УДК 517.518.45

**Т. О. Кононович** (Полтав. пед. ун-т)

# ОЦІНКА ЗНИЗУ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ПЕРІОДИЧНОЇ СУМОВНОЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ ТА СПРЯЖЕНИХ ДО НЕЇ ФУНКЦІЙ ЧЕРЕЗ КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є

In terms of the Fourier coefficients, we establish lower bounds for the sum of norms and the sum of the best approximations by trigonometric polynomials of functions from the space $L(Q^2)$ and functions conjugate in each variable and both variables provided that the functions are summable.

Установлены выраженные через коэффициенты Фурье оценки снизу суммы норм и суммы наилучших приближений тригонометрическими полиномами функций пространства $L(Q^2)$ и сопряженных по каждой и обеим переменным функций при условии их суммируемости.

Нехай $L(Q^m)$, $m = 1, 2, \ldots,$ — простір $2\pi$-періодичних за кожною змінною сумовних на $Q^m = [-\pi; \pi]^m$ функцій $m$ змінних із нормою

$$\|f(\mathbf{x})\|_{L(Q^m)} = \int\limits_{Q^m} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x},$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $d\mathbf{x} = dx_1 \ldots dx_m$.

Для функцій простору $L(Q)$ відомо ряд виражених через коефіцієнти Фур'є оцінок знизу величини найкращого наближення

$$E_n(f) = \inf_{t_n \in T_n} \left\| f(x) - t_n(x) \right\|_{L(Q)},$$

де $T_n$ — множина тригонометричних поліномів степеня не вище $n$.

Так, А. А. Конюшков [1] (теорема 3) довів, що для функції $g \in L(Q)$ з рядом Фур'є $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, коефіцієнти якого є невід'ємними, справджується оцінка

$$E_n(g) \geq Cn \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{b_k}{k^2}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Твердження має місце і для функцій простору $L(Q)$, ряд Фур'є яких містить лише косинуси (див. там же). Тут і далі символом $C$ позначено додатні, можливо неоднакові в різних формулах, сталі, які залежать лише від розмірності простору.

Результат А. А. Конюшкова покращив В. Е. Гейт [2] (лема 2), який для довільної $2\pi$-періодичної сумовної функції $f(x)$, що має ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

одержав нерівність

$$E_n(f) \geq \frac{1}{C}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{b_k}{k}\right|, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

де

$$C = \sup_n \sup_x \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\right| < \infty.$$

При розгляді функцій $f \in L(Q)$, для яких спряжена

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(f(x+t) - f(x-t)\Big)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\pi}\Big(f(x+t) - f(x-t)\Big)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt$$

також є сумовною, в [3] встановлено оцінку знизу комбінації найкращих наближень функції $f$ та спряженої до неї $\overline{f}$.

Якщо $f \in L(Q)$, $\overline{f} \in L(Q)$, то

$$E_n(f) + E_n(\overline{f}) \geq$$

$$\geq C\left(\max\left(|a_{n+1}|, |b_{n+1}|\right) + \frac{1}{[n/2]}\sum_{k=n+1}^{n+[\frac{n}{2}]}\frac{|a_k| + |b_k|}{k+1} + \sum_{k=n+[\frac{n}{2}]+1}^{\infty}\frac{|a_k| + |b_k|}{k+1}\right),$$

де $n = 0, 1, \ldots,$ $a_k$, $b_k$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$.

На підмножині тих функцій простору $L(Q)$, для яких спряжена також є сумовною, одержана в [3] оцінка точніша за результат В. Е. Гейта, оскільки містить модулі коефіцієнтів Фур'є під знаками суми.

Метою даної роботи є отримання аналогічного результату для функцій простору $L(Q^2)$.

