УДК 512.64+512.56

В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

(MIN, MAX)-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ И НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ ТИТСА

We study connection between the (min, max)-equivalence of posets and properties of their quadratic Tits form, connected with nonnegative definiteness. In particular, we prove that the Tits form of a poset S is nonnegative definite if and only if the Tits form of any poset, which is (min, max)-equivalent to S, is weakly nonnegative.

Вивчається зв'язок між (min, max)-еквівалентністю частково впорядкованих множин та властивостями їх квадратичної форми Тітса, пов'язаних із невід'ємною визначеністю. Зокрема, доведено, що форма Тітса частково впорядкованої множини S невід'ємно визначена тоді і лише тоді, коли форма Тітса будь-якої частково впорядкованої множини, яка (min, max)-еквівалентна S, є слабко невід'ємною.

1. Введение. Пусть S — частично упорядоченное (сокращенно ч. у.) множество, которое предполагается конечным и не содержащим элемента 0. Его квадратичной формой Титса называют квадратичную форму $q_S\colon \mathbb{Z}^{S\cup 0} \to \mathbb{Z}$, задаваемую равенством

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j,i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i.$$

Впервые такая форма была рассмотрена Ю. А. Дроздом в работе [1], где доказано, что ч. у. множество S имеет конечный (представленческий) тип над полем k тогда и только тогда, когда его форма Титса слабо положительна. В [2] показано, что S имеет ручной тип тогда и только тогда, когда форма Титса слабо неотрицательна.

Положительные формы[1] Титса и их приложения в теории представлений Титса изучались во многих работах (см., например, [3–7]). Настоящая работа посвящена изучению ч. у. множеств с неотрицательной формой Титса.

Напомним понятие (min, max)-эквивалентности ч. у. множеств [4].

Для минимального (соответственно максимального) элемента $a \in S$ обозначим через $S_a^{\uparrow}$ (соответственно $S_a^{\downarrow}$) ч. у. множество $T = T' \cup \{a\}$, где $T' = S \setminus \{a\}$ как ч. у. множества (тогда T и S равны как обычные множества), а элемент a является уже максимальным (соответственно минимальным), причем a сравнимо с x в T тогда и только тогда, когда a несравнимо с x в S. Будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\downarrow}$ и т. д.

Ч. у. множество T назовем (min, max)-*эквивалентным* ч. у. множеству S, если T равно некоторому ч. у. множеству вида

$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p}, \quad p \geq 0,$$

[1] Мы говорим „положительная форма", а не „положительно определенная форма", в связи с уже устоявшимся термином „слабо положительная форма". То же самое касается и неотрицательных форм.

где $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ и x_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$, — минимальный (соответственно максимальный) элемент $S^{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{i-1}}_{x_1x_2\ldots x_{i-1}}$, если $\varepsilon_i =\uparrow$ (соответственно $\varepsilon_i =\downarrow$); при $p = 0$ считаем, что $\overline{S} = S$. При этом не требуется, чтобы элементы x_1, $x_2, \ldots, x_p$ были различны.

В случае, когда все ε_i равны $\uparrow$ (соответственно $\downarrow$), будем говорить, что ч. у. множество T min-*эквивалентно* (соответственно max-*эквивалентно*) ч. у. множеству S. Согласно следствию 2 и предложению 11 [6] (min, max)-, min- и max-эквивалентности действительно являются отношениями эквивалентности, причем все они равносильны.

Отметим, что понятие (min, max)-эквивалентности можно естественным образом продолжить до понятия (min, max)-изоморфизма, считая, что ч. у. множества S и S' (min, max)-*изоморфны*, если существует ч. у. множество T, которое (min, max)-эквивалентно S и изоморфно S'; аналогично для min-эквивалентности и max-эквивалентности.

Перейдем к формулировке основных результатов этой статьи.

Напомним, что квадратичная форма $f(z) = f(z_1, \ldots, z_m)$: $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел) называется *слабо неотрицательной*, если она принимает неотрицательное значение на любом векторе с неотрицательными координатами. Форма, которая принимает неотрицательное значение на всех векторах, называется *неотрицательной* (см. примечание 1); в этом случае пишем $f(z) \geq 0$.

Ч. у. множество S назовем NP-*критическим* (соответственно WNP-*критическим*), если форма Титса любого его собственного подмножества является неотрицательной (соответственно слабо неотрицательной), но форма Титса самого S таковой не является.

Целью данной статьи является доказательство следующих теорем.

Теорема 1. *Для произвольного фиксированного ч. у. множества S имеют место следующие утверждения*:

1) *если форма Титса любого ч. у. множества, которое* min-*эквивалентно S, слабо неотрицательна, то форма Титса самого S неотрицательна;*

2) *если форма Титса S неотрицательна, то форма Титса любого ч. у. множества, которое* min-*эквивалентно S, также неотрицательна* (*и тем более слабо неотрицательна*).

Теорема 2. *Ч. у. множество S является NP-критическим тогда и только тогда, когда оно* min-*эквивалентно некоторому WNP-критическому ч. у. множеству.*

В условиях теорем 1 и 2 min-эквивалентность можно заменить на max-эквивалентность или (min, max)-эквивалентность (в силу их равносильности, о чем говорилось выше), а также на min-, max- или (min, max)-изоморфизм.

Заметим, что WNP-критические ч. у. множества, которых всего 6, известны (см. п. 4). Теорема 2 дает эффективный метод изучения NP-критических множеств.

Аналогичные результаты, но относительно положительных и слабо положительных форм Титса, получены авторами (наряду со многими другими результатами) в работе [6].

