УДК 519.2

М. В. Миронюк (Фіз.-техн. ін-т низьких температур НАН України, Харків)

ДО ТЕОРЕМ СКИТОВИЧА – ДАРМУА ТА ХЕЙДЕ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

By the well-known Skitovich – Darmois theorem, the independence of two linear forms of independent random variables with nonzero coefficients implies that the random variables are Gaussian variables. This result was generalized by Krakowiak to the case of random variables with values in a Banach space, where coefficients of the forms are continuous invertible operators. In the first part of the paper, we give a new proof of the Skitovich – Darmois theorem for a Banach space.

Heyde proved another characterization theorem of a Gaussian distribution similar to the Skitovich – Darmois theorem, where, instead of the independence of linear forms it is assumed that the conditional distribution of one of linear forms is symmetrical if another form is fixed. In the second part of the paper, we prove an analog of the Heyde theorem for a Banach space.

Известная теорема Скитовича – Дармуа утверждает, что из независимости двух линейных форм от независимых случайных величин с ненулевыми коэффициентами следует, что случайные величины являются гауссовыми. Этот результат был обобщен Краковяком для случайных величин со значениями в банаховом пространстве, когда коэффициентами форм являются непрерывные оборотные операторы. В первой части работы приведено новое доказательство теоремы Скитовича – Дармуа в банаховом пространстве.

Хейде доказал близкую к теореме Скитовича – Дармуа характеризационную теорему, в которой вместо независимости линейных форм предполагалось, что условное распределение одной линейной формы при фиксированной другой является симметричным. Во второй части работы доказан аналог теоремы Хейде в банаховом пространстве.

1. Вступ. У 1953 р. В. П. Скитович та Г. Дармуа довели наступну теорему, яка характеризує гауссів розподіл на дійсній прямій.

Теорема Скитовича – Дармуа [1, с. 3] (§ 3.1). *Нехай* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *— незалежні випадкові величини. Якщо лінійні форми* $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ *та* $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$, *де коефіцієнти* α_j, β_j *є відмінними від нуля, незалежні, то випадкові величини* ξ_j *є гауссовими.*

Перенесенню цієї характеризаційної теореми на різноманітні алгебраїчні структури присвячено велику кількість досліджень (див., наприклад, [2 – 12]). При цьому коефіцієнтами форм є топологічні автоморфізми відповідної алгебраїчної структури.

У 1962 р. С. Гур'є та І. Олкін узагальнили теорему Скитовича – Дармуа для випадкових величин, що набувають значень у $\mathbb{R}^n$, та невироджених матриць у якості коефіцієнтів форм [13]. Потім їх доведення спростив А. Зінгер (див. [1], § 3.2). Теорема Скитовича – Дармуа узагальнювалась також у випадку, коли випадкові величини набувають значень у гільбертовому просторі. При цьому коефіцієнтами форм були деякі лінійні неперервні оператори (див. [8, 10]). У 1985 р. В. Краковяк узагальнив теорему Скитовича – Дармуа для випадкових величин, що набувають значень у довільному сепарабельному банаховому просторі X, коли коефіцієнтами форм є оборотні лінійні неперервні оператори A_j, B_j [9]. Зазначимо, що доведення теореми Скитовича – Дармуа та її узагальнень зводиться до вивчення розв'язків рівняння в характеристичних функціоналах

$$\prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(A_j^* u + B_j^* v\right) = \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(A_j^* u\right) \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(B_j^* v\right), \quad u,\, v \in X^*, \tag{1}$$

де X^* — простір, спряжений до простору X, а A_j^*, B_j^* — оператори, спряжені до операторів A_j, B_j.

У цій статті ми наведемо нове доведення теореми Скитовича – Дармуа у сепарабельному банаховому просторі. Зазначимо, що це доведення принципово відрізняється від доведення, наведеного у [9]. У роботі [9] доведення теореми Скитовича – Дармуа у банаховому просторі проводилось за наступною схемою. Автор показує, що характеристичні функціонали розподілів випадкових величин не дорівнюють нулю, та логарифмує рівняння (1). Потім спеціальним чином обирає скінченновимірний підпростір, на якому інтегрує отримане рівняння, помножене на щільність деякого гауссового розподілу. Далі, використовуючи оцінки росту виникаючих при доведенні цілих функцій, показує, що розв'язками рівняння (1) є характеристичні функціонали гауссових розподілів. Близьку ідею раніше використав А. Зінгер при доведенні узагальнення теореми Скитовича – Дармуа у скінченновимірному просторі (див., наприклад, [1], § 3.2).

