УДК 519.71:510.22:519.21

М. М. Личак (Ін-т косм. досліджень НАН України, Київ)

ІНТЕРВАЛЬНА ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ОБМЕЖЕНОЇ ХАОТИЧНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ЯК ОСНОВА НЕАКСІОМАТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

The notion of interval function of the distribution of accidental events over a set of elementary events as well as the notion of interval function of frequencies of these events are introduced. In the limiting case, the interval function of distribution turns to a standard distribution function, while the interval function of frequencies (under certain conditions) turns to the denseness of distribution of accidental events. The case of a discrete set of elementary events is also included in the consideration, which allows one to obtain the notion of the probability of occurrence of an accidental event as a result of boundary transition.

Введены понятия интервальной функции распределения случайных событий на множестве элементарных событий, а также интервальной функции частот этих событий. В предельном случае интервальная функция превращается в обыкновенную функцию распределения, а интервальная функция частот (при определенных условиях) — в плотность распределения случайных событий. При этом охвачен случай дискретного множества элементарных событий, что дало возможность получить понятие вероятности появления случайного события как следствия граничного перехода.

1. Вступ. Розглянемо явища, досліди і експерименти, результати яких є неоднозначними при повторюваності, хоча їхні параметри і зовнішні фактори при цьому є незмінними. Більшість дослідників використовують імовірнісні моделі невизначеності [1, 2]. Математичною основою сучасної теорії ймовірностей є аксіоматичний підхід, сформульований А. М. Колмогоровим [3], в якому введено поняття простору елементарних подій та те, що система випадкових подій є алгеброю. При цьому ймовірність трактується як спеціальна функція, визначена на цій системі випадкових подій.

З іншого боку, почав інтенсивно розвиватися так званий інтервальний аналіз (або множинний підхід), де використовується припущення, що самі числові результати повністю не визначено, а відомо лише деякі числові інтервали (або множини), яким безумовно належать їх істинні значення [4]. Проте при такому підході (в існуючому вигляді) не враховуються певні закономірності реалізації цих результатів всередині виділених інтервалів (множин) при повторенні відповідних експериментів, дослідів чи явищ.

Водночас існували спроби побудови теорії ймовірностей на основі трактування результатів статистичної обробки послідовностей експериментальних даних, зокрема в 1919 р. Р. фон Мізесом [5]. Проте ці спроби не привели до побудови строгої теорії, хоча викликали дискусії в подальшому з приводу відповідності результатів теорії Колмогорова до проблем їх застосування для потреб статистики. Найбільш радикальною тут, напевно, є концепція семантичного домінування „статистичних характеристик над характеристиками ймовірнісними”, запропонована Ю. І. Алімовим [6].

У даній статті запропоновано підхід до побудови математичної моделі таких подій на основі теорії множин і поняття алгоритму хаотичного вибору елементів множини. З урахуванням якісної відмінності від імовірнісного підходу говориться про хаотичні події і процеси [7 – 9]. Випадкові події і процеси трактуються як частинний випадок, коли певні властивості проявляються при розгляді граничних випадків аналізу випадкових послідовностей, складених із вибраних елементів даної множини. Запропонована теорія хаотичності будується на основі застосування теоретико-множинного підходу до побудови математичної моделі невизначеності. При цьому в загальному випадку будь-яка подія не обов’язково реалізується у вигляді числа, а є деяким вибраним елементом множини. Випадок, коли події є числами, розглядається окремо.

Виділений клас хаотичних подій охоплює також дані встановлених коливань у режимі „хаосу" в нелінійних динамічних системах [10, 11].

2. Хаотичні події та їх інтервальні характеристики. Будемо вважати, що можливі прояви досліджуваного явища, результати розглядуваного досліду або спостереження утворюють деяку замкнену обмежену упорядковану множину елементарних подій X_0. Реалізація того чи іншого прояву, результату або спостереження є елементом x цієї множини

$$x \in X_0. \tag{1}$$

Упорядкованість множини X_0 означає, що для будь-яких двох різних її елементів установлено правило, за яким один із цих елементів передує іншому. Позначимо $a < b$, якщо $a \in X_0$ і $b \in X_0$, але a є елементом X_0, що передує b, причому тоді не може бути $b < a$. Позначення $a \leq b$ або $b \geq a$ означає, що b може збігтися з a. Крім того, якщо $a < b$ або $b > a$ і $b < c$ або $c > b$, то $a < c$ або $c > a$ (транзитивність). Зокрема, такою множиною може бути деякий скінченний набір раціональних чисел, замкнений інтервал або об'єднання деякого числа замкнених інтервалів на числовій осі.