2. Определения и обозначения для ч. у. множеств. Пусть $T = (T_0, \leq)$ — ч. у. множество. Под подмножеством X ч. у. множества T всегда понимаем любое подмножество $X \subseteq T_0$ вместе с индуцированным отношением частичного порядка, который будем обозначать тем же символом (тогда для $x, y \in X$ запись „$x \leq y$ в T" равносильная записи „$x \leq y$ в X"); одноэлементные подмножества отождествляются с самими элементами. Для простоты будем писать $x \in T$ вместо $x \in T_0$, $X \subset T$ вместо $X \subset T_0$ и т. п. (эти естественные упрощения использовались и во введении).

Подмножество X называем *нижним* (соответственно *верхним*), если $x \in X$ всякий раз, когда $x < y$ (соответственно $x > y$) и $y \in X$, и *плотным*, если $x \in X$ всякий раз, когда $y < x < z$ и $y, z \in X$. Очевидно, что нижние и верхние подмножества являются плотными. Через $\overleftarrow{A}$ и $\overrightarrow{A}$, где A — подмножество T, будем обозначать соответственно наименьшее нижнее и наименьшее верхнее подмножество в T, содержащее A. Подмножество $\overleftrightarrow{A}=\overleftarrow{A} \cap \overrightarrow{A}$, являющееся наименьшим плотным подмножеством, которое содержит A, будем называть *замыканием подмножества* A *в* S.

Запись $X < Y$ для подмножеств T будет означать, что $x < y$ для любых $x \in X, y \in Y$ Заметим, что $Z < \varnothing$ и $\varnothing < Z$ для любого подмножества Z. Далее, запись $x \between y$ означает, что элементы x и y несравнимы. Положим $T^{\between}(a) = \{x \in \in T \,|\, x \between a\}$. Для элемента $a \in T$ обозначим через $\{a\}^{<}$ (соответственно $\{a\}^{>}$) подмножество всех $x \in T$ таких, что $x < a$ (соответственно $x > a$).

Шириной ч. у. множества T называется максимальное число ее попарно несравнимых элементов; обозначается она через $w(T)$.

Ч. у. множество T называют *суммой* подмножеств A и B и пишут $T = A + B$, если $T = A \cup B$ и $A \cap B = \varnothing$. Если при этом $A < B$, то эту сумму называют *ординальной*, а если $x \between y$ для любых $x \in A, y \in B$, — *прямой*; в первом случае будем писать $T = \{A < B\}$, а во втором — $T = A \coprod B$. Эти определения естественно обобщаются на случай произвольного числа подмножеств. Ч. у. множество называется *примитивным*, если оно является прямой суммой цепей (линейно упорядоченных множеств).

3. Свойства min-эквивалентных ч. у. множеств. Min-эквивалентность ч. у. множеств обозначается символом $\cong_{\min}$ (а $\cong$ означает изоморфизм ч. у. множеств). Если $T_2 \cong_{\min} T_1$, то (согласно определению) T_2 и T_1 равны как обычные множества; значит, каждое подмножество $X \subset T_1$ является подмножеством и в T_2, но не обязательно с тем же частичным порядком. Если же отношение порядка на X не изменилось, то часто (чтобы отметить этот факт) будем писать X° вместо X (для $X \subset T_2$).

Пусть S — ч. у. множество. Конечную последовательность $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ элементов $x_i \in S$ назовем min-*допустимой*, если выражение $\overline{S} = S^{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}_{x_1x_2\ldots x_p}$ имеет смысл (случай $p = 0$ не исключается). В этом случае будем также писать $\overline{S} = S^{\uparrow}_{\alpha}$.

Множество всех min-допустимых последовательностей обозначаем $\mathcal{P}(S)$, а множество всех таких последовательностей без повторений — $\mathcal{P}_1(S)$. Подмножество в S, состоящее из всех элементов x_i последовательности $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$, будем обозначать через $[\alpha]_S$. Заметим, что если S и T min-эквивалентны, то не всегда существует $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ такое, что $T = S^{\uparrow}_{\alpha}$ (см. п. 6 в [6]).

Согласно следствию 5 [6] в $\mathcal{P}_1(S)$ существует последовательность α такая, что $[\alpha]_S = X$, тогда и только тогда, когда подмножество X нижнее. А согласно следствию 9 [6], если $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$ и $[\alpha]_S = [\beta]_S$, то $S^{\uparrow}_{\alpha} = S^{\uparrow}_{\beta}$. Значит, для нижнего подмножества X естественно определить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$, считая, что $S^{\uparrow}_X =$

$= S^{\uparrow}_{\alpha}$, где $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ — любая из последовательностей таких, что $[\alpha]_S = X$. Из предложения 6 [6] следует, что в $\overline{S} = S^{\uparrow}_X$ подмножество X будет уже верхним, а значит, $Y = S \setminus X$ — нижним (с теми же частичными порядками); при этом $y < x$ для $y \in Y$ и $x \in X$ (в $\overline{S}$) тогда и только тогда, когда $y \ngtr x$ в S. В частности, если $S = X \coprod Y$ (соответственно $S = \{X < Y\}$), то $S^{\uparrow}_X = \{Y < X\}$ (соответственно $S^{\uparrow}_X = X \coprod Y$).

Приведем теперь некоторые утверждения, необходимые для дальнейшего изложения. Как и раньше, S — произвольное ч. у. множество. Через $M_-(S)$ (соответственно $M_+(S)$) будем обозначать множество всех его минимальных (соответственно максимальных) элементов.

Лемма 1 (лемма о циклической перестановке)**.** *Пусть* $X = R \coprod \{M < N\}$ — *подмножество ч. у. множества* S. *Тогда существуют* $T_1, T_2 \cong_{\min} S$, *в которых соответственно* $X = M^{\circ} \coprod \{N^{\circ} < R^{\circ}\}$ *и* $X = N^{\circ} \coprod \{R^{\circ} < M^{\circ}\}$.

Действительно, в качестве T_1 и T_2 можно взять ч. у. множество $T = S^{\uparrow}_Y$ соответственно при $Y = S \setminus \overrightarrow{N}$ и $Y = \overleftarrow{M}$.