Доведення теореми Скитовича – Дармуа, наведене у цій статті, ґрунтується, як і класичне доведення цієї теореми, на використанні методу скінченних різниць. Весь комплексний аналіз при цьому „приховано" у теоремах Крамера та Марцинкевича, які, очевидно, мають місце і в банаховому просторі. Ідею цього доведення раніше використав Г. Фельдман при доведенні теореми Скитовича – Дармуа для локально компактних абелевих груп (див. [3]).

Також у цій статті доведено близьку до теореми Скитовича – Дармуа теорему Хейде у банаховому просторі, де замість незалежності лінійних форм передбачається, що умовний розподіл однієї лінійної форми при фіксованій іншій є симетричним.

Ми будемо використовувати стандартні факти з теорії ймовірнісних розподілів у банаховому просторі (див., наприклад, [14]). Нагадаємо деякі позначення та означення. Нехай X — сепарабельний банахів простір, X^* — спряжений до нього простір. Позначимо через $\mathrm{Aut}(X)$ множину усіх оборотних неперервних операторів, через $\langle x, f\rangle$ значення функціонала $f \in X^*$ на елементі $x \in X$. Півгрупу відносно згортки ймовірнісних розподілів на X позначимо через $\mathcal{M}^1(X)$. Для $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ через $\bar{\mu}$ позначимо розподіл, що визначається формулою $\bar{\mu}(E) = \mu(-E)$ для будь-якої борелевої множини $E \subset X$. Характеристичний функціонал імовірнісного розподілу μ випадкової величини ξ зі значеннями у X визначається формулою

$$\hat{\mu}(f) = \mathbf{E}\left[e^{i\langle \xi, f\rangle}\right] = \int_X e^{i\langle x, f\rangle}\, d\mu(x), \quad f \in X^*.$$

Зазначимо, що $\hat{\bar{\mu}}(f) = \overline{\hat{\mu}}(f)$.

Розподіл $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$ будемо називати гауссовим, якщо або μ — вироджений розподіл, або μ є абсолютно неперервним відносно міри Лебега у $\mathbb{R}$ та має щільність $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma}}$, $t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Характеристична функція гауссового розподілу має вигляд $\hat{\mu}(t) = e^{imt - \frac{1}{2}\sigma t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$.

Означення 1. *Випадкова величина* ξ *називається гауссовою, якщо для будь-якого елемента* $f \in X^*$ *гауссовою є випадкова величина* $\langle \xi, f \rangle$. *Іншими словами, розподіл* μ *на* X *називається гауссовим, якщо для будь-якого елемента* $f \in X^*$ *його одновимірний образ* $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ *є гауссовим розподілом, а отже, існують дійсні числа* m_f *та* $\sigma_f \geq 0$, *для яких* $\hat{\mu}_f(t) = e^{i m_f t - \frac{1}{2}\sigma_f t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

Зазначимо, що у банаховому просторі має місце наступне твердження (див. [14, с. 4], §. 2.4).

Твердження 1. *Нехай X — банаховий простір. Характеристичний функціонал гауссового розподілу* $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ *має вигляд*

$$\hat{\mu}(f) = e^{i\langle m, f\rangle - \frac{1}{2}\langle Rf, f\rangle}, \quad f \in X^*, \tag{2}$$

де $m \in X$, *а* $R: X^* \to X$ *— симетричний невід'ємний оператор. Елемент m називається середнім розподілу* μ, *а* R *— його коваріаційним оператором.*

Навпаки, якщо $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ *з характеристичним функціоналом вигляду* (2), *де* $m \in X$ *— деякий елемент, а* $R: X^* \to X$ *— деякий симетричний невід'ємний оператор, то* μ *— гауссів розподіл у* X *з середнім m та коваріаційним оператором* R.

Враховуючи те, що $\hat{\mu}(tf) = \hat{\mu}_f(t)$ для будь-яких $f \in X^*$, $t \in \mathbb{R}$, отримуємо

$$\langle m, f\rangle = m_f, \quad \langle Rf, f\rangle = \sigma_f. \tag{3}$$

2. Теореми Каца – Бернштейна, Крамера та Марцинкевича у банаховому просторі. З означення 1 безпосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 2. *Розподіл* μ *на* X *гауссів тоді і лише тоді, коли для будь-якого* $f \in X^*$ *функція* $\hat{\mu}_f(t)$ *є характеристичною функцією деякого гауссового розподілу на* $\mathbb{R}$.