Якщо явище, дослід чи спостереження реалізується багато разів при збереженні основних факторів або умов, то цьому буде відповідати деяка послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n — поточний номер повторення) елементів множини X_0, які вибираються з неї згідно з деяким алгоритмом вибору (вибір не означає „вичерпування" множини, тобто на кожному кроці його реалізації множина залишається незмінною, а кожен її елемент в загальному випадку може вибиратись неодноразово).

Якщо цей алгоритм вибору є відомим, то говорять про детерміновану послідовність, для якої всі значення можуть бути наперед розраховані, а отже прогнозовані відповідно до даного алгоритму.

Якщо ж такий алгоритм вибору не є відомим, а вибір елементів послідовності x_n, $n = 1, 2, \ldots$, з множини X_0 здійснюється під впливом неконтрольованих і невідомих чинників, то будемо говорити про невизначену послідовність, значення котрої безумовно належать заданій множині, але попередньо їх розрахувати, а отже, і точно спрогнозувати неможливо. Проте, не знаючи алгоритму вибору, у багатьох випадках можна мати деяку інформацію про його властивості, а значить, і про властивості послідовності, що формується ним.

На упорядкованій замкненій обмеженій множині X_0, для якої існують граничні точки $x_{\min}$ і $x_{\max}$ такі, що для всіх $x \in X_0$ маємо $x \geq x_{\min}$ і $x \leq x_{\max}$, введемо таку функцію від $x \in X_0$ і членів будь-якої невизначеної послідовності x_n, $n = 1, 2, \ldots$, що

$$F(x, x_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_n \leq x, \\ 0 & \text{при} \quad x_n > x. \end{cases} \tag{2}$$

Означення 1. *Нижньою і верхньою гранями інтервальної функції розподілу членів обмеженої згідно з* (1) *послідовності* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *будемо називати такі функції*

$$1 \geq P_{\text{н}}(x, N) \geq 0, \qquad 0 \leq P_{\text{в}}(x, N) \leq 1, \tag{3}$$

де $x \in X_0$, *а* $N = 1, 2, \ldots$ — *послідовні значення кількості розглядуваних підряд будь-яких членів послідовності, що для функцій* (3) *і відповідних членів послідовності згідно з* (2) *виконується система нерівностей*

$$P_{\text{н}}(x, N) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} F(x, x_{n+i}) \leq P_{\text{в}}(x, N) \qquad \forall n = 1, 2, \ldots, \quad N = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Послідовність, для якої існує інтервальна функція розподілу, тобто її нижня і верхня грані, будемо називати хаотичною, а члени цієї послідовності — хаотичними подіями.

Означення 2. *Якщо для всіх* $x \in X_0$ *та функцій* (3) *за означенням* 1 *існують*

$$\lim_{N\to\infty} P_{\text{н}}(x, N) = \lim_{N\to\infty} P_{\text{в}}(x, N) = P(x), \tag{5}$$

то таку хаотичну послідовність будемо називати випадковою, а функцію $P(x)$ *— функцією розподілу випадкових подій — членів випадкової послідовності на множині* X_0.

Тобто ймовірнісна характеристика отримується з інтервальної функції розподілу в результаті граничного переходу, якщо він існує.

На замкненій упорядкованій множині елементарних подій X_0 введемо таку функцію $\Delta F(\cdot)$ від $x \in X_0$, $x^{(l)} \in X_0$, $x^{(l)} \le x$, та членів будь-якої хаотичної послідовності x_n, $n = 1, 2, \ldots$, що

$$\Delta F(x^{(l)}, x, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x^{(l)} \le x_n \le x, \\ 0 & \text{при} \quad x_n > x \quad \text{чи} \quad x_n < x^{(l)}. \end{cases} \tag{6}$$

Означення 3. *Для хаотичної послідовності* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *існує інтервальна функція частот членів цієї послідовності, тобто існують нижня і верхня грані цієї інтервальної функції у вигляді функцій*

$$0 \le \Delta P_{\text{н}}(x^{(l)}, x, N) \le 1, \quad 0 \le \Delta P_{\text{в}}(x^{(l)}, x, N) \le 1, \tag{7}$$
$$x \in X_0, \quad x^{(l)} \in X_0, \quad x^{(l)} \le x, \quad N = 1, 2, \ldots,$$