***Следствие* 1.** *Если* S *содержит подмножества* A *и* B *такие, что* $A < B$, *то* $A \cup B = A^{\circ} \coprod B^{\circ}$ *в некотором* $T \cong_{\min} S$.

Действительно, в условии леммы нужно положить $M = A$, $N = B$, $R = \varnothing$.

***Следствие* 2.** *Пусть* $L = L_1 \coprod \ldots \coprod L_m$ — *примитивное подмножество* S $(L_1, \ldots, L_m$ — *непустые цепи) и* c — *элемент* S *такой, что* $c > L_i$ *для любого* $i \neq m$ *и* $\{c\}^{<} \cap L_m = \varnothing$. *Тогда существует* $T_1 \cong_{\min} S$, *содержащее примитивное подмножество* $L' = L_1^{\circ} \coprod \ldots \coprod L_{m-1}^{\circ} \coprod L'_m$, *где* L'_m — *цепь порядка* $|L_m| + 1$, *содержащая* L_m°.

Действительно, случай $w(L) < 3$ тривиален, а при $w(L) \geq 3$ нужно применить лемму для $M = L_1 + \ldots + L_{m-1}$, $N = \{c\}$, $R = L_m$.

Лемма 2. *Пусть* L — *плотное подмножество* S. *Тогда существует* $T \cong_{\min} \cong_{\min} S$, *в котором* L *является нижним подмножеством с тем же частичным порядком.*

Действительно, в качестве T можно взять $T = S^{\uparrow}_P$ при $P = \cup_{x \in M_-(L)} \{x\}^{<}$.

В заключение этого пункта приведем одно утверждение в общем случае (т. е. для последовательностей из $\mathcal{P}(S)$; оно доказано в [6] (лемма 26).

Предложение 1. *Пусть* $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{P}(S)$, X — *подмножество* S *и* α_X — *подпоследовательность* α, *состоящая из всех* $x_i \in X$. *Тогда* $\alpha_X \in \mathcal{P}(X)$ *и* $X^{\uparrow}_{\alpha_X}$ — *подмножество* $S^{\uparrow}_{\alpha}$.

4. Свойства квадратичной формы Титса, связанные с ее неотрицательностью. Согласно основному результату работы [4] квадратичные формы Титса min-эквивалентных ч. у. множеств являются эквивалентными. Отсюда, в частности, имеем следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть* S *и* T — min-*эквивалентные ч. у. множества. Тогда их формы Титса одновременно являются или не являются неотрицательными.*

Напомним, что *полуцепью* называется ординальная сумма $S = \{A_1 < A_2 \ldots \ldots < A_s\}$ антицепей A_i длины 1 и 2 (антицепь длины m — это ч. у. множество, состоящее из m попарно несравнимых элементов). Это эквивалентно тому, что $w(S) < 3$ и S не содержит подмножеств ширины 2 вида $\{a\} \coprod \{b < c\}$. Множества A_i называются *звеньями* полуцепи. В случае, когда все звенья одноэлементные, S — цепь.

Предложение 3. *Если ч. у. множество S является прямой суммой двух полуцепей, то его форма Титса неотрицательна.*

Доказательство. В силу леммы о циклической перестановке при $X = S$, $M = \varnothing$ и предложения 2 достаточно считать, что S — полуцепь; кроме того, можно, очевидно, считать, что все ее звенья двухэлементные. Итак, пусть $S = \{A_1 < < A_2 < \ldots < A_s\}$, где $A_i = \{i^-, i^+\}$. Тогда легко видеть, что $2q_S(z) = z_0^2 + + \sum_{i=1}^{s}(z_{i^-} - z_{i^+})^2 + \left(z_0 - \sum_{j\in S} z_j\right)^2$, откуда имеем, что форма $q_S(z)$ неотрицательна.

Наконец, приведем утверждение о неотрицательности формы Титса для некоторых конкретных ч. у. множеств, которое понадобится в дальнейшем.

Лемма 3. *Квадратичная форма Титса является неотрицательной для следующих ч. у. множеств*:

$$S_1 = \big\{1 \prec 5,\ 2 \prec 6,\ 3 \prec 7,\ 4 \prec 8,\ 1 \prec 6,\ 2 \prec 7,\ 3 \prec 8,\ 4 \prec 5\big\},$$

$$S_2 = \big\{2 \prec 5,\ 3 \prec 6,\ 4 \prec 7,\ 2 \prec 6,\ 3 \prec 7,\ 4 \prec 5\big\},$$

$$S_3 = \big\{2 \prec 5,\ 3 \prec 6,\ 4 \prec 7,\ 1 \prec 5,\ 1 \prec 6,\ 1 \prec 7\big\},$$

$$S_4 = \big\{2 \prec 4,\ 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9,\ 3 \prec 4,\ 3 \prec 6\big\},$$

$$S_5 = \big\{2 \prec 5 \prec 6,\ 4 \prec 7 \prec 8,\ 3 \prec 5,\ 3 \prec 7\big\},$$

$$S_6 = \big\{1 \prec 4,\ 2 \prec 5,\ 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9,\ 2 \prec 4,\ 3 \prec 5,\ 3 \prec 7\big\},$$

$$S_7 = \big\{1 \prec 3,\ 2 \prec 3,\ 4 \prec 6,\ 5 \prec 6,\ 2 \prec 7,\ 4 \prec 7,\ 7 \prec 8\big\},$$

$$S_8 = \big\{1 \prec 3 \prec 4,\ 6 \prec 7 \prec 8,\ 2 \prec 3,\ 2 \prec 9,\ 5 \prec 7,\ 5 \prec 9\big\},$$

$$S_9 = \big\{1 \prec 4 \prec 7,\ 2 \prec 5 \prec 8,\ 3 \prec 6 \prec 9,\ 1 \prec 8,\ 2 \prec 9,\ 3 \prec 7\big\},$$