За допомогою твердження 2 легко отримати аналоги для дійсного сепарабельного банахового простору таких відомих класичних теорем, як теорема Каца – Бернштейна про характеризацію гауссового розподілу незалежністю суми та різниці незалежних випадкових величин, теорема Крамера про розклад гауссового розподілу [15] (§ 4.1), теорема Марцинкевича [15] (§ 3.13). Доведення цих теорем зводиться до опису розв'язків відповідних функціональних рівнянь, які припускають звуження на кожний одновимірний підпростір. Проілюструємо викладене вище на прикладі теореми Каца – Бернштейна.

Теорема A (аналог теореми Каца – Бернштейна). *Нехай* ξ_1 *та* ξ_2 *— незалежні випадкові величини зі значеннями у дійсному сепарабельному банаховому просторі X та з розподілами* μ *та* ν *відповідно. Якщо* $\xi_1 + \xi_2$ *та* $\xi_1 - \xi_2$ *є незалежними, то* μ *та* ν *— гауссові розподіли з однаковими коваріаційними операторами.*

Доведення. Як і в класичному випадку (див., наприклад, [1], §. 3.1), легко бачити, що умова незалежності $\xi_1 + \xi_2$ та $\xi_1 - \xi_2$ рівносильна тому, що характеристичні функціонали $\hat{\mu}(f)$ та $\hat{\nu}(f)$ задовольняють рівняння

$$\hat{\mu}(f+g)\,\hat{\nu}(f-g) = \hat{\mu}(f)\hat{\mu}(g)\,\hat{\nu}(f)\hat{\nu}(-g), \quad f, g \in X^*. \tag{4}$$

Зафіксуємо $f \in X^*$ та розглянемо звуження рівняння (4) на одновимірний підпростір $L = \{tf,\ t \in \mathbb{R}\}$. З теореми Каца – Бернштейна випливає, що $\hat{\mu}(tf)$ та $\hat{\nu}(tf)$ — характеристичні функції деяких гауссових розподілів. Оскільки елемент f є довільним, то для будь-якого $f \in X^*$ функції $\hat{\mu}_f(t)$ та $\hat{\nu}_f(t)$ є характеристичними функціями деяких гауссових розподілів. З твердження 2 випливає, що $\hat{\mu}(f)$ та $\hat{\nu}(f)$ — характеристичні функціонали гауссових розподілів з коваріаційними операторами R_1 та R_2 відповідно. Зазначимо, що з теореми Каца – Бернштейна випливає, що для будь-якого $f \in X^*$

$$\hat{\mu}_f(t) = e^{im_f t - \sigma_f t^2}, \qquad \hat{\nu}_f(t) = e^{in_f t - \sigma_f t^2},$$

де m_f, $n_f \in \mathbb{R}$, $\sigma_f \geq 0$. Звідси та з (3) випливає, що $R_1 = R_2$.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** У роботі [2] А. Рухін довів аналог теореми Каца – Бернштейна для локально компактних абелевих груп з однозначним діленням на 2. Він зазначив, що аналогічними міркуваннями можна довести теореми Каца – Бернштейна для випадкових величин, що набувають значень у гільбертовому просторі. Пізніше теорему А у гільбертовому просторі передовів Р. Лаха [10]. Як ми бачимо, теорема А не потребує спеціального доведення, а безпосередньо випливає з теореми Каца – Бернштейна.

Нехай $P(f)$ — функція на X^*, h — довільний елемент X^*. Позначимо через Δ_h оператор скінченної різниці

$$\Delta_h P(f) = P(f+h) - P(f).$$

Многочленом на просторі X^* називається неперервна функція $P(f)$ така, що при деякому n

$$\Delta_h^{n+1} P(f) = 0$$

для всіх $f, h \in X^*$.

Як і у випадку теореми А, з справедливості теорем Крамера та Марцинкевича на дійсній прямій випливає їх справедливість у банаховому просторі.