такі, що для функцій (7) *і відповідних членів послідовності згідно з* (6) *виконується система нерівностей*

$$\Delta P_{\text{н}}(x^{(l)}, x, N) \le \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \Delta F(x^{(l)}, x, x_{n+i}) \le \Delta P_{\text{в}}(x^{(l)}, x, N) \tag{8}$$
$$\forall n = 1, 2, \ldots, \quad N = 1.$$

Очевидно, що при $x^{(l)} = x_{\min}$

$$\begin{aligned} \Delta P_{\text{н}}(x_{\min}, x, N) &= P_{\text{н}}(x, N), \\ \Delta P_{\text{в}}(x_{\min}, x, N) &= P_{\text{в}}(x, N), \end{aligned} \tag{9}$$

що доводить існування функцій $\Delta P_{\text{н}}(x^{(l)}, x, N)$ і $\Delta P_{\text{в}}(x^{(l)}, x, N)$ при інших значеннях $x^{(l)}$, оскільки згідно з (4) і (9) для них існують обмеження знизу і зверху.

З іншого боку, для всіх $x \in X_0$, $x^{(l)} \in X_0$, $x^{(l)} \le x$, $N = 1, 2, \ldots$,

$$\begin{aligned} \Delta P_{\text{в}}(x^{(l)}, x, N) &\le P_{\text{в}}(x, N) - P_{\text{н}}(x^{(l)}, N), \\ \Delta P_{\text{н}}(x^{(l)}, x, N) &\ge P_{\text{н}}(x, N) - P_{\text{в}}(x^{(l)}, N). \end{aligned} \tag{10}$$

***Наслідок* 1.** *Якщо для випадкової послідовності* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *за означенням* 2 *існує функція розподілу* $P(x)$ *випадкових подій на множині елемен-*

тарних подій X_0, *то відповідно до означення* 3 *існує функція частот цих випадкових подій*

$$\Delta P(x^{(l)}, x) = \lim_{N \to \infty} \Delta P_{\text{н}}(x^{(l)}, x, N) = \lim_{N \to \infty} \Delta P_{\text{в}}(x^{(l)}, x, N), \tag{11}$$

причому для неперервної функції $P(x)$

$$\Delta P(x^{(l)}, x) = P(x) - P(x^{(l)}) \qquad \forall x \in X_0, \quad x^{(l)} \in X_0, \quad x^{(l)} \le x. \tag{12}$$

Справедливість співвідношень (11) і (12) безпосередньо випливає з (5) та нерівностей (8), (10).

3. Числові хаотичні події та їх інтервальні характеристики. В подальшому для простоти будемо вважати, що множина елементарних подій X_0 має вигляд замкненого інтервалу на числовій осі $[x_{\min}; x_{\max}]$, де $x_{\min} < x_{\max}$ — деякі числа (отримані в подальшому результати легко можна узагальнити на випадок об'єднання декількох таких інтервалів). Тобто будь-яка числова хаотична послідовність x_n, $n = 1, 2, \ldots$, що вибирається з цієї множини, задовольняє умову

$$x_{\min} \le x_n \le x_{\max} \qquad \forall n = 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Розглянемо тепер випадок числової хаотичної послідовності, для якої виконуються нерівності вигляду (4) і (13).

Наслідок 2. *Якщо для членів числової випадкової послідовності, згідно з означенням* 2, *існує неперервна і диференційовна функція їх розподілу* $P(x)$ *відповідно до* (4) *і* (5), *а отже, згідно з наслідком* 1, *і функція частот їх розподілу відповідно до* (11) *і* (12), *то існує функція* $\rho(x)$, *яку будемо називати щільністю розподілу членів випадкової послідовності і відповідно до позначення* $\Delta x = x - x^{(l)}$ *означимо як*

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \Delta P(x, x - \Delta x) = \frac{dP(x)}{dx}, \qquad P(x) = \int_{x_{\min}}^{x} \rho(u)\,du. \tag{14}$$