$$S_{10} = \big\{1 \prec 2,\ 3 \prec 4,\ 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9,\ 3 \prec 7\big\},$$

$$S_{11} = \big\{1 \prec 2,\ 3 \prec 4 \prec 5,\ 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9,\ 1 \prec 5,\ 3 \prec 8\big\},$$

$$S_{12} = \big\{1 \prec 2,\ 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6,\ 7 \prec 8 \prec 9,\ 1 \prec 5,\ 3 \prec 9\big\},$$

$$S_{13} = \big\{1 \prec 2 \prec 3,\ 4 \prec 5 \prec 6,\ 7 \prec 8 \prec 9,\ 5 \prec 8\big\},$$

$$S_{14} = \big\{2 \prec 3 \prec 4,\ 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9,\ 2 \prec 8\big\}.$$

В условии леммы предполагается, что каждое из множеств S_i состоит из элементов $1, 2, \ldots, s$, где s — наибольшее число, содержащееся в его определении в явном виде.

Неотрицательность квадратичной формы Титса для перечисленных ч. у. множеств доказана в [8] (см. лемму 4.3).

5. $\boldsymbol{WNP}$-критические ч. у. множества. Пусть $\langle p \rangle$ обозначает цепь $1 < < 2 < \ldots < p$, а $\langle p, q, \ldots, r \rangle$ — прямую сумму цепей $\langle p \rangle$, $\langle q \rangle, \ldots, \langle r \rangle$. Положим $N = \{1 \prec 2,\, 3 \prec 4,\, 1 \prec 4\}$.

Предложение 4. *Ч. у. множество является WNP-критическим тогда и только тогда, когда оно изоморфно одному из следующих ч. у. множеств*: $\mathcal{N}_1 = = \langle 1,1,1,1,1 \rangle$, $\mathcal{N}_2 = \langle 1,1,1,2 \rangle$, $\mathcal{N}_3 = \langle 2,2,3 \rangle$, $\mathcal{N}_4 = \langle 1,3,4 \rangle$, $\mathcal{N}_5 = \langle 1,2,6 \rangle$, $\mathcal{N}_6 = N \coprod \langle 5 \rangle$.

Доказательство. Из теоремы А [2] и предложения 3 [1] следует, что, во-первых, любое ч. у. множество с не слабо неотрицательной формой Титса содержит в качестве подмножества некоторое $\mathcal{N}_i$, и, во-вторых, любое собственное подмножество каждого из $\mathcal{N}_i$ имеет слабо неотрицательную форму Титса. При доказательстве теоремы В [2] показано, что форма Титса каждого из $\mathcal{N}_i$ не является слабо неотрицательной. Из этих трех фактов следует, очевидно, справедливость доказываемого предложения.

Ч. у. множества $\mathcal{N}_1$–$\mathcal{N}_6$ впервые появились в статье Л. А. Назаровой [9] (посвященной описанию ручных ч. у. множеств), и поэтому будем называть их *критическими множествами Назаровой*. Их подмножества $\mathcal{K}_1 = \langle 1,1,1,1 \rangle$, $\mathcal{K}_2 = = \langle 2,2,2 \rangle$, $\mathcal{K}_3 = \langle 1,3,3 \rangle$, $\mathcal{K}_4 = \langle 1,2,5 \rangle$, $\mathcal{K}_5 = N \coprod \langle 4 \rangle$ называют *критическими множествами Клейнера*; появившиеся в работе [10], они играют такую же роль, как и множества Назаровой, но уже при описании ч. у. множеств конечного типа.

В случае, когда P — заранее определенное ч. у. множество (например, $P = \mathcal{K}_i$ или $P = \mathcal{N}_i$), будем говорить, что ч. у. множество T содержит P, если T содержит X, изоморфное P; если при этом $T = P$, то будем говорить, что T имеет вид P.

Непосредственно из определений имеем следующие утверждения.

Лемма 4. *Замыкание неплотного подмножества вида $\mathcal{K}_i$ содержит некоторое $\mathcal{N}_j$.*

Лемма 5. *Если примитивное ч. у. множество T содержит как собственное подмножество некоторое $\mathcal{K}_i$, то оно содержит некоторое $\mathcal{N}_j$.*

Из последней леммы и следствий 1, 2 имеем такое утверждение.

Лемма 6. *Если ч. у. множество S содержит некоторое примитивное $K = = \mathcal{K}_i$ и $x \in S$ — такой элемент, что $K' = K \cap \{x\}^<$ имеет ширину $w \geq w(S) - 1$ и выделяется прямым слагаемым из K (в частности, совпадает с K), то существует $T \cong_{\min} S$, содержащее некоторое $\mathcal{N}_j$.*

Действительно, это следует из леммы 5, если предварительно в случае $w(K') = = w(S)$ воспользоваться следствием 1 при $A = K$, $B = x$ (с учетом того, что в этом случае $K' = K$), а в случае $w(K') = w(S) - 1$ — следствием 2 при $L = K$, $L_m = K \setminus K'$.

Докажем теперь следующее утверждение.

Предложение 5. *Любое WNP-критическое ч. у. множество является NP-критическим.*

Доказательство. Согласно определению форма Титса WNP-критического множества не является неотрицательной. Далее, используя предложение 4, легко видеть, что любое максимальное подмножество M каждого WNP-критического множества является либо подмножеством (не обязательно собственным) некоторого критического множества Клейнера, либо прямой суммой двух полуцепей (общее число двухэлементных звеньев которых не превышает 1). В первом случае форма Титса множества M неотрицательна по лемме 4.3 работы [8], а во втором — по предложению 3 (согласно предложению 21 [6] во втором случае форма Титса положительна).