Теорема В (аналог теореми Крамера). *Якщо* μ *— гауссів розподіл на дійсному сепарабельному банаховому просторі* X *та* $\mu = \mu_1 * \mu_2$, *то* μ_1 *та* μ_2 *також гауссові розподіли на* X.

Теорема С (аналог теореми Марцинкевича). *Нехай* X *— дійсний сепарабельний банахів простір,* $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$. *Якщо*

$$\hat{\mu}(f) = e^{P(f)}, \tag{5}$$

де $P(f)$ *— многочлен, то* μ *— гауссів розподіл на* X.

Зазначимо, що з урахуванням (2) доведення теореми В зводиться до опису розв'язків рівняння

$$e^{i\langle m, f\rangle - \frac{1}{2}\langle Rf, f\rangle} = w_1(f) w_2(f), \quad f \in X^*, \tag{6}$$

у класі характеристичних функціоналів імовірнісних розподілів на X.

***Зауваження*. 2.** Теорему С можна посилити. А саме, якщо (5) має місце в деякому околі нуля, то, застосовуючи твердження 2 та результати розділу 2 в [16], отримуємо, що μ — гауссів розподіл на X.

3. Міркування, що доводять теорему А, рівносильні теоретико-ймовірнісному міркуванню, тобто без переходу до рівнянь у класі характеристичних функціоналів. Дійсно, нехай $f \in X^*$. Тоді скалярні випадкові величини $\langle \xi_1, f\rangle$ та $\langle \xi_2, f\rangle$ є незалежними і $\langle \xi_1, f\rangle + \langle \xi_2, f\rangle$ та $\langle \xi_1, f\rangle - \langle \xi_2, f\rangle$ також незалежні. З теореми Каца – Бернштейна випливає, що випадкові величини $\langle \xi_1, f\rangle$ та

$\langle \xi_2, f \rangle$ є гауссовими. Оскільки f — довільний елемент X^*, то випадкові величини ξ_1 та ξ_2 також гауссові. Аналогічне доведення теореми B є в [17] (§ 6.3.4) для гільбертового простору.

4. Відомою є теорема Гірі – Лукача – Лага, в якій гауссів розподіл на дійсній прямій характеризується незалежністю лінійної та квадратичної форм від незалежних випадкових величин (див. [1], § 4.2, [15], § 8.3). У роботі [18] цей результат було узагальнено на банахові простори. Як в зауваженні 3, так і при доведенні необхідності основної теореми роботи [18] використовуються ті ж самі міркування.

3. Теорема Скитовича – Дармуа в банаховому просторі. Доведемо аналог теореми Скитовича – Дармуа в банаховому просторі.

Теорема 1 (аналог теореми Скитовича – Дармуа). *Нехай* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n \geq 2$, — *незалежні випадкові величини зі значеннями у дійсному сепарабельному банаховому просторі* X *та з розподілами* μ_j. *Нехай* A_j, $B_j \in \mathrm{Aut}(X)$. *Якщо лінійні форми* $L_1 = A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n$ *та* $L_2 = B_1\xi_1 + \ldots + B_n\xi_n$ *є незалежними, то* μ_j — *гауссові розподіли.*

Доведення. Покладаючи $\xi_j' = A_j\xi_j$, зводимо доведення до випадку, коли лінійні форми мають вигляд $L_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ та $L_2 = C_1\xi_1 + \ldots + C_n\xi_n$, де $C_j \in \mathrm{Aut}(X)$. Як і у класичному випадку (див., наприклад, [1], § 3.1), легко бачити, що умова незалежності L_1 та L_2 рівносильна тому, що характеристичні функціонали $\hat{\mu}_j(f)$ задовольняють рівняння

$$\prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(f + C_j^* g\right) = \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j(f) \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(C_j^* g\right), \quad f, g \in X^*, \tag{7}$$

де C_j^* — оператор, спряжений до C_j. Таким чином, доведення теореми 1 зводиться до опису розв'язків функціонального рівняння (7) у класі характеристичних функціоналів імовірнісних розподілів на X^*. Зазначимо, що на відміну від теорем A – C ми не можемо скористатися твердженням 2 та звести доведення теореми 1 до класичної теореми Скитовича – Дармуа. Справа в тому, що, взагалі кажучи, на відміну від рівнянь, до яких зводяться доведення теорем A – C, рівняння (7) не допускає звуження на кожний одновимірний підпростір у X^*.