Позначимо через $T_{n_1 n_2}$, $n_1$, $n_2 = 0, 1, \ldots,$ множину тригонометричних поліномів вигляду

$$t_{n_1 n_2}(x_1, x_2) =$$

$$= \sum_{l_1=0}^{n_1}\sum_{l_2=0}^{n_2} 2^{-\gamma(l_1,l_2)}\Big(A_{l_1 l_2}\cos l_1 x_1 \cos l_2 x_2 + B_{l_1 l_2}\cos l_1 x_1 \sin l_2 x_2 +$$

$$+ C_{l_1 l_2}\sin l_1 x_1 \cos l_2 x_2 + D_{l_1 l_2}\sin l_1 x_1 \sin l_2 x_2\Big).$$

Тут і далі $\gamma(l_1, l_2)$ — кількість рівних нулю координат вектора $(l_1, l_2)$, $A_{l_1 l_2}$, $B_{l_1 l_2}$, $C_{l_1 l_2}$, $D_{l_1 l_2}$ — довільні дійсні числа.

Через $E_{n_1 n_2}(f)$, $n_1$, $n_2 = 0, 1, \ldots,$ позначимо величину найкращого наближення функції $f \in L(Q^2)$ тригонометричними поліномами $t_{n_1 n_2} \in T_{n_1 n_2}$:

$$E_{n_1n_2}(f) = \inf_{t_{n_1n_2}\in T_{n_1n_2}} \big\|f(x_1,x_2) - t_{n_1n_2}(x_1,x_2)\big\|_{L(Q^2)}.$$

Спряженими до $f \in L(Q^2)$ за першою змінною, другою та сукупністю змінних називатимемо функції, які визначаються відповідно рівностями [4, с. 123]

$$\overline{f}_1(x_1,x_2) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_1+t_1,x_2)\operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}\,dt_1 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\Big(f(x_1+t_1,x_2) - f(x_1-t_1,x_2)\Big)\operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}\,dt_1,$$

$$\overline{f}_2(x_1,x_2) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_1,x_2+t_2)\operatorname{ctg}\frac{t_2}{2}\,dt_2 =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\Big(f(x_1,x_2+t_2) - f(x_1,x_2-t_2)\Big)\operatorname{ctg}\frac{t_2}{2}\,dt_2,$$

$$\overline{f}_3(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2)\operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t_2}{2}\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon,\eta\to 0^+}\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\int\limits_{\eta}^{\pi}\Bigg(\big(f(x_1+t_1,x_2+t_2) - f(x_1-t_1,x_2+t_2)\big)\operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t_2}{2} -$$

$$-\big(f(x_1+t_1,x_2-t_2) - f(x_1-t_1,x_2-t_2)\big)\operatorname{ctg}\frac{t_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t_2}{2}\Bigg)\,dt_1\,dt_2.$$

Через $z_j$, $j = 1,2$, позначимо комплексні числа, а через $H_1^2$ клас регулярних у $\Delta^2 = \big\{(z_1,z_2)\colon |z_j| < 1,\, j = 1,2\big\}$ функцій $F(z_1,z_2)$ таких, що

$$\sup_{0\le r_j<1, j=1,2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|F(r_1e^{it_1}, r_2e^{it_2})\big|\,dt_1\,dt_2 < \infty.$$

Покладемо $N_0 = N \cup \{0\}$, $Z_+^2 = N_0 \times N_0$. Нехай також

$$Q_{m_1m_2} = \Big\{(l_1,l_2) \in Z_+^2\colon (l_1 \le m_1) \wedge (l_2 \le m_2)\Big\}, \quad m_1,\ m_2 \in N_0.$$

Позначимо через $A_{k_1k_2}^{m_1m_2}$, $k_1$, $k_2$, $m_1$, $m_2 \in N_0$, середнє арифметичне

$$A_{k_1k_2}^{m_1m_2} = \frac{1}{(m_1-k_1+1)(m_2-k_2+1)}\times$$

$$\times\sum_{l_1=k_1}^{m_1}\sum_{l_2=k_2}^{m_2} 2^{-\gamma(l_1,l_2)}\frac{|a_{l_1l_2}| + |b_{l_1l_2}| + |c_{l_1l_2}| + |d_{l_1l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)},$$