6. Теорема о ч. у. множествах без $\boldsymbol{WNP}$- критических подмножеств. Будем рассматривать такие ч. у. множества, что любые min-эквивалентные им ч. у. множества не содержат критических множеств Назаровой; совокупность всех таких ч. у. множеств обозначим через $\mathcal{F}$.

Основным при доказательстве теорем 1 и 2 будет следующее утверждение.

Теорема 3. *Форма Титса ч. у. множества $S \in \mathcal{F}$ неотрицательна.*

Заметим, что теорему 3 достаточно доказать для любого фиксированного ч. у. множества, которое min-эквивалентно S. Мы будем пользоваться этим, выбирая в различных случаях наиболее подходящее ч. у. множество.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Очевидно, что $w(S) \leq 4$ (иначе $S \supset \mathcal{N}_1$). Если любое ч. у. множество $T \cong_{\min} S$ не содержит критических множеств Клейнера, то согласно предложению 24 [6] форма Титса ч. у. множества S положительна. Поэтому будем считать, что S содержит хотя бы одно $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i$, $1 \leq i \leq 5$, причем $S \neq \mathcal{K}$ (так как ч. у. множества $\mathcal{K}_i$ имеют неотрицательную форму Титса; это следует хотя бы из леммы 3).

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_1$.

В силу леммы 2 при $L = \mathcal{K}_1$ можно считать, что $\mathcal{K} = M_-(S)$; пусть $\mathcal{K} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Подмножество $\{a_i\}^> \cap \{a_j\}^>$ обозначим через L_{ij}; так как $L_{ji} = L_{ij}$, в дальнейшем, при рассмотрении этих множеств, будем всегда считать (из соображений удобства), что $i < j$. Поскольку $w(S) = 4$ и $S \not\supseteq \mathcal{N}_2$, объединение всех $\widehat{L}_{ij} = L_{ij} \cup \{a_i, a_j\}$ равно S. Кроме того, в силу леммы 6 подмножества L_{ij} и L_{pq} не пересекаются при $(i,j) \neq (p,q)$. Тогда каждое L_{ij} — полуцепь (возможно, пустая), иначе $\mathcal{K} \cup L_{ij}$ содержит $\mathcal{N}_1$ или $\mathcal{N}_2$ (в зависимости от того, существует ли в L_{ij} подмножество $X \cong \langle 1,1,1 \rangle$ или $Y \cong \langle 1,2 \rangle$).

Если непустой является только одна из полуцепей L_{ij} (ширины 1 или 2) или непусты только две полуцепи L_{ij} и L_{pq} при $\{i,j\} \cap \{p,q\} = \varnothing$, то S — прямая сумма двух полуцепей и в силу предложения 3 $q_S(z) \geq 0$. Сюда же по сути относится случай, когда существует хотя бы одно L_{ij}, являющееся полуцепью ширины 2, поскольку тогда каждое L_{pq} при $|\{i,j\} \cap \{p,q\}| = 1$ пустое, так как в противном случае подмножество, состоящее из двух несравнимых элементов $a, b \in L_{ij}$, любого элемента $c \in L_{pq}$ и элементов подмножества $\mathcal{K} \setminus \{a_i, a_j\}$ (порядка 2), имеет вид $\mathcal{N}_2$.

Таким образом, для $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_1$ осталось рассмотреть случай, когда каждое L_{ij} является цепью (возможно, пустой), причем все L_{ij} попарно не пересекаются и существуют $L_{pq}, L_{rs} \neq \varnothing$ такие, что $|\{p,q\} \cap \{r,s\}| = 1$. Положим $l_{ij} = |L_{ij}|$ и обозначим через $m = m(S)$ число непустых L_{ij}.

Если при этом либо a) $m = 4$, либо b) $m = 3$ и для (попарно различных и непустых) L_{ij}, L_{pq}, L_{rs} выполняются равенства $\big|\{i,j\} \cap \{p,q\}\big| = 1$, $\big|\{p,q\} \cap \{r,s\}\big| = 1$, $\big|\{i,j\} \cap \{r,s\}\big| = 1$, $\big|\{i,j\} \cap \{p,q\} \cap \{r,s\}\big| = 0$, либо c) $m = 3$ и для (попарно различных и непустых) L_{ij}, L_{pq}, L_{rs} выполняется равенство $\big|\{i,j\} \cap \{p,q\} \cap \{r,s\}\big| = 1$, то (с точностью до перенумерации минимальных элементов) имеет место один из таких случаев: 1.1) $l_{12} = l_{23} = l_{34} = l_{14} = 1$; 1.2) $l_{12} \geq 1$, $l_{23} \geq 1$, $l_{34} \geq 1$, $l_{14} > 1$; 2.1) $l_{12} = l_{23} = l_{13} = 1$; 2.2) $l_{12} \geq 1$, $l_{23} \geq 1$, $l_{13} > 1$;

3.1) $l_{12} = l_{13} = l_{14} = 1$; 3.2) $l_{12} \geq 1$, $l_{13} \geq 1$, $l_{14} > 1$. Здесь случаи 1.1 и 1.2 соответствуют условию a), случаи 2.1 и 2.2 — условию b), случаи 3.1 и 3.2 — условию c). Заметим, что не указанные l_{ij} мы считаем нулевыми[2].

