УДК 517.925:517.983.27

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОНУСНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ*

We discuss generalizations of classes of monotone dynamical systems in the partially ordered Banach space. We establish the algebraic conditions for the stability of equilibria of differential systems on the basis of linearization and application of derivatives of nonlinear operators with respect to a cone. Conditions of the positivity and absolute stability of a certain class of differential systems with delay are suggested. Some illustrative examples are given.

Досліджуються узагальнення класів монотонних динамічних систем в напівупорядкованому банаховому просторі. Встановлено алгебраїчні умови стійкості станів рівноваги диференціальних систем на основі лінеаризації та застосування похідних по конусу від нелінійних операторів. Запропоновано умови позитивності та абсолютної стійкості деякого класу диференціальних систем із запізненням. Наведено ілюстративні приклади.

1. Введение и основные определения. В теории систем и приложениях используются непрерывные и дискретные модели динамических объектов, состояния которых имеют определенные свойства по отношению к некоторому конусу фазового пространства (позитивность, монотонность, кооперативность и др.). Эти свойства могут быть обусловлены природой изучаемого объекта или структурой проектируемой системы управления (см., например, [1 – 4]). Классы позитивных и монотонных систем возникают в теории устойчивости в качестве систем сравнения [5 – 7]. Некоторые модели биологических и социальных систем имеют свойства типа кооперативности или конкуренции, которые определяются с помощью конуса неотрицательных векторов [2].

В данной работе исследуются свойства динамических систем, обобщающие понятия позитивности и монотонности относительно конуса. Предлагается классификация таких систем с целью их использования в задачах устойчивости. Формулируется аналог теоремы Ляпунова об устойчивости состояний равновесия нелинейных дифференциальных систем по первому приближению с использованием понятия производных по конусу от нелинейного оператора. Устанавливаются условия позитивности и абсолютной устойчивости некоторого класса дифференциальных систем с запаздыванием.

Приведем некоторые определения и вспомогательные факты. Выпуклое замкнутое множество $\mathcal{K}$ вещественного нормированного пространства $\mathcal{E}$ называется конусом, если $\mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = \{0\}$ и $\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\ \forall \alpha, \beta \geq 0$. Пространство с конусом полуупорядочено: $X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y \iff Y - X \in \mathcal{K}$. Конус $\mathcal{K}$ с непустым множеством внутренних точек $\operatorname{int}\mathcal{K} = \{X\colon X \overset{\mathcal{K}}{>} 0\}$ является телесным. Ненулевые элементы $X \in \mathcal{K}$ обозначаются как $X \overset{\mathcal{K}}{\succ} 0$. Конус $\mathcal{K}$ называется нормальным, если $0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y$ влечет оценку $\|X\| \leq \nu\|Y\|$, где ν — универсальная константа. Наименьшее из таких чисел ν называется константой нормальности конуса $\mathcal{K}$. Если $\mathcal{E} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ воспроизводящий.

* Выполнена при частичной поддержке НИР № 0107U002198.

Типичными примерами нормальных воспроизводящих конусов в конечномерных пространствах являются множество векторов с неотрицательными элементами, круговой конус Минковского, множество симметричных неотрицательно определенных матриц и др.

Множество $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ называется $\mathcal{K}$-выпуклым, если для любой пары точек X, $Y \in \mathcal{D}$ из $X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y$ следует $(1-\gamma)X + \gamma Y \in \mathcal{D}$ при $\gamma \in (0,1)$. Любой конус $\mathcal{K}$ и любое выпуклое множество являются $\mathcal{K}$-выпуклыми.

Сопряженный конус $\mathcal{K}^*$ состоит из линейных функционалов $\varphi \in \mathcal{E}^*$, принимающих неотрицательные значения на $\mathcal{K}$, причем $\mathcal{K} = \big\{X \in \mathcal{E} \colon \varphi(X) \geq 0 \; \forall \varphi \in \mathcal{K}^*\big\}$. Функционал $\varphi \in \mathcal{E}^*$ называется равномерно положительным, если найдется такое $\gamma > 0$, что $\varphi(X) \geq \gamma \|X\|$ для всех $x \in \mathcal{K}$. Равномерно положительный функционал $\varphi \in \mathcal{E}^*$ является строго положительным: $\varphi(X) > 0$ при $X \overset{\mathcal{K}}{\succ} 0$. Конус $\mathcal{K}$ допускает „оштукатуривание" $\mathcal{K}_0$, если каждая точка $X \in \mathcal{K}$ входит в конус $\mathcal{K}_0$ вместе с шаровой окрестностью $\|Y - X\| \leq \delta \|X\|$, где $\delta > 0$ не зависит от X. Оштукатуриваемость конуса $\mathcal{K}$ равносильна телесности конуса $\mathcal{K}^*$. Конус $\mathcal{K}$ нормальный (воспроизводящий) в том и только в том случае, когда сопряженный конус $\mathcal{K}^*$ является воспроизводящим (нормальным).

Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2)$ выделен конус $\mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$. Оператор $M \colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ называется монотонным, если $X \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} Y \implies MX \overset{\mathcal{K}_2}{\leq} MY$. Монотонность линейного оператора M равносильна его положительности: $M\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$. Если оператор M положительный, то сопряженный оператор $M^* \colon \mathcal{E}_2^* \to \mathcal{E}_1^*$ также положителен ($M^*\mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}_1^*$). Если $M\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$, то оператор M всюду положительный. Линейный оператор M называется положительно обратимым, если $\mathcal{K}_2 \subseteq M\mathcal{K}_1$, т. е. для любого $Y \in \mathcal{K}_2$ уравнение $MX = Y$ имеет решение $X \in \mathcal{K}_1$. Поскольку $(M^{-1})^* = (M^*)^{-1}$, из положительной обратимости оператора M следует положительная обратимость оператора M^*. Если $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус и $M_1 \leq M \leq M_2$, то из положительной обратимости операторов M_1 и M_2 вытекает положительная обратимость оператора M, причем $M_2^{-1} \leq M^{-1} \leq$ $\leq M_1^{-1}$ [1].

Критерием положительной обратимости операторов вида $M = L - P$, где $P\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq L\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус, является неравенство $\rho(T) < 1$, где $\rho(T)$ — спектральный радиус пучка операторов $T(\lambda) = P -$ $- \lambda L$ [8]. Если конус $\mathcal{K}_2$ телесный, то данное неравенство эквивалентно существованию элементов $X \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0$ и $Y \overset{\mathcal{K}_2}{>} 0$, связанных уравнением $MX = Y$.

Линейный ограниченный оператор $F'(X_0)$ называется производной Гато от нелинейного оператора $F \colon \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ в точке X_0, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[F(X_0 + \varepsilon H) - FX_0\right] = F'(X_0)H$$

в смысле сильной сходимости (по норме). Если данное соотношение выполняется лишь при $H \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0$, то $F'(X_0)$ — производная по конусу $\mathcal{K}_1$ оператора F [9]. Производная Фреше $F'(X_0)$ по конусу $\mathcal{K}_1$ определяется соотношениями

$$F(X_0+H)-FX_0=F'(X_0)H+R(X_0,H),\quad R(X_0,H)=o(\|H\|),$$

где $H\overset{\mathcal{K}_1}{\geq}0$. Производная Фреше является также производной Гато. Если производная Гато непрерывна в окрестности точки X_0, то она является производной Фреше. В дальнейшем через $F'_+(X_0)$ $(F'_-(X_0))$ будем обозначать производные Гато и Фреше по конусу $\mathcal{K}_1$ $(-\mathcal{K}_1)$ в точке X_0.