Функція (14) відповідає відомому поняттю щільності ймовірності для аксіоматичної теорії ймовірностей [1, 3]. Оскільки для існування функції $\rho(x)$ вимагається виконання достатньо жорстких вимог (5) і додатково ще й неперервність та диференційовність (хоча можна послабити цю вимогу до існування кускової диференційовності) функції розподілу $P(x)$, звідси випливають причини труднощів дослідників, зокрема Р. фон Мізеса [5], які намагались покласти поняття ймовірності в основу методології роботи з числовими випадковими послідовностями. В рамках даного підходу поняття ймовірності апріорі не вводиться і безпосередньо не використовується, а функція $\rho(x)$, як і функція $P(x)$, є деякими граничними випадками, котрі існують лише за певних умов. Вони випливають із більш загальних понять інтервальної функції розподілу хаотичних подій та інтервальної функції частот цих подій відповідно до означення 2 і наслідку 1.

Твердження 1. *Для інтервальної функції розподілу членів дискретної числової хаотичної послідовності* x_n, $n = 1, 2, \ldots$ (*згідно з означенням* 1) *існує відповідна інтервальна функція середнього на будь-якому ковзному інтервалі шириною* N, *нижня і верхня грані якої визначаються як функції від ширини розглядуваного інтервалу*

$$m_{\text{н}}(N) = x_{\max} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_{\text{в}}(x, N)\,dx, \tag{15}$$

$$m_{\text{в}}(N) = x_{\max} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_{\text{н}}(x, N)\,dx,$$

а значення членів будь-якої її частини задовольняють систему нерівностей

$$m_{\text{н}}(N) \le \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i} \le m_{\text{в}}(N) \qquad \forall n = 1, 2, \ldots, \quad N = 1, 2, \ldots . \tag{16}$$

Дійсно, обчислимо

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F(x, x_n)\,dx = \int_{x_n}^{x_{\max}} dx = x_{\max} - x_n, \tag{17}$$

звідки

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} F(x, x_{n+i})\right] dx = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F(x, x_{n+i})\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} (x_{\max} - x_{n+i}).$$

Візьмемо такий же інтеграл від інших членів співвідношення (4) для цього випадку (розглядаючи N як параметр) і отримаємо нерівності вигляду

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_{\text{н}}(x, N)\,dx \le \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} (x_{\max} - x_{n+i}) \le \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_{\text{в}}(x, N)\,dx. \tag{18}$$

Нерівності (18) можна записати у вигляді (16).

Зауважимо, що подібного твердження немає в аксіоматичній теорії ймовірностей. Спроби, знаючи функцію розподілу $P(x)$, визначити через неї гарантовані інтервальні оцінки для скінченних частин послідовності, є некоректними.

Нерівності (16) в явному вигляді виділяють обмеження на середньоарифметичне значення членів будь-якої частини числової хаотичної послідовності певної довжини та встановлюють зв'язок цих обмежень із гранями інтервальної функції розподілу числових хаотичних подій.

Очевидно, що система лінійних нерівностей (16) конструктивним чином в явному вигляді виділяє множину типу поліедра [12, 13] у просторі значень членів числової хаотичної послідовності, а (18) встановлює прямий взаємозв'язок між гранями інтервальної функції розподілу числових хаотичних подій і спільними обмеженнями на середньоарифметичне значення членів будь-якої частини числової хаотичної послідовності певної довжини.

***Наслідок* 3.** *Якщо виконуються умови* (5) *і* (13), *то за умов наслідку* 2 *існує*

$$\lim_{N\to\infty} m_{\text{н}}(N) = \lim_{N\to\infty} m_{\text{в}}(N) = m_0 = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x\rho(x)\,dx = x_{\max} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P(x)\,dx, \tag{19}$$

де m_0 *— середньоарифметичне значення послідовності числових випадкових подій на множині* X_0, *що виділяється умовою* (13), *яке повністю відповідає поняттю математичного сподівання числової випадкової величини за аксіоматичною теорією ймовірностей* [1, 3].

Справедливість (19) випливає з того факту, що згідно з (14)

$$m_0 = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x \frac{dP(x)}{dx} dx = x P(x)\Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P(x) dx = x_{\max} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P(x) dx, \quad (20)$$

а отже, відповідно до (5) і (20) із (15) випливає (19).