Если же не выполняется ни одно из условий a) – c), то (с точностью до перенумерации минимальных элементов) либо $m = 2$ и при этом L_{23}, $L_{34} \neq \varnothing$, либо $m = 3$ и при этом L_{12}, L_{23}, $L_{34} \neq \varnothing$. Положим в этих случаях соответственно $l = (l_{23}, l_{34})$ и $l = (l_{12}, l_{23}, l_{34})$, считая возможным (при рассмотрении конкретных ч. у. множеств) некоторые координаты вектора l задавать не конкретным числом, а неравенствами вида $> z$ и $\geq z$, где z — некоторое натуральное число, а также более привычными неравенствами вида $z_1 \leq s \leq z_2$. В этой ситуации имеет место, как легко видеть, один из следующих случаев: 4.1) $l = (1, 1 \leq s \leq 4)$; 4.2) $l = (1, > 4)$; 5.1) $l = (2, 2)$; 5.2) $l = (\geq 2, > 2)$; 6.1) $l = (1, 1, 1 \leq s \leq 3)$; 6.2) $l = (1, 1, > 3)$; 7.1) $l = (1, 2, 1)$; 7.2) $l = (1, > 2, 1)$; 8.1) $l = (2, 1, 2)$; 8.2) $l = (\geq 2, 1, > 2)$; 9) $l = (\geq 1, > 1, > 1)$.

Проанализуем теперь случаи 1.1 – 1.9.

В случаях $i.1$ при $i = 1, 2, \ldots, 8$ ч. у. множество S содержится, с точностью до изоморфизма, в S_i (см. лемму 3). В случаях 1.2 и 2.2 S содержит $\mathcal{N}_2$, в случаях 3.2, 7.2 и 9 — $\mathcal{N}_3$, в случаях 5.2 и 8.2 — $\mathcal{N}_4$, в случае 4.2 — $\mathcal{N}_5$ и в случае 6.2 — $\mathcal{N}_6$. Отсюда (с учетом леммы 3) следует, что если $S \in \mathcal{F}$, то его форма Титса неотрицательна.

Пусть теперь $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i$ при $i > 1$. Считаем, что любое $T \cong_{\min} S$ не содержит $\mathcal{K}_1$ (поскольку случай $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_1$ уже рассмотрен); тогда по следствию 1 ч. у. множество T не содержит подмножеств вида $Q_{13} = \{R_1 < R_3\}$, $Q_{31} = \{R_3 < R_1\}$ и $Q_{22} = \{R_2 < R_2'\}$, где $R_1 \cong \langle 1 \rangle$ — множество, состоящее из одного элемента u_0, $R_2 \cong \langle 1, 1 \rangle$ (соответственно $R_2' \cong \langle 1, 1 \rangle$) — множество, состоящее из двух несравнимых элементов u_1 и u_2 (соответственно u_1' и u_2') и $R_3 \cong \langle 1, 1, 1 \rangle$ — множество, состоящее из трех попарно несравнимых элементов v_1, v_2 и v_3.

Далее, по лемме 4 подмножество $\mathcal{K}$ является плотным. А тогда в силу леммы 2 при $L = \mathcal{K}_i$ можно считать, что $\mathcal{K}$ — нижнее подмножество S. Отсюда, в частности, имеем $M_-(\mathcal{K}) = M_-(S)$. Полагаем $M_-(\mathcal{K}) = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $M_+(\mathcal{K}) = \{b_1, b_2, b_3\}$, причем считаем, что $a_1 \leq b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$.

Рассмотрим сначала случаи $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i$ при $i \neq 5$.

Положим $B_{ij} = \{b_i\}^> \cap \{b_j\}^>$, $L_{ij} = \{a_i\}^> \cap \{b_j\}^>$ (будем рассматривать их только для $i \neq j$) и, кроме того, $C_i = \{b_i\}^< \cup b_i$. По лемме 5 $\mathcal{K}$ является максимальным примитивным подмножеством как в самом S, так и в каждом $T \cong_{\min} S$, в котором $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i$. Тогда по лемме 6 $B_{ij} = \varnothing$, а значит, $S \backslash \mathcal{K}$ — объединение всех подмножеств L_{ij} (иначе S содержит $\mathcal{K}_1$), причем они попарно не пересекаются (иначе $S \supset Q_{31}$). Кроме того, если L_{ij} непусто, то L_{is} при $j \neq s$ и L_{ji} являются пустыми (иначе соответственно $S \supset Q_{13}$ и $S \supset Q_{22}$). Из $B_{ij} = \varnothing$ и $w(S) = 3$ следует также, что L_{ij} является цепью.

Как и в случае $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_1$, число непустых L_{ij} обозначим через $m = m(S)$ и положим $l_{ij} = |L_{ij}|$.

Пусть сначала $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_2$. Если при этом $m = 3$, то (с точностью до перестановки в индексах чисел 1, 2, 3) имеет место один из следующих случаев: 10.1) $l_{12} = l_{23} = l_{31} = 1$; 10.2) $l_{12} \geq 1$, $l_{23} \geq 1$, $l_{31} > 1$. Если же $m = 1, 2$, имеет место один из таких случаев (в которых не указанные l_{ij} являются нулевыми): 11.1) $1 \leq l_{12} \leq 3$;

[2] Это соглашение будет иметь место и при рассмотрении случаев $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_i$ при $i > 1$.

11.2) $l_{12} > 3$; 12.1) $l_{12} = 1$, $l_{23} = 2$; 12.2) $l_{12} \geq 1$, $l_{23} > 2$; 13.1) $l_{12} = 2$, $l_{23} = 1$; 13.2) $l_{12} > 2$, $l_{23} \geq 1$.

Проанализуем теперь случаи 10.1 – 13.2.

В случаях $i.1$ при $i = 10,\ 11,\ 12,\ 13$ ч. у. множество S содержится, с точностью до изоморфизма, в S_{i-1} (см. лемму 3). В случаях 10.2, 11.2, 12.2 и 13.2 S содержит соответственно $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{N}_5$, $\mathcal{N}_6$ и $\mathcal{N}_4$. Отсюда (с учетом леммы 3) следует, что если $S \in \mathcal{F}$, то его форма Титса неотрицательна.

Пусть теперь $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_3$; при этом можно считать, что любое $T \cong_{\min} S$ не содержит $\mathcal{K}_2$ (так как случай $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_2$ уже рассмотрен). Согласно введенным выше обозначениям $M_-(\mathcal{K}) = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $M_+(\mathcal{K}) = \{b_1, b_2, b_3\}$, где $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$; обозначим через c_2 и c_3 „недостающие” элементы подмножества $\mathcal{K}$: $a_2 < c_2 < b_2$, $a_3 < c_3 < b_3$.