де $a_{l_1 l_2}$, $b_{l_1 l_2}$, $c_{l_1 l_2}$, $d_{l_1 l_2}$ — коефіцієнти Фур'є функції $f \in L(Q^2)$. Зокрема, при $k_1 = m_1$, $k_2 \neq m_2$

$$A_{k_1 k_2}^{k_1 m_2} = A_{k_1 k_2}^{m_2} = \frac{1}{(m_2 - k_2 + 1)} \times$$

$$\times \sum_{l_2 = k_2}^{m_2} 2^{-\gamma(k_1, l_2)} \frac{|a_{k_1 l_2}| + |b_{k_1 l_2}| + |c_{k_1 l_2}| + |d_{k_1 l_2}|}{(k_1 + 1)(l_2 + 1)}.$$

Аналогічно при $k_1 \neq m_1$, $k_2 = m_2$. При $k_1 = m_1$, $k_2 = m_2$

$$A_{k_1 k_2}^{k_1 k_2} = A_{k_1 k_2} = 2^{-\gamma(k_1, k_2)} \frac{|a_{k_1 k_2}| + |b_{k_1 k_2}| + |c_{k_1 k_2}| + |d_{k_1 k_2}|}{(k_1 + 1)(k_2 + 1)}.$$

Вважатимемо рівними нулю суми, у яких нижня межа більша за верхню.

Основним результатом роботи є така теорема.

**Теорема.** *Якщо* $f \in L(Q^2)$, $\overline{f}_j \in L(Q^2)$, $j = \overline{1, 3}$, *то*

$$E_{n_1 n_2}(f) + \sum_{j=1}^{3} E_{n_1 n_2}(\overline{f}_j) \geq$$

$$\geq C \Bigg( \max_{(k_1, k_2) \in Q_{n_1 + 1 n_2 + 1} \setminus Q_{n_1 n_2}} \Big( |a_{k_1 k_2}| + |b_{k_1 k_2}| + |c_{k_1 k_2}| + |d_{k_1 k_2}| \Big) +$$

$$+ \sum_{k_1 = 0}^{n_1} A_{k_1 n_2 + 1}^{2 n_2} + \sum_{k_2 = 0}^{n_2} A_{n_1 + 1 k_2}^{2 n_1} + A_{n_1 + 1 n_2 + 1}^{2 n_1 2 n_2} + \sum_{(k_1, k_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{2 n_1 2 n_2}} A_{k_1 k_2} \Bigg), \tag{1}$$

*де* $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots, a_{k_1 k_2}, b_{k_1 k_2}, c_{k_1 k_2}, d_{k_1 k_2}$ — *коефіцієнти Фур'є функції* $f(x_1, x_2)$.

Доведення теореми ґрунтується на такому результаті.

**Лема.** *Якщо* $f \in L(Q^2)$, $\overline{f}_j \in L(Q^2)$, $j = \overline{1, 3}$, *то*

$$\|f\|_{L(Q^2)} + \sum_{j=1}^{3} \|\overline{f}_j\|_{L(Q^2)} \geq \sum_{k_1 = 0}^{\infty} \sum_{k_2 = 0}^{\infty} A_{k_1 k_2}. \tag{2}$$

***Доведення леми.*** Якщо $f \in L(Q^2)$, $\overline{f}_j \in L(Q^2)$, $j = \overline{1, 3}$, то, як встановлено у роботі [5] (лема 1), функція

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k_1 = 0}^{\infty} \sum_{k_2 = 0}^{\infty} 2^{-\gamma(k_1, k_2)} \big( a_{k_1 k_2} - d_{k_1 k_2} - i(b_{k_1 k_2} + c_{k_1 k_2}) \big) z_1^{k_1} z_2^{k_2},$$

де $a_{k_1 k_2}$, $b_{k_1 k_2}$, $c_{k_1 k_2}$, $d_{k_1 k_2}$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x_1, x_2)$, належить класу $H_1^2$. Тому майже скрізь на $\Gamma^2 = \big\{ (z_1, z_2) \colon |z_j| = 1,\ j = 1, 2 \big\}$ існує $F(e^{it_1}, e^{it_2})$ як границя $F(r_1 e^{it_1}, r_2 e^{it_2})$ за недотичними напрямками [6, с. 476]. За теоремою Фату [7, с. 204], застосованою до інтеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|F(r_1e^{it_1}, r_2e^{it_2})\big|\, dt_1\, dt_2$$