4. Інтервальні характеристики послідовностей квантованих за рівнем хаотичних подій. Потрібно окремо розглянути важливий випадок, коли ця множина є скінченною, тобто містить лише скінченне число різних елементів. Для числового інтервалу це означає, що в ньому виділено певну кількість різних чисел, а вибір здійснюється лише серед них. Зазначимо, що основи теорії ймовірностей формувались якраз для такого випадку [14].

Очевидно, що члени сформованої із них послідовності будуть квантовані за рівнем. Тому в загальному випадку теж будемо говорити про послідовності квантованих за рівнем хаотичних подій. Наприклад, розглядаючи множину будинків, можемо розрізняти одноповерхові, двоповерхові і т. д., але для даного міста (регіону) — не вище тридцятиповерхового.

Нехай маємо замкнену обмежену множину елементарних подій, яка є скінченною й упорядкованою, і на ній існують граничні елементи $x_{\min}$ і $x_{\max}$. У подальшому таку множину будемо позначати $\dddot{X}_0$ і називати дискретною. Тобто дискретна множина елементарних подій $\dddot{X}_0$ містить певне число m різних елементів $x^{(j)}$, $j = \overline{1, m}$, для яких установлено правило $x^{(j-1)} < x^{(j)}$, $j = \overline{2, m}$, тобто $(j-1)$-й елемент передує j-му, а також виконується правило транзитивності, тобто $x^{(j-1)} < x^{(j+1)}$, $j = \overline{2, m-1}$ і т. д. Відповідно $x^{(1)} = x_{\min}$, $x^{(m)} = x_{\max}$.

Будемо вважати, що із m елементів множини $\dddot{X}_0$ згідно з хаотичним алгоритмом вибору формується послідовність хаотичних подій x_n, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді справедливим є наступне твердження.

***Наслідок* 4** (із означення 1). *Для послідовності хаотичних подій* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *яку сформовано відповідним хаотичним алгоритмом вибору з елементів дискретної множини елементарних подій* $\dddot{X}_0$, *існує інтервальна функція розподілу хаотичних подій, яка є дискретною, в тому сенсі, що її нижня* $\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(j)}, N)$ *та верхня* $\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(j)}, N)$ *грані, де* $x^{(j)} \in \dddot{X}_0$, $j = \overline{1, m}$, $N = 1, 2, \ldots$, *будуть дискретними функціями відносно аргументів* $x^{(j)}$, $j = \overline{1, m}$, $N = 1, 2, \ldots$, *тобто значення цих функцій визначено лише при дискретних значеннях аргументів. Дискретні функції* $0 \le \dddot{P}_{\text{н}}(x^{(j)}, N) \le 1$ *і* $0 \le \dddot{P}_{\text{в}}(x^{(j)}, N) \le 1$ *є частинним випадком функцій* $P_{\text{н}}(x, N)$ *і* $P_{\text{в}}(x, N)$ *із означення* 2, *для них при всіх* $j = \overline{1, m}$ *виконуються нерівності вигляду*

$$\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(j)}, N) \le \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \dddot{F}(x^{(j)}, x_{n+i}) \le \dddot{P}_{\text{в}}(x^{(j)}, N) \quad \forall n = 1, 2, \ldots, \ N = 1, 2, \ldots, \quad (21)$$

де

$$\dddot{F}(x^{(j)}, x_n) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_n \le x^{(j)}, \\ 0 & \text{при} \quad x_n > x^{(j)}, \end{cases} \quad (22)$$

з урахуванням того факту, що $x^{(j)} \in \dddot{X}_0$, $j = \overline{1, m}$.

***Наслідок* 5** (із означення 2). *Нехай послідовність хаотичних подій* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *сформовано відповідним хаотичним алгоритмом із елементів* *дискретної множини елементарних подій* $\dddot{X}_0$. *Якщо для нижньої та верхньої граней відповідної дискретної інтервальної функції розподілу хаотичних подій існує*

$$\lim_{N\to\infty} \dddot{P}_{\text{н}}(x^{(j)}, N) = \lim_{N\to\infty} \dddot{P}_{\text{в}}(x^{(j)}, N) = \dddot{P}(x^{(j)}), \tag{23}$$

де функція $\dddot{P}(x^{(j)}, N)$ *теж є дискретною, тобто визначеною лише при дискретних значеннях аргументу* $x^{(j)} \in \dddot{X}_0$, $j = \overline{1, m}$, *то такі хаотичні події будемо називати квантованими за рівнем випадковими подіями, а функцію* $\dddot{P}(x^{(j)}, N)$ — *дискретною функцією розподілу випадкових подій на дискретній множині елементарних подій* $\dddot{X}_0$.