Покладемо $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Тоді $\hat{\nu}_j(f) = \left|\hat{\mu}_j(f)\right|^2 \geq 0$. Очевидно, що характеристичні функціонали $\hat{\nu}_j(f)$ також задовольняють рівняння (7). Якщо ми доведемо, що $\hat{\nu}_j(f)$ — характеристичні функціонали гауссових розподілів, то з теореми B буде випливати, що $\hat{\mu}_j(f)$ також характеристичні функціонали гауссових розподілів. Це дозволяє с самого початку вважати, що $\hat{\mu}_j(f) \geq 0$.

Перевіримо спочатку, що $\hat{\mu}_j(f) > 0$. Цей факт можна довести так само, як і у випадку $X = \mathbb{R}^n$ (див. [1], § 3.2). Для повноти викладу наведемо тут інше доведення (див. [19]). Зазначимо, що з цього доведення випливає, що на будь-якій зв'язній абелевій групі всі відмінні від нуля в нулі групи неперервні розв'язки рівняння (7), де C_j^* — топологічні автоморфізми групи, не дорівнюють нулю.

Позначимо $L_j = \left\{f \in X^*: \ \hat{\mu}_j(f) \neq 0\right\}$, $L = \bigcap_{j=1}^{n} L_j$, $M = \left\{g \in X^*: \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j\left(C_j^* g\right) \neq 0\right\}$, $N = \bigcap_{j=1}^{n} C_j^*(M)$. З огляду на (7) легко бачити, що $L + N \subset L$. Позначимо $(k)N = \left\{f \in X^*: f = f_1 + \ldots + f_k,\ f_j \in N\right\}$. Тоді з включення $L + N \subset L$ випливає, що $L + \bigcup_{k=1}^{\infty}(k)N \subset L$. Оскільки $0 \in N$, то $L + \bigcup_{k=1}^{\infty}(k)N = L$. Оскільки N — відкрита множина, що містить нуль, то внаслідок зв'язності X^* маємо $X^* = \bigcup_{k=1}^{\infty}(k)N$. Отже, $X^* = L$, тобто $\hat{\mu}_j(f) > 0$ для всіх $f \in X^*$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Покажемо, що $\hat{\mu}_j(f)$ — характеристичний функціонал гауссового розподілу. Покладемо $\psi_j(f) = -\ln \hat{\mu}_j(f)$. З (7) випливає

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(f + C_j^* g\right) = P(f) + Q(g), \quad f, g \in X^*, \tag{8}$$

де

$$P(f) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(f), \qquad Q(g) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(C_j^* g\right).$$

Для розв'язання (8) скористаємося методом скінченних різниць, використавши схему доведення теореми Скитовича – Дармуа для локально компактних абелевих груп (див. [3]). Нехай h_n — довільний елемент X^*. Покладемо $k_n = -\left(C_n^*\right)^{-1} h_n$. Тоді $h_n + C_n^* k_n = 0$. Надамо в (8) змінним f та g прирости h_n та k_n відповідно. Віднімемо від отриманого рівняння (8) та знайдемо

$$\sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{l_{n,j}} \psi_j\left(f + C_j^* g\right) = \Delta_{h_n} P(f) + \Delta_{k_n} Q(g), \quad f, g \in X^*, \tag{9}$$

де $l_{n,j} = h_n + C_j^* k_n = \left(C_j^* - C_n^*\right) k_n$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Зазначимо, що ліва частина рівняння (9) не містить функцію ψ_n. Нехай h_{n-1} — довільний елемент X^*. Покладемо $k_{n-1} = -\left(C_{n-1}^*\right)^{-1} h_{n-1}$. Тоді $h_{n-1} + C_{n-1}^* k_{n-1} = 0$. Надамо в (9) змінним f та g прирости h_{n-1} та k_{n-1} відповідно. Віднімаючи від отриманого рівняння (9), одержуємо

$$\sum_{j=1}^{n-2} \Delta_{l_{n-1,j}} \Delta_{l_{n,j}} \psi_j\left(f + C_j^* g\right) = \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} P(f) + \Delta_{k_2} \Delta_{k_1} Q(g), \quad f, g \in X^*, \tag{10}$$