при $r_j \to 1$, $j = 1, 2$, для якого, як показано у [5] при доведенні леми 1, має місце нерівність

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|F(r_1e^{it_1}, r_2e^{it_2})\big|\, dt_1\, dt_2 \le \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|G(x_1, x_2)\big|\, dx_1\, dx_2,$$

де

$$G(x_1, x_2) := f(x_1, x_2) - \overline{f}_3(x_1, x_2) + i\Big(\overline{f}_1(x_1, x_2) + \overline{f}_2(x_1, x_2)\Big),$$

одержуємо, що $F(e^{it_1}, e^{it_2})$ є сумовною на $Q^2$ і

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|F(e^{it_1}, e^{it_2})\big|\, dt_1\, dt_2 \le \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|G(x_1, x_2)\big|\, dx_1\, dx_2. \tag{3}$$

Будь-яку функцію $f \in L(Q^2)$ можна подати у вигляді суми

$$f(x_1, x_2) = f^{00}(x_1, x_2) + f^{01}(x_1, x_2) + f^{10}(x_1, x_2) + f^{11}(x_1, x_2),$$

де $f^{00}(x_1, x_2)$ — парна по кожній змінній функція і

$$f^{00}(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\Big(f(x_1, x_2) + f(-x_1, x_2) + f(x_1, -x_2) + f(-x_1, -x_2)\Big),$$

$f^{01}(x_1, x_2)$ — парна по $x_1$ та непарна по $x_2$ функція і

$$f^{01}(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\Big(f(x_1, x_2) + f(-x_1, x_2) - f(x_1, -x_2) - f(-x_1, -x_2)\Big),$$

$f^{10}(x_1, x_2)$ — непарна по $x_1$ та парна по $x_2$ функція і

$$f^{10}(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\Big(f(x_1, x_2) - f(-x_1, x_2) + f(x_1, -x_2) - f(-x_1, -x_2)\Big),$$

$f^{11}(x_1, x_2)$ — непарна по кожній змінній функція і

$$f^{11}(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\Big(f(x_1, x_2) - f(-x_1, x_2) - f(x_1, -x_2) + f(-x_1, -x_2)\Big).$$

При будь-яких $i$, $j \in \{0, 1\}$ справджується нерівність

$$\|f\|_{L(Q^2)} \ge \|f^{ij}\|_{L(Q^2)}. \tag{4}$$

Наприклад,

$$\|f(x_1, x_2)\|_{L(Q^2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\|f(x_1, x_2)\|_{L(Q^2)} + \|-f(-x_1, x_2)\|_{L(Q^2)} +$$

$$+\|-f(x_1,-x_2)\|_{L(Q^2)}+\|f(-x_1,-x_2)\|_{L(Q^2)}\Big)\geq$$

$$\geq\frac{1}{4}\Big\|f(x_1,x_2)-f(-x_1,x_2)-f(x_1,-x_2)+f(-x_1,-x_2)\Big\|_{L(Q^2)}=$$

$$=\big\|f^{11}(x_1,x_2)\big\|_{L(Q^2)}.$$

Отже, $\|f\|_{L(Q^2)}\geq\|f^{11}\|_{L(Q^2)}$. Для інших значень $i,\ j\in\{0,1\}$ нерівність (4) доводиться аналогічно.

Враховуючи визначення $f^{11}(x_1,x_2)$ і сумовність на $Q^2$ функції $f(x_1,x_2)$, маємо $f^{11}\in L(Q^2)$. Оскільки

$$\overline{f_1^{11}}(x_1,x_2)=\frac{1}{4}\Big(\overline{f(x_1,x_2)_1}-\overline{f(-x_1,x_2)_1}-\overline{f(x_1,-x_2)_1}+\overline{f(-x_1,-x_2)_1}\Big)=$$

$$=\frac{1}{4}\Big(\overline{f}_1(x_1,x_2)+\overline{f}_1(-x_1,x_2)-\overline{f}_1(x_1,-x_2)-\overline{f}_1(-x_1,-x_2)\Big)$$