На даній дискретній множині $\dddot{X}_0$ введемо індикативну функцію $\Delta\dddot{F}(x^{(l)}, x^{(j)}, x_n)$, $l = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, $l \le j$, де

$$\Delta\dddot{F}(x^{(l)}, x^{(j)}, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x^{(l)} \le x_n \le x^{(j)}, \\ 0 & \text{при} \quad x_n > x^{(j)} \quad \text{чи} \quad x_n < x^{(l)}. \end{cases} \tag{24}$$

***Наслідок* 6** (із означення 3). *Якщо послідовність хаотичних подій* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *сформовано хаотичним алгоритмом вибору з елементів дискретної множини елементарних подій* $\dddot{X}_0$, *то відповідно до означення* 3 *існує інтервальна функція частот цих хаотичних подій, яка є дискретною, в тому сенсі, що її нижня* $\Delta\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N)$ *та верхня* $\Delta\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N)$ *грані, де* $x^{(l)} \in \dddot{X}_0$, $x^{(j)} \in \dddot{X}_0$, $l, j = \overline{1, m}$, $l \le j$, $N = 1, 2, \ldots$, *будуть дискретними функціями відносно аргументів* $x^{(l)}$, $x^{(j)}$, $l, j = \overline{1, m}$, $l \le j$, *і* $N = 1, 2, \ldots$, *тобто значення цих функцій визначено лише при дискретних значеннях аргументів. Для дискретних функцій* $0 \le \Delta\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N) \le 1$ *і* $0 \le \Delta\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N) \le 1$ *при всіх* $l, j = \overline{1, m}$, $l \le j$, *виконуються нерівності вигляду*

$$\Delta\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N) \le \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \Delta\dddot{F}(x^{(l)}, x^{(j)}, x_{n+i}) \le \Delta\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N) \tag{25}$$

$$\forall n = 1, 2, \ldots, \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

з урахуванням того факту, що $x^{(l)} \in \dddot{X}_0$, $x^{(j)} \in \dddot{X}_0$, $l, j = \overline{1, m}$, $l \le j$.

Очевидно, що при $x^{(l)} = x_{\min} = x^{(1)}$

$$\begin{aligned} \Delta\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(1)}, x^{(j)}, N) &= \dddot{P}_{\text{н}}(x^{(j)}, N), \\ \Delta\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(1)}, x^{(j)}, N) &= \dddot{P}_{\text{в}}(x^{(j)}, N), \end{aligned} \tag{26}$$

що доводить існування функцій $\Delta\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N)$ і $\Delta\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N)$ при інших значеннях $x^{(l)}$, оскільки згідно з (21) і (26) для них існують обмеження зверху і знизу.

З іншого боку, виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \Delta\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N) &\le \dddot{P}_{\text{в}}(x^{(j)}, N) - \dddot{P}_{\text{н}}(x^{(l-1)}, N), \qquad \dddot{P}_{\text{н}}(x^{(0)}, N) = 0, \\ \Delta\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N) &\ge \dddot{P}_{\text{н}}(x^{(j)}, N) - \dddot{P}_{\text{в}}(x^{(l-1)}, N), \qquad \dddot{P}_{\text{в}}(x^{(0)}, N) = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\forall x^{(j)} \in X_0, \quad x^{(l)} \in X_0, \quad l, j = \overline{1, m}, \quad l \le j, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

***Наслідок* 7** (із означення 3 та наслідку 6). *Інтервальне значення функції частот хаотичних подій, з яких відповідним хаотичним алгоритмом вибору із дискретної множини елементарних подій* $\dddot{X}_0$ *сформовано послідовність* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *при* $l = j$ *в формулах* (24) *і* (25) *задає інтервальну оцінку частоти появи хаотичної події* $x^{(j)}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, *тобто*

$$\{N^{(j)}(N)\}/N \in \left[\Delta\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(j)}, x^{(j)}, N);\ \Delta\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(j)}, x^{(j)}, N)\right], \qquad N = 1, 2, \ldots , \tag{28}$$

де $N^{(j)}(N)$ — *кількість хаотичних подій* $x^{(j)}$, *що відбуватимуться на інтервалі елементів сформованої послідовності* x_n *шириною* $[n, n+N-1]$ *при будь-якому* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