2. Классификация динамических систем относительно конуса. Пусть в некоторой области $\mathcal{D}$ банахового пространства $\mathcal{E}$ функционирует непрерывная или дискретная динамическая система, состояния которой определяются в виде

$$X_t=\Phi(X_\tau,\tau,t)\in\mathcal{E},\quad t\geq\tau\geq 0,\tag{2.1}$$

где Φ — оператор, определяющий переход из начального состояния X_τ в состояние X_t и имеющий свойства

$$\Phi(X_\tau,\tau,\tau)=X_\tau,\qquad \Phi(X_\tau,\tau,t+\tau)=\Phi(X_t,t,t+\tau).$$

Если $\Phi(\Theta,\tau,t)=\Theta$, то $X_t\equiv\Theta$ — состояние равновесия (стационарное движение) системы (2.1).

Пусть в пространстве $\mathcal{E}$ определено постоянное или изменяющееся по заданному закону множество $\mathcal{K}_t$, $t\geq 0$. $\mathcal{K}_t$ является инвариантным множеством системы (2.1), если выполняется включение $\Phi(\mathcal{K}_\tau,\tau,t)\subset\mathcal{K}_t$, т. е. $X_t\in\mathcal{K}_t$ при $t>\tau\geq 0$, лишь только $X_\tau\in\mathcal{K}_\tau$. Если система (2.1) имеет инвариантный конус $\mathcal{K}_t$, то она позитивна относительно $\mathcal{K}_t$. Система (2.1) называется монотонной относительно конуса $\mathcal{K}_t$, если для любого $\tau\geq 0$

$$X_\tau\overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq}Y_\tau\implies X_t\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}Y_t,\quad t>\tau,\tag{2.2}$$

где $X_t=\Phi(X_\tau,\tau,t)$, $Y_t=\Phi(Y_\tau,\tau,t)$. Позитивную (монотонную) динамическую систему (2.1) определяет позитивный (монотонный) относительно конуса $\mathcal{K}_t$ оператор Φ. Классы монотонных и позитивных относительно конуса $\mathcal{K}_t(-\mathcal{K}_t)$ систем обозначим через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_0^+(\mathcal{M}_0^-)$ соответственно.

Рассмотрим множества

$$\mathcal{K}_t^+(\Theta)=\{X\in\mathcal{E}\colon X\overset{\mathcal{K}_t}{\geq}\Theta\},\qquad \mathcal{K}_t^-(\Theta)=\{X\in\mathcal{E}\colon X\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}\Theta\},$$

где $\Theta\in\mathcal{E}$, $\mathcal{K}_t$ — некоторый конус. Очевидно, что $\mathcal{K}_t^\pm(\Theta)=\Theta\pm\mathcal{K}_t$ и $\mathcal{K}_t^\pm(0)=$ $=\pm\mathcal{K}_t$. Для класса систем, имеющих инвариантное множество $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ $(\mathcal{K}_t^-(\Theta))$, используем обозначение $\mathcal{M}_0^+(\Theta)$ $(\mathcal{M}_0^-(\Theta))$. Классы систем, характеризующихся свойством (2.2) при дополнительных требованиях $Y_\tau\in\mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$, $X_\tau\in\mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$, $X_\tau\in\mathcal{K}_\tau^-(\Theta)$ и $Y_\tau\in\mathcal{K}_\tau^-(\Theta)$, обозначаем соответственно $\mathcal{M}_1^+(\Theta)$, $\mathcal{M}_2^+(\Theta)$, $\mathcal{M}_1^-(\Theta)$ и $\mathcal{M}_2^-(\Theta)$. Система класса $\mathcal{M}_2^+(\Theta)$ $(\mathcal{M}_2^-(\Theta))$ монотонна в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ $(\mathcal{K}_t^-(\Theta))$.

Обозначим $\mathcal{M}_k(\Theta)=\mathcal{M}_k^+(\Theta)\cap\mathcal{M}_k^-(\Theta)$, $k=0,1,2$. Отметим, что $\mathcal{M}\subseteq$ $\subseteq\mathcal{M}_1^\pm(\Theta)\subseteq\mathcal{M}_2^\pm(\Theta)$ и $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}_1(\Theta)\subseteq\mathcal{M}_2(\Theta)$.

Пусть $\Phi'_+(\Theta,\tau,t)$ $(\Phi'_-(\Theta,\tau,t))$ — производная Гато по конусу $\mathcal{K}_\tau$ $(-\mathcal{K}_\tau)$ оператора $\Phi(\Theta,\tau,t)$ в точке $\Theta\in\mathcal{D}$. Для классов систем $\mathcal{M}_0^+(\Theta)$ и $\mathcal{M}_0^-(\Theta)$, имеющих состояние равновесия $X_t\equiv\Theta$, выполняются соответствующие включения

$$\Phi'_+(\Theta,\tau,t)\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t, \quad \Theta\in\mathcal{D}, \quad t\geq\tau, \tag{2.3}$$

$$\Phi'_-(\Theta,\tau,t)\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t, \quad \Theta\in\mathcal{D}, \quad t\geq\tau. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Пусть оператор $\Phi(\Theta,\tau,t)$ дифференцируем по Гато по конусу $\mathcal{K}_\tau$ $(-\mathcal{K}_\tau)$ в каждой точке $\mathcal{K}_\tau$-выпуклой области $\mathcal{D}$ при $t\geq\tau$. Тогда система* (2.1) *является монотонной относительно $\mathcal{K}_t$ в том и только в том случае, когда выполняются условия* (2.3) ((2.4)).

Доказательство. Предположим, что существует производная Гато $\Phi'_+(\Theta,\tau,t)$ в каждой точке $\Theta\in\mathcal{D}$. Тогда из определения свойства монотонности системы имеем соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\Phi(\Theta+\varepsilon H,\tau,t)-\Phi(\Theta,\tau,t)\right]=\Phi'_+(\Theta,\tau,t)H\overset{\mathcal{K}_t}{\geq}0,$$

где $H\overset{\mathcal{K}_\tau}{\geq}0$, $\Theta\in\mathcal{D}$, из которого следует включение (2.3).

Утверждение достаточности устанавливается на основе формулы Лагранжа для оператора $\Phi(\Theta,\tau,t)$:

$$\varphi\left(\Phi(\Theta+H,\tau,t)-\Phi(\Theta,\tau,t)\right)=\varphi(\Phi'_+(\Theta+\gamma H,\tau,t)H),$$

где $0<\gamma=\gamma(\varphi)<1$, $\varphi\in\mathcal{E}^*$, Θ и $\Theta+H$ — произвольные точки некоторого выпуклого множества. Для этого следует использовать лишь положительные функционалы $\varphi\in\mathcal{K}_t^*$ и свойство $\mathcal{K}_\tau$-выпуклости области $\mathcal{D}$. При этом $\Theta+\gamma H=(1-\gamma)\Theta+\gamma(\Theta+H)\in\mathcal{D}$, если $\Theta\in\mathcal{D}$ и $H\in\mathcal{K}_\tau$.

Аналогично устанавливается критерий монотонности системы вида (2.4).

Лемма доказана.

***Замечание* 2.1.** Можно установить, что критерием принадлежности системы (2.1) классу $\mathcal{M}_2^+(\Theta)$ $(\mathcal{M}_2^-(\Theta))$ является включение (2.3) ((2.4)), выполняемое при $\Theta\in\mathcal{K}_\tau$ $(\Theta\in-\mathcal{K}_\tau)$. Для системы класса $\mathcal{M}_1^+(\Theta)$ $(\mathcal{M}_1^-(\Theta))$ выполняются оба включения (2.3) и (2.4) при $\Theta\in\mathcal{K}_\tau$ $(\Theta\in-\mathcal{K}_\tau)$.