і $\overline{f}_1\in L(Q^2)$, то $\overline{f_1^{11}}\in L(Q^2)$. Аналогічно доводиться, що $\overline{f_j^{11}}\in L(Q^2)$, $j=2,3$. Тому функція

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{-\gamma(k_1,k_2)}(-d_{k_1k_2})z_1^{k_1}z_2^{k_2}$$

належить класу $H_1^2$ [5] (лема 1) (інші коефіцієнти Фур'є функції $f^{11}(x_1,x_2)$ дорівнюють нулю).

Якщо функція $\Phi(z_1,z_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\beta_{k_1k_2}z_1^{k_1}z_2^{k_2}$ належить класу $H_1^2$, то [8, с. 64], [9] (лема 2)

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{|\beta_{k_1k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)}\leq\frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|\Phi(e^{it_1},e^{it_2})\big|\,dt_1\,dt_2<\infty. \tag{5}$$

Тому, враховуючи, що

$$\|f^{11}\|_{L(Q^2)}+\sum_{j=1}^{3}\|\overline{f_j^{11}}\|_{L(Q^2)}\geq$$

$$\geq\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|f^{11}(x_1,x_2)-\overline{f_3^{11}}(x_1,x_2)+i\Big(\overline{f_1^{11}}(x_1,x_2)+\overline{f_2^{11}}(x_1,x_2)\Big)\Big|\,dx_1\,dx_2,$$

а також визначення $G(x_1,x_2)$, нерівності (3) та (5), одержуємо

$$\|f^{11}\|_{L(Q^2)}+\sum_{j=1}^{3}\|\overline{f_j^{11}}\|_{L(Q^2)}\geq 4\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{-\gamma(k_1,k_2)}\frac{|d_{k_1k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)}.$$

Аналогічно

$$\|f^{00}\|_{L(Q^2)}+\sum_{j=1}^{3}\|\overline{f_j^{00}}\|_{L(Q^2)}\geq 4\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}2^{-\gamma(k_1,k_2)}\frac{|a_{k_1k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)},$$

$$\|f^{01}\|_{L(Q^2)} + \sum_{j=1}^{3} \|\overline{f_j^{01}}\|_{L(Q^2)} \geq 4 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma(k_1,k_2)} \frac{|b_{k_1k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)},$$

$$\|f^{10}\|_{L(Q^2)} + \sum_{j=1}^{3} \|\overline{f_j^{10}}\|_{L(Q^2)} \geq 4 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma(k_1,k_2)} \frac{|c_{k_1k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)}.$$

Враховуючи, що $\overline{f_1^{00}} = (\overline{f}_1)^{10}$ (тут і далі аналогічно символом $(\overline{f}_1)^{10}$ позначено непарну по $x_1$ і парну по $x_2$ частину функції $\overline{f}_1$), $\overline{f_1^{01}} = (\overline{f}_1)^{11}$, $\overline{f_1^{10}} = (\overline{f}_1)^{00}$, $\overline{f_1^{11}} = (\overline{f}_1)^{01}$ та аналогічні співвідношення для функцій, спряжених по другій і обох змінних, підсумовуючи чотири останні нерівності, одержуємо

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\Big(\|f^{ij}\|_{L(Q^2)} + \|(\overline{f}_1)^{ij}\|_{L(Q^2)} + \|(\overline{f}_2)^{ij}\|_{L(Q^2)} + \|(\overline{f}_3)^{ij}\|_{L(Q^2)}\Big) \geq$$

$$\geq 4 \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma(k_1,k_2)} \frac{|a_{k_1k_2}| + |b_{k_1k_2}| + |c_{k_1k_2}| + |d_{k_1k_2}|}{(k_1+1)(k_2+1)},$$

звідки з урахуванням (4) отримуємо (2), що і доводить лему.