***Наслідок* 8** (із наслідку 1). *Для послідовності випадкових подій* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *яка сформована відповідним хаотичним алгоритмом вибору з елементів дискретної множини елементарних подій* $\dddot{X}_0$, *відповідно до наслідку* 1 *існує функція частот цих випадкових подій*

$$\Delta\dddot{P}(x^{(l)}, x^{(j)}) = \lim_{N\to\infty} \Delta\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N) = \lim_{N\to\infty} \Delta\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(l)}, x^{(j)}, N), \tag{29}$$

яка є дискретною, тобто визначеною лише при дискретних значеннях аргументів $x^{(l)} \in \dddot{X}_0$, $x^{(j)} \in \dddot{X}_0$, $l, j = \overline{1, m}$, $l \le j$.

При цьому за умови, що при $l = 1$ вважатимемо $\dddot{P}(x^{(0)}, N) = 0$, отримаємо

$$\Delta\dddot{P}(x^{(l)}, x^{(j)}) = \dddot{P}(x^{(j)}) - \dddot{P}(x^{(l-1)})$$

$$\forall x^{(j)} \in \dddot{X}_0, \qquad x^{(l)} \in \dddot{X}_0, \qquad l, j = \overline{1, m}, \qquad l \le j. \tag{30}$$

Співвідношення (29) і (30) безпосередньо випливають із (23) та нерівностей (25), (27).

***Наслідок* 9** (із наслідків 7 і 8). *Для послідовності випадкових подій* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *яка сформована відповідним хаотичним алгоритмом вибору з елементів дискретної множини елементарних подій* $\dddot{X}_0$, *відповідно до наслідків* 7 *і* 8 *існує дискретна функція*

$$p(x^{(j)}) = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{N^{(j)}(N)}{N}\right] = \dddot{P}(x^{(j)}) - \dddot{P}(x^{(j-1)}), \quad j = \overline{2, m}, \quad x^{(j)} \in \dddot{X}_0 \tag{31}$$

(*при* $j = 1$ *вважатимемо* $p(x^{(1)}) = \dddot{P}(x^{(1)})$), *яку будемо називати функцією ймовірності появи в сформованій послідовності при будь-якому* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *випадкових подій* $x^{(j)}$.

Саме значення даної функції при конкретному значенні аргументу j *будемо називати ймовірністю появи при будь-якому* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *випадкової події* $x^{(j)}$.

Справедливість співвідношення (31) безпосередньо випливає з (30) та умови (5) в означенні 2, де введено поняття випадкової послідовності, сформованої із випадкових подій.

Поняття ймовірності появи випадкової події в даному випадку аналогічне тому, що і в аксіоматичній теорії ймовірностей [1, 3], але воно випливає як наслідок існування граничних переходів (5) і слугує більше теоретичним цілям. На практиці, коли цікавить можливість появи тієї чи іншої події на скінченній частині хаотичної послідовності довжиною N, потрібно використовувати інтервальну оцінку (28), аналізуючи в кожному випадку окремо, коли можна знехтувати шириною інтервалу оцінки, а користуватись деяким наближеним точковим значенням, що належить розглядуваному інтервалу.

Окремо розглянемо випадок числової хаотичної послідовності, члени якої задовольняють умову (13), а елементи дискретної множини $\dddot{X}_0$ є числа з інтервалу $[x_{\min}; x_{\max}]$, упорядковані за їх зростанням із збільшенням номера $(j = \overline{1, m})$.

Твердження 2. *Якщо послідовність числових хаотичних подій* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *сформовано хаотичним алгоритмом вибору із* m *чисел із інтервалу* $[x_{\min}; x_{\max}]$, *упорядкованих за їх зростанням із збільшенням номера* $(j = \overline{1, m})$, *причому* $x_1 = x_{\min}$, *а* $x_m = x_{\max}$, *то для інтервальної дискретної функції розподілу членів такої числової хаотичної послідовності* x_n, $n = 1, 2, \ldots$ (*згідно з наслідком* 4) *існує відповідна інтервальна функція середнього на будь-якому ковзному інтервалі шириною* N, *нижня і верхня грані якої визначаються як функції від ширини інтервалу, що розглядається*:

$$\dddot{m}_{\text{н}}(N) = x_{\max} - \sum_{j=1}^{m-1} \left[\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(j)}, N)\,(x^{(j+1)} - x^{(j)}) \right],$$

$$\dddot{m}_{\text{в}}(N) = x_{\max} - \sum_{j=1}^{m-1} \left[\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(j)}, N)\,(x^{(j+1)} - x^{(j)}) \right],$$