Отметим, что множество $K_{ij} = \{c_i\}^> \cap \{b_j\}^>$ является пустым, если $i \neq j$ и при этом $i,\ j \neq 1$, так как в противном случае согласно следствию 2 при $L = L_1 \coprod L_2 \coprod L_3$, $L_1 = \{a_i, c_i\}, L_2 = \{a_j, c_j, b_j\}$ и $L_3 = \{a_1\}$, некоторое $T_1 \cong_{\min} S$ содержит $\mathcal{N}_3$. Далее, L_{i1} при $i = 2, 3$ совпадает с K_{i1}, иначе $\mathcal{K} \cup (L_{i1} \setminus K_{i1})$ содержит $\mathcal{N}_3$. При этом если $L_{i1} \neq \varnothing$, то $m = 1$, так как в случае, когда $L_{ij} \neq \varnothing$, $j \neq 1$, подмножество $\mathcal{K} \cup L_{i1} \cup L_{ij}$ содержит Q_{13}, а в случае, когда $L_{ji} \neq \varnothing$, $j \neq 1$, – $\mathcal{K}_2$.

Значит (с точностью до перестановки в индексах чисел 2 и 3), имеет место один из таких случаев: 14.1) $l_{21} \leq 2$; 14.2) $l_{21} > 2$; 15.1) $l_{23} \leq 2$; 15.2) $l_{23} > 2$. И в случаях 14.1 и 15.1 ч. у. множество S содержится, с точностью до изоморфизма, соответственно в S_{13}, S_{14} (см. лемму 3), а в случаях 14.2 и 15.2 S содержит соответственно $\mathcal{N}_4$ и $\mathcal{N}_5$. Итак, для $S \in \mathcal{F}$ его форма Титса неотрицательна.

Покажем теперь, что в случае $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_4$ существует $T \cong_{\min} S$, содержащее $\mathcal{K}_2$ или $\mathcal{K}_3$, а соответствующие случаи уже рассмотрены. Согласно введенным выше обозначениям $M_-(\mathcal{K}) = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $M_+(\mathcal{K}) = \{b_1, b_2, b_3\}$, где $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, $a_3 < b_3$; обозначим через c_3, d_3, e_3 „недостающие” элементы подмножества $\mathcal{K}$: $a_3 < c_3 < d_3 < e_3 < b_3$.

Подмножество L_{23} является пустым, так как в противном случае, если f обозначает максимальный элемент L_{23}, $S_P^{\uparrow}$ при $P = S \setminus f$ содержит $\mathcal{N}_6$ (более точно, $\mathcal{K} \cup f$ имеет вид $\mathcal{N}_6$). Если $L_{32} \neq \varnothing$ и $g \in L_{32}$, то $g > c_3$, иначе подмножество $(\mathcal{K} \setminus a_3) \cup g$ имеет вид $\mathcal{N}_4$; тогда по следствию 2 при $L = L_1 \coprod L_2 \coprod L_3$, $L_1 = \{a_3, c_3\}$, $L_2 = C_2$, $L_3 = a_1$, существует $T_1 \cong_{\min} S$, в котором $\mathcal{K} \cup g$ имеет вид $\mathcal{K}_2$. Если же $L_{31} \neq \varnothing$ и $h \in L_{31}$, то $h > d_3$, иначе $(\mathcal{K} \setminus \{a_3, c_3\} \cup h$ имеет вид $\mathcal{N}_3$; тогда по следствию 2 при $L = L_1 \coprod L_2 \coprod L_3$, $L_1 = C_1$, $L_2 = \{a_3, c_3, d_3\}$, $L_3 = C_2$, существует $T_1 \cong_{\min} S$, в котором $\mathcal{K} \cup h$ имеет вид $\mathcal{K}_3$. Наконец, если $L_{21} \neq \varnothing$ и $t \in L_{21}$, то $\mathcal{K} \cup t$ имеет вид $\mathcal{N}_6$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_5$.

Обозначим через U подмножество $\mathcal{K}$, состоящее из элементов a_1, b_1, a_2, b_2, причем считаем, что $a_1 < b_2$. „Недостающие” элементы $\mathcal{K}$ обозначим через c_3 и d_3, считая, что $c_3 < d_3$. Тогда $\mathcal{K} = U \coprod C_3$, где $C_3 = \{a_3 < c_3 < d_3 < b_3\}$; положим $C_1 = \{a_1, b_1\}$, $C_2 = \{a_2, b_2\}$.

Нам понадобится одно утверждение, которое (в нужной для нас общности) конкретизирует следствие 2 и очевидным образом вытекает из его доказательства.

***Следствие* 3.** *Пусть* S, $L = L_1 \coprod \ldots \coprod L_m$ *и* c *— те же, что в условии следствия* 2, *причем* $m = 3$, $|L_1| = i$, $|L_2| = j$, $|L_3| = \max(i, j) - 1$ *и при этом* $i \leq j$ *и* $i + j = 4$. *Тогда существует* $T_1 \cong_{\min} S$, *содержащее* $\mathcal{K}_j$.

Покажем, что случай $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_5$ сводится к рассмотренным случаям $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K} \cong \mathcal{K}_3$, а именно, существует $T \cong_{\min} S$, содержащее $\mathcal{K}_2$ или $\mathcal{K}_3$.

Предположим, что это не так, т. е. что каждое ч. у. множество T, min-эквивалентное S, не содержит ни $\mathcal{K}_2$, ни $\mathcal{K}_3$, и покажем, что в этом случае приходим к противоречию.