3. Дифференциальные системы. Рассмотрим нелинейную дифференциальную систему

$$\dot{X}=F(X,t), \quad t\geq\tau\geq 0, \tag{3.1}$$

где $F(X,t)$ — непрерывная оператор-функция, обеспечивающая существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения $X(t)=\Phi(X_\tau,\tau,t)$ при $t\geq\tau$ для любых $\tau\geq 0$ и $X_\tau\in\mathcal{D}$, где $\mathcal{D}\subset\mathcal{E}$ — некоторая $\mathcal{K}_\tau$-выпуклая область.

Для системы (3.1) определим следующие условия:

$$X\overset{\mathcal{K}_t}{\geq}\Theta, \quad \varphi\in\mathcal{K}_t^*, \quad \varphi(X-\Theta)=0 \implies \varphi\left(F(X,t)\right)\geq 0, \tag{3.2}$$

$$X\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}Y, \quad \varphi\in\mathcal{K}_t^*, \quad \varphi(X-Y)=0 \implies \varphi\left(F(X,t)-F(Y,t)\right)\leq 0, \tag{3.3}$$

где $t\geq 0$, $\mathcal{K}_t^*$ — сопряженный конус. Класс оператор-функций $F(X,t)$, удовлетворяющих условиям типа (3.2) относительно конуса $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$, обозначим через $\mathcal{F}_0^+(\Theta)$ $(\mathcal{F}_0^-(\Theta))$. Семейство оператор-функций, имеющих свойство (3.3), обозначим через $\mathcal{F}$. Определим также семейства оператор-функций $\mathcal{F}_1^+(\Theta)$, $\mathcal{F}_2^+(\Theta)$,

$\mathcal{F}_1^-(\Theta)$ и $\mathcal{F}_2^-(\Theta)$, характеризующихся свойством (3.3) при дополнительных требованиях $Y \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$ и $Y \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$ соответственно. Обозначим $\mathcal{F}_k(\Theta) = \mathcal{F}_k^+(\Theta) \cap \mathcal{F}_k^-(\Theta)$, $k = 0, 1, 2$.

Очевидно, что $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0^\pm(\Theta)$, $\mathcal{F}_1^\pm(\Theta)$ и $\mathcal{F}_2^\pm(\Theta)$ являются клиньями, причем $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1^\pm(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_2^\pm(\Theta)$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_2(\Theta)$.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{K}_t$ — телесный конус, имеющий свойство*

$$0 \le \tau < t \implies \mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t. \tag{3.4}$$

Тогда выполняются следующие утверждения:

1) *если $F \in \mathcal{F}_0^\pm(\Theta)$, то $\mathcal{K}_t^\pm(\Theta)$ является инвариантным множеством системы* (3.1);

2) *если $F \in \mathcal{F}$, то система* (3.1) *монотонна относительно $\mathcal{K}_t$*;

3) *если $F \in \mathcal{F}_k^\pm(\Theta)$, то $\mathcal{M}_0^\pm(\Theta) \subseteq \mathcal{M}_k^\pm(\Theta)$, $k = 1, 2$*;

4) *если $F \in \mathcal{F}_k^\pm(\Theta)$ и $F(\Theta, t) \equiv 0$, то* (3.1) *является системой класса $\mathcal{M}_k^\pm(\Theta)$*, $k = 1, 2$.

Доказательство. Доказательство утверждения 1 леммы аналогично его доказательству в случае $\Theta = 0$ [7].

Наряду с (3.1) рассмотрим систему

$$\dot{Y} = F(Y, t) + \varepsilon Q, \quad t \ge \tau \ge 0, \tag{3.5}$$

где $\varepsilon > 0$, $Q \overset{\mathcal{K}_0}{>} 0$. Если (3.1) — система класса $\mathcal{M}_0^\pm(\Theta)$, то таковой является система (3.5). Пусть $X(t)$ и $Y(t)$ — решения соответствующих систем (3.1) и (3.5) такие, что $X(0) \overset{\mathcal{K}_0}{\le} Y(0)$, $X(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\le} Y(\tau)$ и $\varphi(X(\tau)) = \varphi(Y(\tau))$ для некоторых $\tau \ge 0$ и $\varphi \in \mathcal{K}_\tau^*$, $\varphi \ne 0$. Тогда при условиях (3.4) и $F \in \mathcal{F}$ для достаточно малого $\delta > 0$ выполняются неравенства

$$\varphi(\dot{X}(\tau) - \dot{Y}(\tau)) = \varphi(F(X(\tau), \tau) - F(Y(\tau), \tau)) - \varepsilon\, \varphi(Q) < 0,$$

$$\int_{\tau}^{\tau+\delta} \varphi\left(\dot{X}(t) - \dot{Y}(t)\right) dt = \varphi\left(X(\tau+\delta) - Y(\tau+\delta)\right) \le 0.$$

Это означает, что в момент τ значение функции $Y(\tau+\delta) - X(\tau+\delta)$ не может выйти за пределы конуса $\mathcal{K}_\tau$. В силу непрерывной зависимости решения Y от ε при $\varepsilon \to 0$ можно утверждать, что система (3.1) монотонна относительно $\mathcal{K}_t$ (утверждение 2).

Доказательство утверждения 3 аналогично доказательству утверждений 1, 2. Если при этом $Y(0) \overset{\mathcal{K}_0}{\ge} 0$, $F \in \mathcal{F}_1^+(\Theta)$ $(X(0) \overset{\mathcal{K}_0}{\ge} 0$, $F \in \mathcal{F}_2^+(\Theta))$, то $\mathcal{M}_0^+(\Theta) \subseteq \mathcal{M}_1^+(\Theta)$ $(\mathcal{M}_0^+(\Theta) \subseteq \mathcal{M}_2^+(\Theta))$. Аналогично, при $X(0) \overset{\mathcal{K}_0}{\le} 0$, $F \in \mathcal{F}_1^-(\Theta)$ $(Y(0) \overset{\mathcal{K}_0}{\le} 0$, $F \in \mathcal{F}_2^-(\Theta))$ имеем $\mathcal{M}_0^-(\Theta) \subseteq \mathcal{M}_1^-(\Theta)$ $(\mathcal{M}_0^-(\Theta) \subseteq \mathcal{M}_2^-(\Theta))$.

Утверждение 4 является следствием утверждений 1 и 3. Действительно, если $F(\Theta, t) \equiv 0$, то из $F \in \mathcal{F}_1^\pm(\Theta)$ $(F \in \mathcal{F}_2^\pm(\Theta))$ следует $F \in \mathcal{F}_0(\Theta)$ $(F \in \mathcal{F}_0^\pm(\Theta))$.

Лемма доказана.

Отметим, что в случае постоянного конуса $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}$ можно сформулировать обратные утверждения к утверждениям 1 – 4 леммы 3.1 [10].

В [11] предложена методика построения инвариантных множеств дифференциальных систем в виде

$$\mathcal{I}_t = \left\{ X \in \mathcal{E} \colon V(X,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0 \right\}, \tag{3.6}$$

где $V\colon \mathcal{E} \times [0,\infty) \to \mathcal{E}_1$ — некоторая оператор-функция, $\overset{\mathcal{K}}{\geq}$ — неравенство, определяемое заданным конусом $\mathcal{K}$ в пространстве $\mathcal{E}_1$.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — телесный конус. Тогда* (3.6) *является инвариантным множеством системы* (3.1) *в том и только в том случае, когда при каждом $t \geq 0$ выполняется условие*

$$X \in \mathcal{I}_t, \quad \varphi \in \mathcal{K}^*, \quad \varphi(V(X,t)) = 0 \implies \varphi(D_t V(X,t)) \geq 0, \tag{3.7}$$

где D_t — оператор дифференцирования в силу системы (3.1).