а значення членів будь-якої її частини задовольняють систему нерівностей

$$\dddot{m}_{\text{н}}(N) \le \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_{n+i} \le \dddot{m}_{\text{в}}(N) \qquad \forall n = 1, 2, \ldots, \quad N = 1, 2, \ldots. \tag{32}$$

Дійсно, обчислимо

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left[\dddot{F}(x^{(j)}, x_n)\,(x^{(j+1)} - x^{(j)}) \right] = x_{\max} - x_n,$$

звідки

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \dddot{F}(x^{(j)}, x_{n+i})\,(x^{(j+1)} - x^{(j)}) \right] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sum_{j=1}^{m-1} \dddot{F}(x^{(j)}, x_{n+i})\,(x^{(j+1)} - x^{(j)}) \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{\max} - x_{n+i}).$$

Обчисливши таку ж суму від інших членів співвідношення (21) для цього випадку (розглядаючи N як параметр), отримаємо нерівності вигляду

$$\sum_{j=1}^{m-1} \left[\dddot{P}_{\text{н}}(x^{(j)}, N)\,(x^{(j+1)} - x^{(j)}) \right] \le \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{\max} - x_{n+i}) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{m-1} \left[\dddot{P}_{\text{в}}(x^{(j)}, N)\,(x^{(j+1)} - x^{(j)}) \right].$$

Дані нерівності можна переписати у вигляді (32).

Подібного твердження для дискретного набору елементарних подій немає в аксіоматичній теорії ймовірностей.

5. Висновки. Введено поняття хаотичних послідовностей, для яких існують інтервальна функція розподілу хаотичних подій на множині елементарних подій, а також інтервальна функція частот цих подій. Для числових хаотичних послідовностей вказані функції розподілу визначають множинні оцінки (що задаються системою лінійних нерівностей) для середньоарифметичних значень членів хаотичної послідовності. Випадкові послідовності, сформовані з випадкових подій, розглядаються як частинний випадок хаотичних послідовностей, коли в граничному випадку інтервальні функції перетворюються в звичайні функції розподілу, а інтервальні функції частот — у щільність розподілу випадкових подій. При цьому охоплено випадок дискретної множини елементарних подій, що дозволило отримати поняття ймовірності появи випадкової події як наслідок граничного переходу для інтервальної оцінки частоти її появи в якійсь частині сформованої випадкової послідовності.

1. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1978. – 224 с.
2. *Королюк В. С., Скороход А. В.* Исследования по теории вероятностей в Институте математики АН УССР за 50 лет // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 5. – С. 571 – 575.
3. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974. – 120 с.
4. *Kuntsevich V. M., Lychak M. M.* Guaranteed estimations, adaptation and robustness in control systems. – Berlin: Springer, 1992. – 209 p.
5. *Фон Мизес Р.* Вероятность и статистика: Пер. с нем. – М.; Л.: Гос. изд-во, 1930. – 250 с.
6. *Алимов Ю. И.* Утилитарная логика построения теории вероятностей // Семантика и информатика: Сб. науч. ст. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Вып. 24. – С. 58 – 86.
7. *Лычак М. М.* Элементы теории хаотичностей и ее применения // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 5. – С. 52 – 63.
8. *Лычак М. М.* Хаотические непрерывные процессы и их интервальные характеристики // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 3. – С. 82 – 96.
9. *Лычак М. М.* Интервальные характеристики хаотических последовательностей // Кибернетика и систем. анализ. – 2004. – № 5. – С. 58 – 71.
10. *Николис Дж.* Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. – М.: Мир, 1989. – 486 с.
11. *Хакен Г.* Синергетика: иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. – М.: Мир, 1985. – 423 с.
12. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества. – Киев: Вища шк., 1978. – 192 с.
13. *Бренстед А.* Введение в теорию выпуклых многогранников: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
14. *Реньи А.* Письма о вероятности: Пер. с венг. – М.: Мир, 1970. – 91 с.

Одержано 22.06.06