Покажем сначала, что S разложимо (относительно прямой суммы, которая определена выше). Пусть это не так, тогда существует x такой, что $\{x\}^< \cap U \neq \varnothing$ и $\{x\}^< \cap C_3 \neq \varnothing$; значит, $x > a_3$. Положим $R = \{x\}^< \cap U$. Очевидно, что $b_2 \notin R$ (иначе $\mathcal{K} \cup x$ содержит Q_{31}). По той же причине R не может одновременно содержать элементы a_1 и a_2 (соответственно b_1 и a_2). Кроме того, если $a_1 \in R$, то и $b_1 \in R$, иначе $\mathcal{K} \cup x$ содержит Q_{13}. Таким образом, для R остается всего две возможности: a) $R = C_1$; b) $R = \{a_2\}$. Случай a) невозможен, так как при $x \not\gtrless c_3$ подмножество $\mathcal{K} \cup x$ содержит $\mathcal{K}_3$, а при $x > c_3$ в силу следствия 3 для $L_1 = C_1$, $L_2 = \{a_3, c_3\}$, $L_3 = \{a_2\}$ и $c = x$ существует $T_1 \cong_{\min} S$, содержащее $\mathcal{K}_2$. Случай b) также невозможен, так как при $x \not\gtrless b_3$ подмножество $M_+(\mathcal{K}) \cup x$ имеет вид $\mathcal{K}_1$, а при $x > b_3$ в силу следствия 3 для $L_1 = a_2$, $L_2 = C_3 \setminus b_3$, $L_3 = C_1$ и $c = x$ существует $T_1 \cong_{\min} S$, содержащее $\mathcal{K}_3$ (легко видеть, что из доказательства следствия 2 вытекает, что существует даже $T_1 \cong_{\min} S$, содержащее $\mathcal{N}_4$).

Итак, S разложимо в прямую сумму двух собственных подмножеств; понятно, что одно из них содержит U, а другое — C_3. Значит, существует x такой, что либо $\{x\}^< \cap U = \varnothing$, $\{x\}^< \cap C_3 \neq \varnothing$, либо наоборот $\{x\}^< \cap U \neq \varnothing$, $\{x\}^< \cap C_3 = \varnothing$. В первом случае при $x \not\gtrless b_3$ подмножество $M_+(\mathcal{K}) \cup x$ имеет вид $\mathcal{K}_1$, а при $x > b_3$ подмножество $\mathcal{K} \cup x$ — вид $\mathcal{N}_6$. Покажем, что и второй случай невозможен. Положим $V = T^{\not\gtrless}(x) \cap U$. Легко видеть, что V является подмножеством U ширины $w \leq 1$ (иначе $\mathcal{K} \cup x$ содержит $\mathcal{K}_1$); кроме того, V — верхнее подмножество, ибо подмножество $U \setminus V = \{x\}^< \cap U$ является нижним. И в случае $w = 1$ подмножество $\mathcal{K} \cup x$ содержит Q_{22}, если $V = \{b_2\}$, и $\mathcal{N}_4$, если $V = \{b_1\}$ или $V = C_2$. Если же V пусто, то по лемме о циклической перестановке (при $M = U$, $N = x$, $R = C_3$) существует $T_1 \cong_{\min} S$, в котором $\mathcal{K} \cup x$ имеет вид $\mathcal{N}_6$.

Итак, пришли к противоречию и, следовательно, существует $T \cong_{\min} S$, содержащее $\mathcal{K}_2$ или $\mathcal{K}_3$.

Теорема 3 доказана.

7. Доказательство теорем 1 и 2. Теперь нетрудно доказать теоремы 1 и 2.

Докажем сначала теорему 2. Если ч. у. множество S min-эквивалентно WNP-критическому множеству $\mathcal{N}$, то в силу предложений 2 и 5 форма Титса $q_S(z)$ не является неотрицательной. Легко видеть, что из предложения 1 (с учетом предложений 2 и 5) следует, что каждое собственное подмножество $R \subset S$ имеет неотрицательную форму Титса; действительно, иначе $\mathcal{N}$ имело бы собственное подмножество $Q \cong_{\min} R$, форма Титса которого не является неотрицательной, а это противоречило бы тому факту, что множество $\mathcal{N}$ является NP-критическим. Таким образом, S является NP-критическим.

Наоборот, если S является NP-критическим, то по теореме 3 оно min-эквивалентно некоторому ч. у. множеству S', которое содержит WNP-критическое множество $N \cong \mathcal{N}_i$. Но тогда (снова в силу предложений 1 и 2) $S' = N$, а значит, S min-эквивалентно N.

Переходим к доказательству теоремы 1. Утверждение 2 теоремы непосредственно следует из предложения 2. Если же S удовлетворяет условию утверждения 1, то любое ч. у. множество, которое min-эквивалентно S, не содержит WNP-критических подмножеств (согласно определению последних), а значит, по теореме 3 S имеет неотрицательную форму Титса.

1. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34 – 42.
2. *Завадский А. Г., Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества ручного типа // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. – С. 122 – 143.
3. *Бондаренко В. М., Полищук А. М.* О критерии положительной определенности для одного класса бесконечных квадратичных форм // Нелінійні коливання. – 2003. – **6**, № 1. – С. 3 – 14.
4. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Вісн. Київ. ун-ту. Фізика і математика. – 2005. – № 1. – С. 24 – 25.
5. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On posets of width two with positive Tits form // Algebra and Discrete Math. – 2005. – № 2. – P. 11 – 22.
6. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 3. – С. 18 – 58.
7. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On finite posets of infinite type and their Tits forms // Algebra and Discrete Math. – 2006. – № 2. – P. 17 – 21.
8. *Бондаренко В. М., Завадский А. Г., Назарова Л. А.* О представлениях ручных частично упорядоченных множеств // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 75 – 106.
9. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – **39**, № 5. – С. 963 – 991.
10. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32 – 41.

Получено 05.02.08