Если $V(X,t)$ — непрерывная вместе с частными производными оператор-функция, то в (3.7) оператор D_t, как сильная производная сложной функции, определяется в виде

$$D_t V(X,t) = V'_X(X,t)\, F(X,t) + V'_t(X,t), \tag{3.8}$$

где $V'_t(X,t)$ — сильная производная функции по t, а $V'_X(X,t)$ — производная Гато по X. В случае, когда $V(X,t)$ является лишь непрерывной и локально липшицевой функцией по X, в качестве D_t можно использовать производные в силу системы типа Дини (см., например, [5, 6]).

***Замечание* 3.1.** Условие (3.7) имеет место, если для некоторой непрерывной скалярной функции $\alpha(X,t)$ выполняется конусное неравенство

$$D_t V(X,t) + \alpha(X,t) V(X,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \qquad X \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0. \tag{3.9}$$

Наряду с (3.1) рассмотрим линейные системы

$$\dot{H} = F'_+(X,t)H, \qquad X \in \mathcal{D}, \quad t \geq \tau \geq 0, \tag{3.10}$$

$$\dot{H} = F'_-(X,t)H, \qquad X \in \mathcal{D}, \quad t \geq \tau \geq 0, \tag{3.11}$$

где $F'_+(X,t)$ $(F'_-(X,t))$ — производная Гато по конусу $\mathcal{K}_t(-\mathcal{K}_t)$ оператора $F(X,t)$. Систему (3.1) будем называть кооперативной относительно $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$, если правые части семейства систем (3.10) ((3.11)) являются операторами класса $\mathcal{F}_0^+(0)$ $(\mathcal{F}_0^-(0))$. При условиях леммы 3.1 каждая система (3.10) ((3.11)), соответствующая кооперативной относительно $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$ системе (3.1), имеет инвариантные конусы $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$. Система (3.1) является моделью конкуренции относительно $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$, если реверсная система

$$\dot{X} = -F(X,-t), \quad t \geq \tau \geq 0,$$

является кооперативной относительно $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$.

Имеет место следующее утверждение [12].

Теорема 3.2. *Пусть оператор $F(X, t)$ дифференцируем по Гато по конусу $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$ в каждой точке X $\mathcal{K}_t$-выпуклой области $\mathcal{D}$ при $t \geq 0$. Тогда система* (3.1) *является кооперативной относительно $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$ в том и только в том случае, когда $F \in \mathcal{F}$.*

***Следствие* 3.1.** *При условиях леммы* 3.1 *система* (3.1) *является монотонной, если она кооперативна относительно $\mathcal{K}_t$ или $-\mathcal{K}_t$. Если конус $\mathcal{K}_t$ постоянный, то справедливо и обратное утверждение.*

***Замечание* 3.2.** Можно установить, что правая часть системы (3.10) ((3.11)) при $X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$ $(X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta))$ является функцией класса $\mathcal{F}_0^+(\Theta)$ $(\mathcal{F}_0^-(\Theta))$ в том и только в том случае, когда $F \in \mathcal{F}_2^+(\Theta)$ $(F \in \mathcal{F}_2^-(\Theta))$. Если $F \in \mathcal{F}_1^+(\Theta)$ $(F \in \mathcal{F}_1^-(\Theta))$, то правые части обеих систем (3.10) и (3.11) являются функциями класса $\mathcal{F}_0^+(\Theta)$ $(\mathcal{F}_0^-(\Theta))$ при $X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$ $(X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta))$.

4. Устойчивость состояний равновесия систем класса $\mathcal{M}_1(\Theta)$. Рассмотрим дифференциальную систему (3.1) с изолированным состоянием равновесия $X \equiv \Theta$:

$$\dot{X} = F(X, t), \qquad F(\Theta, t) \equiv 0, \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{4.1}$$

Будем предполагать, что $\mathcal{K}_t$ — нормальный воспроизводящий конус с ограниченной константой нормальности $\nu_t \leq \nu$.

Состояние $X \equiv \Theta$ системы (4.1) называем устойчивым в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \geq 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из принадлежности $X(\tau)$ множеству $\mathcal{S}_\delta(\tau)$ следует $X(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)$ при $t > \tau$, где $\mathcal{S}_\varepsilon(t) = \{X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta) \colon \|X - \Theta\| \leq \varepsilon\}$. Если при этом для некоторого $\delta_\tau > 0$ из $X(\tau) \in \mathcal{S}_{\delta_\tau}(\tau)$ следует $\|X(t) - \Theta\| \to 0$ при $t \to \infty$, то состояние $X \equiv 0$ системы асимптотически устойчиво в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$.

Если состояние $X \equiv 0$ системы (4.1) с инвариантным множеством $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, то оно устойчиво (асимптотически устойчиво) в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$.

Докажем следующее утверждение, сформулированное в [7] в случае $\Theta = 0$.

Лемма 4.1. *Состояние $X \equiv \Theta$ системы* (4.1) *класса $\mathcal{M}_1(\Theta)$ относительно нормального воспроизводящего конуса $\mathcal{K}_t$ устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *по Ляпунову в том и только в том случае, когда оно устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ и $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$.*

Доказательство. Для системы класса $\mathcal{M}_1(\Theta)$ оба множества $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ и $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ являются инвариантными. Поэтому из устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову состояния $X \equiv \Theta$ следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ и $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$.

Пусть состояние $X \equiv \Theta$ системы (4.1) устойчиво в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ и $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$. Рассмотрим произвольное ее решение $X(t)$ с начальным условием $X(\tau) = X_\tau$. Поскольку конус $\mathcal{K}_\tau$ воспроизводящий и несплющенный, для некоторых $X_\tau^\pm \in \mathcal{K}_\tau^\pm(\Theta)$ и γ_τ выполняются соотношения

$$X_\tau^- \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X_\tau \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X_\tau^+, \qquad \|X_\tau^\pm - \Theta\| \leq \gamma_\tau \|X_\tau - \Theta\|.$$

Из определения классов $\mathcal{M}_1^\pm(\Theta)$ имеем неравенства

$$X_-(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X_+(t), \quad t \ge \tau,$$

где $X_\pm(t)$ — решения системы с соответствующими начальными условиями $X_\pm(\tau) = X_\tau^\pm$.

В силу устойчивости состояния $X \equiv \Theta$ системы в $\mathcal{K}_t^\pm(\Theta)$ для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta_\pm > 0$ так, чтобы из неравенства $\|X_0^\pm - \Theta\| \le \delta_\pm$ следовало $\|X_\pm(t) - \Theta\| \le \varepsilon(2\nu+1)^{-1}$ при $t > \tau$. Тогда

$$\|X(t) - \Theta\| \le (\nu_t + 1)\|X_-(t) - \Theta\| + \nu_t\|X_+(t) - \Theta\| \le \varepsilon,$$

лишь только $\|X_\tau\| \le \delta = \gamma_\tau^{-1}\min\{\delta_+, \delta_-\}$. Здесь $0 < \nu_t \le \nu$ $(\gamma_\tau > 0)$ — константа нормальности (несплющенности) конуса $\mathcal{K}_t$ $(\mathcal{K}_\tau)$. При этом $\|X(t) - \Theta\| \to 0$, если $\|X_\pm(t) - \Theta\| \to 0$, $t \to \infty$, т. е. состояние $X \equiv \Theta$ системы (4.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть нормальный телесный конус* $\mathcal{K}_t$ *удовлетворяет условию* (3.4)*, является инвариантным множеством линейной системы*

$$\dot{X} = MX, \quad t \ge \tau \ge 0, \tag{4.2}$$

и совместна система неравенств

$$Z \overset{\mathcal{K}_\tau}{>} 0, \qquad -MZ = Y \overset{\mathcal{K}_\tau}{>} 0. \tag{4.3}$$