***Доведення теореми.*** Нехай $V_{n_1n_2}^{2n_12n_2}(f; x_1, x_2)$ — сума Валле Пуссена вигляду

$$V_{n_1n_2}^{2n_12n_2}(f; x_1, x_2) = \sum_{l_1=0}^{2n_1}\sum_{l_2=0}^{2n_2} 2^{-\gamma(l_1,l_2)} \lambda_{l_1l_2}^{(2n_12n_2)} \Big(a_{l_1l_2}\cos l_1x_1 \cos l_2x_2 +$$

$$+ b_{l_1l_2}\cos l_1x_1 \sin l_2x_2 + c_{l_1l_2}\sin l_1x_1 \cos l_2x_2 + d_{l_1l_2}\sin l_1x_1 \sin l_2x_2\Big),$$

де

$$\lambda_{l_1l_2}^{(2n_12n_2)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad 0 \leq l_1 \leq n_1,\ 0 \leq l_2 \leq n_2, \\ 1 - L_2, & \text{якщо} \quad 0 \leq l_1 \leq n_1,\ n_2+1 \leq l_2 \leq 2n_2, \\ 1 - L_1, & \text{якщо} \quad n_1+1 \leq l_1 \leq 2n_1,\ 0 \leq l_2 \leq n_2, \\ (1-L_1)(1-L_2), & \text{якщо} \quad n_1+1 \leq l_1 \leq 2n_1,\ n_2+1 \leq l_2 \leq 2n_2, \end{cases}$$

$L_j := \dfrac{l_j - n_j}{n_j + 1}$, $j = 1, 2$. Тоді

$$E_{n_1n_2}(f) \geq C\|f(x_1,x_2) - V_{n_1n_2}^{2n_12n_2}(f; x_1, x_2)\|_{L(Q^2)},$$

$$E_{n_1n_2}(\overline{f}_j) \geq C\|\overline{f}_j(x_1,x_2) - V_{n_1n_2}^{2n_12n_2}(\overline{f}_j; x_1, x_2)\|_{L(Q^2)} =$$

$$= C\Big\|\overline{\Big(f(x_1,x_2) - V_{n_1n_2}^{2n_12n_2}(f; x_1, x_2)\Big)}_j\Big\|_{L(Q^2)}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Додаючи нерівності почленно та враховуючи оцінку (2), одержуємо

$$E_{n_1 n_2}(f) + \sum_{j=1}^{3} E_{n_1 n_2}(\overline{f}_j) \geq C \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma(l_1,l_2)} \frac{|\alpha_{l_1 l_2}| + |\beta_{l_1 l_2}| + |\gamma_{l_1 l_2}| + |\delta_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}, \tag{6}$$

де $\alpha_{l_1 l_2}$, $\beta_{l_1 l_2}$, $\gamma_{l_1 l_2}$, $\delta_{l_1 l_2}$ — коефіцієнти Фур'є функції

$$f(x_1, x_2) - V_{n_1 n_2}^{2n_1 2n_2}(f; x_1, x_2).$$

Враховуючи, що

$$\alpha_{l_1 l_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 0 \leq l_1 \leq n_1, \ 0 \leq l_2 \leq n_2, \\ L_2 a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad 0 \leq l_1 \leq n_1, \ n_2+1 \leq l_2 \leq 2n_2, \\ L_1 a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad n_1+1 \leq l_1 \leq 2n_1, \ 0 \leq l_2 \leq n_2. \\ (L_1 + L_2 - L_1 L_2) a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad n_1+1 \leq l_1 \leq 2n_1, \ n_2+1 \leq l_2 \leq 2n_2, \\ a_{l_1 l_2}, & \text{якщо} \quad l_1 \geq 2n_1+1, \ l_2 \geq 2n_2+1 \end{cases}$$

