Отсюда получаем $a_k = k$.

С другой стороны, любой маршрут из истока в фиксированную вершину в T-колчане T_0-топологии соответствует линейно упорядоченному набору элементов из этой топологии, или, в терминах частично упорядоченных множеств, любой маршрут из истока в фиксированную вершину в T-колчане T_0-топологии соответствует некоторой цепи. Одной из важных числовых характеристик цепи является ее длина l, равная $|n|$, где $|n|$ — мощность носителя линейно упорядоченного множества [3]. Итак, имеет место следующий факт: в T-колчане T_0-топологии длины всех маршрутов из истока в некоторую фиксированную вершину одинаковы. А так как T-колчан произвольной топологии является T-колчаном некоторой T_0-топологии, этот факт справедлив и для T-колчана произвольной топологии.

Будем говорить, что вершина T-колчана является вершиной k-го уровня, если маршруты из истока к ней имеет длину k. Вершина, соответствующая пустому множеству, будет вершиной нулевого уровня.

Приведенные выше рассуждения можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 4. *На k-м уровне произвольного T-колчана T_0-топологии находятся вершины, соответствующие k-элементным открытым множествам.*

В заключение докажем несколько свойств T_0-топологий с использованием T-колчанов.

***Следствие* 3.** *Если τ — T_0-топология на n-элементном множестве, то для любого k, $0 \le k \le n$, в ней существует k-элементное множество.*

Доказательство. Построим T-колчан, соответствующий данной T_0-топологии. Он будет n-уровневым. Вершины k-го уровня соответствуют k-элементным открытым множествам.

***Следствие* 4.** *Для любого нетривиального открытого k-элементного множества в n-элементном топологическом T_0-пространстве существуют содержащее его $(k+1)$-элементное открытое множество и содержащееся в нем $(k-1)$-элементное открытое множество.*

Доказательство. Построим T-колчан, соответствующий T_0-топологии. Заданному k-элементному открытому множеству, согласно теореме 4, соответствует вершина k-го уровня. Стрелка с началом в данной вершине ведет в вершину $(k+1)$-

го уровня. Эта вершина соответствует $(k+1)$-элементному открытому множеству, содержащему данное. Вторая часть следствия доказывается аналогично.

***Следствие* 5** (критерий T_0-пространства). *Топология на n-элементном множестве является T_0-топологией тогда и только тогда, когда ей соответствует n-уровневый T-колчан.*

Доказательство. Если топология является T_0-топологией, то, согласно теореме 4, ей соответствует n-уровневый T-колчан. Если топология не является T_0-топологией, то, используя метод доказательства следствия 2, получаем, что ее T-колчан изоморфен T-колчану T_0-топологии на k-элементном множестве, где $k < n$.

1. *Evans J. W., Harary F., Lynn M. S.* On the computer enumeration of finite topologies // Communs ASM. – 1967. – **10**. – P. 295 – 298.
2. *Козырев В. П.* Перечисление транзитивных ориентированных графов и вложение транзитивных графов // Вопросы кибернетики. – 1975. – Вып. 15. – С. 44 – 60.
3. *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики: Уч. пос. для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 18 с.

Получено 15.10.07