Тогда система (4.2) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное решение $X(t) = e^{M(t-\tau)}X_\tau$. Пусть сначала $X_\tau \overset{\mathcal{K}_\tau}{\ge} 0$. Поскольку Z и Y — внутренние точки конуса $\mathcal{K}_\tau$ и $\mathcal{K}_t$ является инвариантным множеством системы (4.2), для некоторого $\alpha > 0$ выполняются неравенства

$$Y \overset{\mathcal{K}_\tau}{\ge} \alpha Z \overset{\mathcal{K}_\tau}{\ge} \alpha^2 X_\tau, \qquad 0 \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} \alpha^{-1} Z(t),$$

где функция $Z(t) = e^{M(t-\tau)}Z$ удовлетворяет соотношениям

$$\dot{Z}(t) + \alpha Z(t) = G(t), \qquad G(t) = e^{M(t-\tau)}(-Y + \alpha Z) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} 0,$$

$$0 \overset{\mathcal{K}_t}{\le} Z(t) = e^{-\alpha(t-\tau)}Z + \int\limits_\tau^t e^{-\alpha(t-s)}G(s)ds \overset{\mathcal{K}_t}{\le} e^{-\alpha(t-\tau)}Z.$$

В последнем неравенстве использовано свойство (3.4) конуса $\mathcal{K}_t$. Из нормальности данного конуса следует

$$\|Z(t)\| \le \nu e^{-\alpha(t-\tau)}\|Z\|, \qquad \|X(t)\| \le \alpha^{-1}\nu^2 e^{-\alpha(t-\tau)}\|Z\|.$$

В общем случае $X_\tau = X_\tau^+ - X_\tau^-$, где $X_\tau^\pm \in \mathcal{K}_\tau$, получаем аналогичное неравенство

$$\|X(t)\| \le \nu^2 \left(\alpha_+^{-1}e^{-\alpha_+(t-\tau)} + \alpha_-^{-1}e^{-\alpha_-(t-\tau)}\right)\|Z\|,$$

где $\alpha_\pm > 0$ — некоторые числа.

Следовательно, каждое решение системы (4.2) ограничено и стремится к нулю при $t \to \infty$, что равносильно асимптотической устойчивости данной системы.

Лемма доказана.

Сформулируем условия асимптотической устойчивости состояния равновесия $X \equiv \Theta$ нелинейной автономной системы

$$\dot{X} = F(X), \qquad F(\Theta) = 0, \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{4.4}$$

Будем предполагать, что конус $\mathcal{K}$ постоянный и существуют производные Фреше $F'_\pm(X)$ по конусам $\pm\mathcal{K}$ от оператора F в точке $X = \Theta$.

Теорема 4.1. *Пусть система* (4.4) *принадлежит классу* $\mathcal{M}_1(\Theta)$ *относительно нормального воспроизводящего конуса* $\mathcal{K}$ *и существуют производные Фреше* $F'_\pm(\Theta)$ *по* $\pm\mathcal{K}$ *соответственно. Тогда состояние* $X \equiv \Theta$ *системы* (4.4) *асимптотически устойчиво по Ляпунову, если операторы* $-F'_\pm(\Theta)$ *положительно обратимы*:

$$\mathcal{K} \subseteq -F'_+(\Theta)\mathcal{K}, \qquad \mathcal{K} \subseteq -F'_-(\Theta)\mathcal{K}. \tag{4.5}$$

Если при этом конус $\mathcal{K}$ *телесный, то условия* (4.5) *эквивалентны разрешимости относительно* H_+ *и* H_- *системы неравенств*

$$H_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} 0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} H_+, \qquad F'_+(\Theta)H_+ \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} F'_-(\Theta)H_-. \tag{4.6}$$

Доказательство. Система (4.4) класса $\mathcal{M}_1(\Theta)$ имеет инвариантные множества $\mathcal{K}^\pm(\Theta)$. При $X = \Theta + H \in \mathcal{K}^\pm(\Theta)$ данная система представляется соответственно как

$$\dot{H} = F'_\pm(\Theta)H + R_\pm(\Theta, H), \quad H \in \pm\mathcal{K}. \tag{4.7}$$

Согласно лемме 4.1, из асимптотической устойчивости в $\pm\mathcal{K}$ состояний $H \equiv 0$ систем (4.7) следует асимптотическая устойчивость по Ляпунову состояния $X \equiv \Theta$ исходной системы (4.4). Для того чтобы воспользоваться теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению, установим асимптотическую устойчивость линейных систем

$$\dot{H} = F'_\pm(\Theta)H, \quad H \in \mathcal{E}. \tag{4.8}$$

Системы (4.8) позитивны относительно $\mathcal{K}$ и $-\mathcal{K}$. Действительно, учитывая соотношения

$$F(\Theta + \varepsilon H) = \varepsilon F'_+(\Theta)H + R_+(\Theta, \varepsilon H), \qquad \frac{R(\Theta, \varepsilon H)}{\varepsilon\|H\|} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0,$$

и тот факт, что $F \in \mathcal{F}_1^\pm(\Theta)$ (см. п. 3), имеем

$$H \in \pm\mathcal{K}, \quad \varphi \in \pm\mathcal{K}^*, \quad \varphi(H) = 0 \implies \frac{\varphi(F'_\pm(\Theta)H)}{\|H\|} + \frac{\varphi(R_\pm(\Theta, \varepsilon H))}{\varepsilon\|H\|} \geq 0.$$

Отсюда следует, что $\varphi(F'_\pm(\Theta)H) \geq 0$, т. е. выполняются условия позитивности систем (4.8).

Для позитивных систем (4.8) условия (4.5) и (4.6) эквивалентны. В силу леммы 4.2 системы (4.8) асимптотически устойчивы. При этом состояние $X \equiv \Theta$ исходной системы (4.4) также асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Теорема доказана.

Гипотеза 4.1. *Пусть система* (4.4) *принадлежит классу* $\mathcal{M}_1(\Theta)$ *относительно нормального телесного конуса* $\mathcal{K}$ *и совместна система конусных неравенств*

$$X_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} \Theta \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_+, \qquad F(X_+) \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} F(X_-). \tag{4.9}$$

Тогда состояние $X \equiv \Theta$ *системы* (4.4) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

***Пример* 4.1.** Рассмотрим нелинейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = Ax + b \odot \sin|x|, \quad x \in R^n, \tag{4.10}$$

где $A \in R^{n\times n}$, $b \in R^n$, $\odot$ и $|\cdot|$ — поэлементные операции произведения и модуля соответственно. Пусть все внедиагональные элементы матрицы A неотрицательны. Тогда (4.10) является системой класса $\mathcal{M}$ относительно конуса неотрицательных векторов $\mathcal{K} = R^n_+$.

Вычислим производные Фреше вектор-функции f по конусам $\pm\mathcal{K}$ в точке $\theta = 0$:

$$f'_+(0) = A + \operatorname{diag}\{b\}, \qquad f'_-(0) = A - \operatorname{diag}\{b\}.$$

Согласно теореме 4.1, решение $x \equiv 0$ системы (4.10) асимптотически устойчиво, если все элементы матриц $-(f'_\pm(0))^{-1}$ неотрицательны. Данное условие в случае $n = 2$ сводится к виду

$$a_{11} + |b_1| < 0, \qquad a_{22} + |b_2| < 0, \qquad |b_1 a_{22} + b_2 a_{11}| < a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_1 b_2.$$

В общем случае для положительной обратимости матриц $-\big(f'_\pm(0)\big)^{-1}$ достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a_{ii} + |b_i| + r(M) < 0, \quad i = \overline{1,n},$$

где $r(M)$ — спектральный радиус неотрицательной матрицы $M = A - A \odot I$. Данное утверждение является следствием теоремы о двусторонней оценке положительно обратимого оператора и следующего факта [1]: $(\gamma I - M)^{-1} \geq 0 \Longleftrightarrow \gamma > r(M)$.