($\beta_{l_1 l_2}$, $\gamma_{l_1 l_2}$, $\delta_{l_1 l_2}$ визначаються аналогічно), та нерівності

$$\frac{1}{n_j+1} \leq L_j, \qquad \frac{1}{n_j+1} \leq 1 - L_j,$$

які мають місце при $n_j + 1 \leq l_j \leq 2n_j$, $j = 1, 2$, оцінюємо знизу суму

$$\sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \frac{|\alpha_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} =$$

$$= \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{2n_2} L_2 \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} + \sum_{l_2=0}^{n_2} \sum_{l_1=n_1+1}^{2n_1} L_1 \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} +$$

$$+ \sum_{l_1=n_1+1}^{2n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{2n_2} (L_1(1-L_2) + L_2(1-L_1) + L_1 L_2) \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} +$$

$$+ \sum_{(l_1,l_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{2n_1 2n_2}} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{n_2+1} \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{2n_2} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} + \frac{1}{n_1+1} \sum_{l_2=0}^{n_2} \sum_{l_1=n_1+1}^{2n_1} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} +$$

$$+ \frac{3}{(n_1+1)(n_2+1)} \sum_{l_1=n_1+1}^{2n_1} \sum_{l_2=n_2+1}^{2n_2} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} +$$

$$+ \sum_{(l_1,l_2) \in Z_+^2 \setminus Q_{2n_1 2n_2}} \frac{|a_{l_1 l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)} \geq$$

$$\geq C\left(\sum_{l_1=0}^{n_1}\left(\frac{1}{n_2}\sum_{l_2=n_2+1}^{2n_2}\frac{|a_{l_1l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{l_2=0}^{n_2}\left(\frac{1}{n_1}\sum_{l_1=n_1+1}^{2n_1}\frac{|a_{l_1l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{n_1n_2}\sum_{l_1=n_1+1}^{2n_1}\sum_{l_2=n_2+1}^{2n_2}\frac{|a_{l_1l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}+\sum_{(l_1,l_2)\in Z_+^2\setminus Q_{2n_12n_2}}\frac{|a_{l_1l_2}|}{(l_1+1)(l_2+1)}\right).$$

Оцінивши таким способом всю суму в правій частині (6), одержимо нерівність

$$E_{n_1n_2}(f)+\sum_{j=1}^{3}E_{n_1n_2}(\overline{f}_j)\geq$$

$$\geq C\left(\sum_{k_1=0}^{n_1}A_{k_1n_2+1}^{2n_2}+\sum_{k_2=0}^{n_2}A_{n_1+1k_2}^{2n_1}+A_{n_1+1n_2+1}^{2n_12n_2}+\sum_{(k_1,k_2)\in Z_+^2\setminus Q_{2n_12n_2}}A_{k_1k_2}\right).$$

Оскільки для будь-якої функції $f\in L(Q^2)$ має місце

$$E_{n_1n_2}(f)\geq C\max_{(k_1,k_2)\in Q_{n_1+1n_2+1}\setminus Q_{n_1n_2}}\Big(|a_{k_1k_2}|+|b_{k_1k_2}|+|c_{k_1k_2}|+|d_{k_1k_2}|\Big),$$

де $n_1, n_2=0,1,\ldots, a_{k_1k_2}, b_{k_1k_2}, c_{k_1k_2}, d_{k_1k_2}$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x_1,x_2)$ [5] (лема 3), з останніх двох нерівностей випливає оцінка (1), що і доводить теорему.

1. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**, № 1. – С. 53 – 84.
2. *Гейт В. Э.* О структурных и конструктивных свойствах синус- и косинус-рядов с монотонной последовательностью коэффициентов Фурье // Изв. вузов. Сер. мат. – 1969. – **86**, № 7. – С. 39 – 47.
3. *Кононович Т. О.* Оцінка найкращих наближень періодичних функцій багатьох змінних через коефіцієнти Фур'є: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Полтава, 2005. – 16 с.
4. *Жижиашвили Л. В.* Сопряженные функции и тригонометрические ряды. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1969. – 272 с.
5. *Кононович Т. О.* Оцінка знизу найкращого наближення тригонометричними поліномами сумовних функцій двох змінних // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, № 3. – С. 478 – 486.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. (Пер. с англ.) – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 537 с.
7. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1973. – 350 с.
8. *Рудин У.* Теория функций в поликруге: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
9. *Задерей П. В.* О многомерном аналоге одного результата Р. Боаса // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 3. – С. 380 – 383.

Одержано 04.09.06,
після доопрацювання — 23.05.07