де $l_{n-1,j} = h_{n-1} + C_j^* k_{n-1} = \left(C_j^* - C_{n-1}^*\right) k_{n-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n-2$. Ліва частина рівняння (10) не містить функцій ψ_n та ψ_{n-1}. Міркуючи аналогічно, приходимо до рівняння

$$\Delta_{l_{2,1}} \Delta_{l_{3,1}} \ldots \Delta_{l_{n,1}} \psi_1\left(f + C_1^* g\right) =$$
$$= \Delta_{h_2} \Delta_{h_3} \ldots \Delta_{h_n} P(f) + \Delta_{k_2} \Delta_{k_3} \ldots \Delta_{k_n} Q(g), \quad f, g \in X^*, \tag{11}$$

де h_m — довільний елемент X^*, $k_m = -\left(C_m^*\right)^{-1} h_m$, $l_{m,1} = h_m + C_1^* k_m = \left(C_1^* - C_m^*\right) k_m$, $m = 2, 3, \ldots, n$. Нехай h_1 — довільний елемент X^*. Покладемо

$k_1 = -\left(C_1^*\right)^{-1} h_1$. Тоді $h_1 + C_1^* k_1 = 0$. Надамо в (9) змінним f та g прирости h_1 та k_1 відповідно. Віднімаючи від отриманого рівняння (11), знаходимо

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_n} P(f) + \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \ldots \Delta_{k_n} Q(g) = 0, \quad f, g \in X^*. \tag{12}$$

Нехай h — довільний елемент X^*. Надамо в (12) змінній f приріст h. Віднімаючи від отриманого рівняння (12), одержуємо

$$\Delta_h \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_n} P(f) = 0, \quad f \in X^*. \tag{13}$$

Зазначимо, що f, h та h_m, $m = 1, \ldots, n$, — довільні елементи X^*. Покладемо в (13) $h_1 = \ldots = h_n = h$. Тоді

$$\Delta_h^{n+1} P(f) = 0, \quad f, h \in X^*. \tag{14}$$

Отже, $P(f)$ — многочлен на X^*. Позначимо $\gamma = \mu_1 * \ldots * \mu_n$. Тоді $\hat{\gamma}(f) = \prod_{j=1}^n \hat{\mu}_j(f)$. Отже, $\hat{\gamma}(f) = e^{-P(f)}$. З теореми C випливає, що $\hat{\gamma}(f)$ — характеристичний функціонал гауссового розподілу. Тоді з теореми B отримуємо, що і $\hat{\mu}_j(f)$ — характеристичний функціонал гауссового розподілу.

Теорему 1 доведено.

4. Теорема Хейде в банаховому просторі. Близький до теореми Скитовича – Дармуа результат довів Хейде, який замість незалежності лінійних форм передбачав, що умовний розподіл однієї лінійної форми при фіксованій іншій є симетричним [1] (§ 13.4.1).

Теорема Хейде. *Нехай* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — *незалежні випадкові величини*, $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ *та* $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$ — *лінійні форми, в яких коефіцієнти* α_j, β_j — *відмінні від нуля константи такі, що* $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \neq 0$ *для всіх* $i \neq j$. *Якщо умовний розподіл* L_2 *при фіксованій* L_1 *симетричний, то всі випадкові величини* ξ_j *є гауссовими.*

Аналогічний результат має місце і у дійсному сепарабельному банаховому просторі.

Теорема 2 (аналог теореми Хейде)**.** *Нехай* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $n \geq 2$, — *незалежні випадкові величини зі значеннями у дійсному сепарабельному банаховому просторі* X *та з розподілами* μ_j, $A_j, B_j \in \mathrm{Aut}(X)$, *причому* $B_iA_i^{-1} \pm B_jA_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ *для всіх* $i \neq j$. *Якщо умовний розподіл* $L_2 = B_1\xi_1 + \ldots + B_n\xi_n$ *при фіксованій* $L_1 = A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n$ *є симетричним, то* μ_j — *гауссів розподіл.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, показуємо, що доведення теореми 2 зводиться до випадку, коли лінійні форми мають вигляд $L_1 = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ та $L_2 = C_1\xi_1 + \ldots + C_n\xi_n$, де $C_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такі, що $C_i \pm C_j \in \mathrm{Aut}(X)$ для всіх $i \neq j$, а характеристичні функціонали $\hat{\mu}_j(f) \geq 0$. Як і в роботі [4], показуємо, що умова симетрії умовного розподілу L_2 при фіксованій L_1 рівносильна тому, що характеристичні функціонали $\hat{\mu}_j(f)$ задовольняють рівняння

$$\prod_{j=1}^n \hat{\mu}_j\left(f + C_j^* g\right) = \prod_{j=1}^n \hat{\mu}_j\left(f - C_j^* g\right), \quad f, g \in X^*, \tag{15}$$