***Пример* 4.2.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (Ax + b) \odot c(x), \qquad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{4.11}$$

где $c(x) = \big[c_1(x_1), \ldots, c_n(x_n)\big]^T$ — непрерывная вектор-функция с неотрицательными компонентами и дифференцируемая в окрестности изолированного положения равновесия $\theta = -A^{-1}b$.

В окрестности точки $x = \theta$ имеем

$$f'(x) = \operatorname{diag}\{c(x)\}\, A + \operatorname{diag}\{Ax + b\}\, c'(x), \qquad f'(\theta) = \operatorname{diag}\{c(\theta)\}\, A.$$

Можно показать, что система (4.11) является монотонной относительно конуса $\mathcal{K} = R^n_+$, если все внедиагональные элементы матрицы A неотрицательны. При этом, согласно теореме 4.1, состояние $x \equiv \theta$ данной системы асимптотически устойчиво, если $c(\theta) \overset{\mathcal{K}}{>} 0$ и все элементы матрицы A^{-1} неположительны.

5. Псевдолинейная дифференциальная система. Рассмотрим нелинейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(x,t)\,x, \qquad x \in R^n, \quad t \geq \tau \geq 0, \tag{5.1}$$

где $A(x,t)$ — непрерывная матрица-функция. Если $x \equiv \theta$ — положение равновесия системы (5.1), то выполняется одно из условий

a) $\theta = 0$; b) $\theta \neq 0$, $A(\theta,t) \equiv 0$; c) $\theta \neq 0$, $A(\theta,t) \not\equiv 0$, $A(\theta,t)\theta \equiv 0$.

Лемма 5.1. *Система* (5.1) *имеет инвариантное множество* $\mathcal{K}(\theta) = \{x\colon x \overset{\mathcal{K}}{\geq} \theta\}$, *где* $\mathcal{K} = R^n_+$ *— конус неотрицательных векторов, если*

$$a_{ij}(x,t) \geq 0, \quad i \neq j, \qquad A(x,t)\theta \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad x \in \partial\mathcal{K}(\theta), \quad t \geq 0. \tag{5.2}$$

В частности, система (5.1) *позитивна относительно конуса* $\mathcal{K}$, *если*

$$a_{ij}(x,t) \geq 0, \quad i \neq j, \qquad x \in \partial\mathcal{K}, \quad t \geq 0. \tag{5.3}$$

Лемма 5.2. *Система* (5.1) *позитивна относительно эллипсоидального конуса* $\mathcal{K}_t = \big\{x\colon x^TQ(t)x \geq 0,\ h^T(t)x \geq 0\big\}$ $\big(h(t)$ *— собственный вектор симметричной дифференцируемой матрицы* $Q(t)$ *с инерцией* $i(Q(t)) = \{1, n-1, 0\}\big)$, *если*

$$\dot{Q}(t) + \alpha(x,t)Q(t) + A^T(x,t)Q(t) + Q(t)A(x,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad x \in \partial\mathcal{K}_t, \quad t \geq 0, \tag{5.4}$$

где $\mathcal{K}$ *— конус симметричных неотрицательно определенных матриц.*

Леммы 5.1 и 5.2 следуют из теоремы 3.1 (см. замечание 3.1).

Можно установить, что производная Гато вектор-функции $f(x,t) = A(x,t)\,x$ представляется в виде

$$f'(x,t) = A(x,t) + \left[\frac{\partial A(x,t)}{\partial x_1}\,x, \ldots, \frac{\partial A(x,t)}{\partial x_n}\,x\right], \tag{5.5}$$

где $\dfrac{\partial A(x,t)}{\partial x_k}$ — матрицы, составленные из производных Гато функций $a_{ij}(x,t)$ по x_k, $k = 1, \ldots, n$. Действительно,

$$\frac{1}{\varepsilon}\big[f(x+\varepsilon h,t) - f(x,t)\big] = A(x+\varepsilon h,t)h + \frac{1}{\varepsilon}\big[A(x+\varepsilon h,t) - A(x,t)\big]x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} A(x,t)h + \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial a_{*j}(x,t)}{\partial x_k} h_k\right) x_j =$$

$$= A(x,t)h + \sum_k \left(\sum_j \frac{\partial a_{*j}(x,t)}{\partial x_k} x_j\right) h_k = f'(x,t)h,$$

где $a_{*j}(x,t)$ — j-й столбец матрицы $A(x,t)$. Если при этом h может быть любым элементом некоторого конуса $\mathcal{K} \subset R^n$, то (5.5) является производной Гато по $\mathcal{K} \subset R^n$ вектор-функции $f(x,t)$. В частности, для конусов $\pm\mathcal{K} = R^n_\pm$ можно использовать выражения

$$f'_\pm(x,t) = A(x,t) + \left[\frac{\partial A(x,t)}{\partial x_{1\pm}}\, x, \ldots, \frac{\partial A(x,t)}{\partial x_{n\pm}}\, x\right],$$

где $\dfrac{\partial A(x,t)}{\partial x_{k\pm}}$ — соответственно правые и левые производные матрицы $A(x,t)$ по x_k, $k = 1, \ldots, n$.

Выделим подкласс систем (5.1) с диагональными матрицами $A(x,t)$:

$$\dot{x} = \operatorname{diag}\{a(x,t)\}x \equiv a(x,t) \odot x, \qquad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{5.6}$$

где $a(x,t)$ — непрерывная вектор-функция, $\odot$ — знак поэлементного произведения векторов. Система (5.6) является обобщенной моделью Колмогорова динамики роста и взаимодействия n популяций [2].

Условия (5.3) выполняются и система (5.6) имеет инвариантный конус $\mathcal{K} = R^n_+$. Для того чтобы система (5.6) была монотонной в конусе $\mathcal{K}$, необходимо и достаточно, чтобы $a \in \mathcal{F}_2^+$.

Линейные системы (4.8) имеют вид

$$\dot{h} = A_\pm(x,t)h, \qquad A_\pm(x,t) = \operatorname{diag}\{x\}\, a'_\pm(x,t) + \operatorname{diag}\{a(x,t)\}, \tag{5.7}$$

где $a'_\pm(x,t)$ — производные по конусам $\pm\mathcal{K}$ вектор-функции $a(x,t)$. Системы (5.7) позитивны относительно $\mathcal{K}$, если все внедиагональные элементы матриц $a'_\pm(x,t)$ при $x \in \mathcal{K}$ неотрицательны. Если вектор-функция $a(x,t)$ дифференцируема по x (в обычном смысле) в каждой точке $x \in \mathcal{K}$, то система (5.6) является монотонной в $\mathcal{K}$ при условиях

$$\frac{\partial a_i(x,t)}{\partial x_j} \geq 0, \qquad i \neq j, \quad x \geq 0.$$

Это означает, в частности, что увеличение каждой популяции приводит к увеличению скорости роста любой другой популяции.

Сформулируем следствие теоремы 4.1 для стационарной системы

$$\dot{x} = A(x)\, x, \qquad x \in R^n, \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{5.8}$$

Теорема 5.1. *Пусть система* (5.8) *принадлежит классу* $\mathcal{M}_1(\theta)$ *относительно конуса* $\mathcal{K} = R^n_+$ *и существуют производные Гато по* $\pm\mathcal{K}$ *вектор-функции* $f(x) = A(x)\, x$ *в точке* $x = \theta$:

$$f'_\pm(\theta) = A(\theta) + B_\pm(\theta), \qquad B_\pm(\theta) = \left[\frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_{1\pm}}\, \theta, \ldots, \frac{\partial A(\theta)}{\partial \theta_{n\pm}}\, \theta\right].$$

Тогда состояние $x \equiv \theta$ *системы* (5.8) *асимптотически устойчиво по Ляпунову, если совместна относительно* x_+ *и* x_- *система неравенств*

$$x_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} \theta \overset{\mathcal{K}}{\leq} x_+, \qquad f'_+(\theta)x_+ \overset{\mathcal{K}}{<} B_+(\theta)\theta, \qquad f'_-(\theta)x_- \overset{\mathcal{K}}{>} B_-(\theta)\theta. \tag{5.9}$$

При использовании теоремы 5.1 необходимо установить принадлежность системы (5.8) классу $\mathcal{M}_1(\theta)$ и решить систему конусных неравенств (5.9). При анализе устойчивости нулевого состояния системы (5.8), не принадлежащей классу $\mathcal{M}_1(\theta)$, а также более общей системы (5.1) можно использовать следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть для некоторой матрицы* $X(t) \equiv X^T(t)$ *выполняются соотношения*

$$\alpha I \overset{\mathcal{K}}{\leq} X(t), \qquad Y(x,t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} 0, \quad x \in S_0, \quad t \geq 0, \tag{5.10}$$

где $\alpha > 0$, $Y(x,t) \triangleq \dot{X}(t) + A^T(x,t)X(t) + X(t)A(x,t)$, $\mathcal{K}$ — *конус симметричных неотрицательно определенных матриц,* S_0 — *некоторая окрестность точки* $x = 0$. *Тогда изолированное состояние равновесия* $x \equiv 0$ *системы* (5.1) *устойчиво по Ляпунову.*

Если же

$$\alpha I \overset{\mathcal{K}}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} \beta I, \qquad Y(x,t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} \gamma I, \quad x \in S_0, \quad t \geq 0, \tag{5.11}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *и* $\gamma < 0$, *то состояние* $x \equiv 0$ *системы* (5.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Данное утверждение устанавливается на основе первой и второй теорем Ляпунова с использованием соотношений

$$\alpha\|x\|^2 \leq \lambda_{\min}(X(t))\|x\|^2 \leq v(x,t) \leq \lambda_{\max}(X(t))\|x\|^2 \leq \beta\|x\|^2,$$

$$\dot{v}(x,t) = x^T Y(x,t)x \leq \lambda_{\max}(Y(x,t))\|x\|^2 \leq \gamma\|x\|^2,$$

где $v(x,t) = x^T X(t)x$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ $(\lambda_{\min}(\cdot))$ — максимальное (минимальное) собственное число симметричной матрицы. При этом $v(x,t)$ — функция Ляпунова соответственно первого и второго рода, а $\dot{v}(x,t)$ — ее производная на решениях системы (5.1).

Теорема 5.2 дает общие методы анализа устойчивости и асимптотической устойчивости нулевых состояний равновесия класса систем (5.1), в частности (5.6) и (5.8), на основе решений систем функциональных матричных неравенств (5.10) и (5.11).

6. Позитивные дифференциальные системы с запаздыванием. Рассмотрим класс нелинейных дифференциальных систем с запаздыванием

$$\dot{X}(t) + L(t)X(t) = G(X(t-s),t), \qquad G(0,t) \equiv 0, \quad t \geq \tau \geq 0, \tag{6.1}$$

где $s > 0$ — постоянное запаздывание, $L(t)\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{E}$, $G(X,t)$ — непрерывная оператор-функция, удовлетворяющая условиям существования единственного решения $X(t) \in \mathcal{E}$ при начальных условиях

$$X(\xi) = \Psi(\xi), \quad \tau - s \le \xi \le \tau. \tag{6.2}$$

Система (6.1) называется позитивной относительно конуса $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{E}$, если для любого $\tau \ge 0$ из $\Psi(\xi) \overset{\mathcal{K}_\xi}{\ge} 0$ при всех $\xi \in [\tau - s, \tau]$ следует, что $X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\ge} 0$ при $t > \tau$.

Теорема 6.1. *Дифференциальная система* (6.1) *позитивна относительно постоянного конуса $\mathcal{K}$ в том и только в том случае, когда для любых $\tau \ge 0$ и $t \ge \tau$ выполняются включения*

$$W(t,\tau)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \qquad G(\mathcal{K}, t) \subseteq \mathcal{K}, \tag{6.3}$$

где $W(t,\tau)$ — эволюционный оператор линейной системы

$$\dot X(t) + L(t)X(t) = 0, \quad t \ge \tau \ge 0. \tag{6.4}$$

Доказательство. Определим последовательность $t_k = \tau + ks$, $k = 0, 1, \ldots.$ Тогда решение системы (6.1) при условиях (6.2) на каждом интервале $[t_k, t_{k+1}]$ удовлетворяет интегральным соотношениям

$$X(t) = W(t, t_k)X(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t} W(t,\xi)G(X(\xi - s), \xi)d\xi, \quad t_k \le t \le t_{k+1}. \tag{6.5}$$

Справедливость данных соотношений можно непосредственно установить путем дифференцирования, используя определение эволюционного оператора как решения задачи Коши

$$\frac{d}{dt}W(t,\xi) + L(t)W(t,\xi) = 0, \qquad W(\xi,\xi) = E, \quad t \ge \xi, \tag{6.6}$$

где E — тождественный оператор. Следовательно, если в (6.2) $\Psi(\xi) \in \mathcal{K}$, то $X(t) \in \mathcal{K}$ при $t_k \le t \le t_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Покажем, что включения (6.3) необходимы для позитивности системы (6.1). Если

$$X(\xi) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \le \xi \le t_k - \varepsilon, \\ \Psi(\xi), & t_k - \varepsilon \le \xi \le t_k, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$, $\Psi(\xi) \in \mathcal{K}$, то, согласно (6.5),

$$X(t) = W(t, t_k)X(t_k) \in \mathcal{K}, \quad t_k \le t \le t_{k+1} - \varepsilon.$$

В силу замкнутости конуса $\mathcal{K}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем первое включение (6.3) на интервале $t_k \le t \le t_{k+1}$. Его выполнение при любом $t \ge \tau$ является следствием мультипликативного представления оператора

$$W(t, t_0) = W(t, t_k)W(t_k, t_{k-1}) \ldots W(t_1, t_0), \quad t_k \le t \le t_{k+1},$$

где k — некоторое натуральное число.

Если $X(\tau) = 0$, то для некоторого $\xi \in (\tau, t)$ имеем

$$X(t) = (t-\tau)W(t,\xi)G(X(\xi-s),\xi), \quad t > s,$$

$$X(\xi-s) \in \mathcal{K} \implies W(t,\xi)G(X(\xi-s),\xi) \in \mathcal{K}.$$

При этом если $t \to \tau$, то $\xi \to \tau$ и $W(t,\xi) \to E$. В силу замкнутости конуса и непрерывной зависимости W и G от своих аргументов $G(X,\tau)$ принадлежит $\mathcal{K}$, лишь только $X = X(\tau - s) \in \mathcal{K}$. Поэтому второе включение (6.3) также необходимо для позитивности системы (6.1).

Теорема доказана.

Теорема 6.1 является обобщением известного критерия позитивности класса систем (6.1) относительно конуса неотрицательных векторов R_+^n [13].

Рассмотрим подкласс автономных дифференциальных систем с запаздыванием

$$\dot{X}(t) + LX(t) = G(X(t-s)), \qquad G(0) = 0, \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{6.7}$$

Если в (6.2) $\Psi(\xi) \equiv 0$, то $X \equiv 0$ — тривиальное решение системы (6.7).

Тривиальное решение $X \equiv 0$ системы (6.7) устойчиво по Ляпунову, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \geq 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon,\tau) > 0$, что из неравенства $\|X(\tau)\|_s < \delta$ следует $\|X(t)\| < \varepsilon$ при всех $t > \tau$, где $\|X(\tau)\|_s = \max\limits_{\tau-s\leq\xi\leq\tau} \|X(\xi)\|$. Решение $X \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого $\tau \geq 0$ существует $\delta = \delta(\tau) > 0$ такое, что для каждого решения $X(t)$ системы (6.7) из $\|X(\tau)\|_s < \delta$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0$. Решение $X \equiv 0$ абсолютно устойчиво, если оно асимптотически устойчиво при любом $s \geq 0$.

Теорема 6.2. *Пусть выполняются условия*

$$e^{Lt}X \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \qquad 0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} G(X) \overset{\mathcal{K}}{\leq} PX, \qquad X \in \mathcal{K}, \quad t \geq 0, \tag{6.8}$$

где P — линейный положительный оператор, и существуют линейные равномерно положительные функционалы $\varphi, \psi \in \mathcal{K}^*$, удовлетворяющие уравнению

$$M^*\varphi = \psi, \qquad M \triangleq L - P. \tag{6.9}$$

Тогда решение $X \equiv 0$ системы (6.7) *абсолютно устойчиво.*

Доказательство. Согласно теореме 6.1, система (6.7) при условиях (6.8) является позитивной. Построим функционал Ляпунова – Красовского

$$V(X_t) = \varphi(X(t)) + \int\limits_{-s}^{0} \varphi\left(G(X(t+\xi))\right) d\xi, \tag{6.10}$$

где $X_t(\xi) = x(t+\xi)$, $\varphi \in \mathcal{K}^*$. Выражение (6.10) является обобщением функционала, использованного в работе [13] в случае конуса R_+^n.

Отметим, что для любого равномерно положительного функционала выполняется оценка [1]

$$\gamma_- \|X\| \leq \varphi(X) \leq \gamma_+ \|X\|, \quad X \in \mathcal{K},$$

где $\gamma_\pm > 0$ — некоторые константы, не зависящие от X. Поэтому имеет место неравенство $V(\Psi) \geq \varphi(\Psi(0)) \geq \gamma_- \|\Psi(0)\|$.

Производная функционала (6.10) на решениях системы (6.7) с использованием (6.8) и (6.9) удовлетворяет соотношениям

$$\dot{V}(X_t) = \varphi(-LX(t) + G(X(t))) \leq -\varphi(MX(t)) = -\psi(X(t)) \leq -\gamma\|X(t)\|,$$

где $\gamma > 0$. Следовательно, решение $X \equiv 0$ позитивной системы (6.7) асимптотически устойчиво при любом $s \geq 0$ [14].

Теорема доказана.

Теорема 6.2 является обобщением критерия абсолютной устойчивости дифференциальных систем типа (6.11), позитивных относительно конуса R^n_+ [13].

Пусть конусы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^*$ являются телесными в соответствующих пространствах $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$. При условиях теоремы 6.2 оператор M^* должен быть положительно обратимым, причем $(M^*)^{-1} = (M^{-1})^*$. Поэтому при построении критериев абсолютной устойчивости линейной системы

$$\dot{X}(t) + LX(t) = PX(t-s), \quad t \geq \tau \geq 0, \tag{6.11}$$

вместо уравнения (6.9) можно рассматривать аналогичное уравнение с оператором M.

Теорема 6.3. *Для позитивной системы* (6.11) *эквивалентны следующие утверждения*:

1) *решение* $X \equiv 0$ *системы* (6.11) *абсолютно устойчиво*;
2) *оператор* $M = L - P$ *положительно обратим*;
3) *существуют* $X, Y \in \operatorname{int}\mathcal{K}$, *удовлетворяющие уравнению* $MX = Y$;
4) $\operatorname{Re}\lambda \leq \alpha < 0 \;\; \forall \lambda \in \sigma(M)$.

***Замечание* 6.1.** Если $P\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \subseteq L\mathcal{K}$, то в теореме 6.3 каждое из утверждений 1 – 4 эквивалентно утверждению (см., например, [8])

5) $\rho(T) < 1$, где $\rho(T)$ — спектральный радиус пучка операторов $T(\lambda) = P - \lambda L$.

***Пример* 6.1.** Линейная дифференциальная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-s) \tag{6.12}$$

позитивна относительно конуса неотрицательных векторов $\mathcal{K} = R^n_+$ в том и только в том случае, когда внедиагональные элементы матрицы $A(t)$ и все элементы матрицы $B(t)$ неотрицательны при $t \geq 0$. Если при этом матрицы A и B постоянны, то абсолютная устойчивость решения $x \equiv 0$ системы (6.12) эквивалентна совместности системы неравенств $(A+B)x \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} x$.

***Пример* 6.2.** Нелинейная матричная система

$$\dot{X}(t) + A(t)X(t) + X(t)A^*(t) = B(t)X(t-s)B^*(t) + X(t-s)C(t)X(t-s) \tag{6.13}$$

позитивна относительно конуса эрмитовых неотрицательно определенных матриц $\mathcal{K}$, если $C(t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ при $t \geq 0$. В данном случае систему (6.4) описывает оператор Ляпунова $L(t)X = A(t)X + XA^*(t)$, а операторы

$$W(t,\tau)X = \Delta(t,\tau)X\Delta^*(t,\tau), \qquad G(X,t) = B(t)XB^*(t) + XC(t)X,$$

где $\Delta(t,\tau)$ — матрицант системы $\dot{x} + A(t)x = 0$, являются положительными относительно конуса $\mathcal{K}$ при $t \geq \tau \geq 0$. В случае постоянных матриц A, B и $C = 0$ нулевое решение позитивной системы (6.13) абсолютно устойчиво, если для некоторой положительно определенной матрицы $Y = Y^* > 0$ матричное алгебраическое уравнение

$$AX + XA^* - BXB^* = Y$$

имеет положительно определенное решение $X = X^* > 0$.

1. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
2. *Hirsch M. W., Smith H.* Competitive and cooperative systems: mini-review. Positive systems // Lect. Notes Control and Inform. Sci. – 2003. – **294**. – P. 183 – 190.
3. *Farina L., Rinaldi S.* Positive linear systems. Theory and applications. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
4. *Angeli D., Sontag E. D.* Multi-stability in monotone input/output systems // Systems and Control Lett. – 2004. – **51**. – P. 185 – 202.
5. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибирск: Наука, 1980. – 480 с.
6. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
7. *Мазко А. Г.* Устойчивость и сравнение состояний динамических систем относительно переменного конуса // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 2. – С. 198 – 213.
8. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1999. – **28**. – 216 с.
9. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 233 с.
10. *Мазко А. Г.* Устойчивость позитивных и монотонных систем в полуупорядоченном пространстве // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 462 – 475.
11. *Алілуйко А. М., Мазко О. Г.* Інваріантні множини та порівняння динамічних систем // Нелінійні коливання. – 2007. – **10**, № 2. – С. 163 – 176.
12. *Мазко А. Г.* Производные по конусу от операторов монотонных систем // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 1. – С. 217 – 228.
13. *Haddad W. M., Chellaboina V.* Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay // Systems and Control Lett. – 2004. – **51**. – P. 355 – 361.
14. *Hale J. K., Lunel S. M. V.* Introduction to functional differential equations. – New York: Springer, 1993. – 447 p.

Получено 23.08.07