де C_j^* — оператори, спряжені до C_j. Оскільки $\hat{\mu}_j(0) = 1$, то існує такий окіл нуля U, що всі $\hat{\mu}_j(f) > 0$ при $f \in U$. Виберемо в U такий симетричний окіл нуля V, щоб

$$\sum_{j=1}^{4n} \lambda_j(V) \subset U, \quad \lambda_j \in \left\{I, C_1^*, \ldots, C_n^*\right\}.$$

Логарифмуючи в околі нуля V рівняння (15), отримуємо

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(f + C_j^* g\right) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(f - C_j^* g\right), \quad f, g \in V, \tag{16}$$

де $\psi_j(f) = -\ln \hat{\mu}_j(f)$. Будемо розв'язувати отримане рівняння методом скінченних різниць так само, як і у класичному випадку (див. [1], § 13.4.1).

Нехай h_n — довільний елемент V. Надамо в (16) змінним f та g прирости $C_n^* h_n$ та h_n відповідно. Віднімаючи від отриманого рівняння (16), маємо

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{l_{n,j}} \psi_j\left(f + C_j^* g\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{m_{n,j}} \psi_j\left(f - C_j^* g\right), \quad f, g \in V, \tag{17}$$

де $l_{n,j} = \left(C_n^* + C_j^*\right) h_n$, $m_{n,j} = \left(C_n^* - C_j^*\right) h_n$. Зазначимо, що права частина рівняння (17) не містить функцію ψ_n. Нехай h_{n-1} — довільний елемент V. Надамо в (17) змінним f та g прирости $C_{n-1}^* h_{n-1}$ та h_{n-1} відповідно. Віднімаючи від отриманого рівняння (17), одержуємо

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{l_{n-1,j}} \Delta_{l_{n,j}} \psi_j\left(f + C_j^* g\right) = \sum_{j=1}^{n-2} \Delta_{m_{n-1,j}} \Delta_{m_{n,j}} \psi_j\left(f - C_j^* g\right), \quad f, g \in V, \tag{18}$$

де $l_{n-1,j} = \left(C_{n-1}^* + C_j^*\right) h_{n-1}$, $m_{n,j} = \left(C_{n-1}^* - C_j^*\right) h_{n-1}$. Права частина рівняння (18) не містить функцій ψ_n та ψ_{n-1}. Міркуючи аналогічно, приходимо до рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta_{l_{1,j}} \Delta_{l_{2,j}} \ldots \Delta_{l_{n,j}} \psi_j\left(f + C_j^* g\right) = 0, \quad f, g \in V, \tag{19}$$

де h_i — довільний елемент V, $l_{i,j} = \left(C_i^* + C_j^*\right) h_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нехай k_n — довільний елемент V. Надамо в (19) змінним f та g прирости $C_n^* h_n$ та $-h_n$ відповідно. Віднімаючи від отриманого рівняння (19), маємо

$$\sum_{j=1}^{n-1} \Delta_{b_{n,j}} \Delta_{l_{1,j}} \Delta_{l_{2,j}} \ldots \Delta_{l_{n,j}} \psi_j\left(f + C_j^* g\right) = 0, \quad f, g \in V, \tag{20}$$

де $b_{n,j} = \left(C_n^* - C_j^*\right) k_n$. Зазначимо, що ліва частина рівняння (20) не містить функцію ψ_n. Нехай k_{n-1} — довільний елемент V. Надамо в (20) змінним f та g прирости $C_{n-1}^* k_{n-1}$ та $-k_{n-1}$ відповідно. Віднімаючи від отриманого рівняння (20), одержуємо

$$\sum_{j=1}^{n-2} \Delta_{b_{n-1,j}} \Delta_{b_{n,j}} \Delta_{l_{1,j}} \ldots \Delta_{l_{n,j}} \psi_j\left(f + C_j^* g\right) = 0, \quad f, g \in V, \tag{21}$$

де $b_{n-1,j} = \left(C_{n-1}^* - C_j^*\right) k_{n-1}$. Права частина рівняння (21) не містить функцій ψ_n і ψ_{n-1}. Міркуючи аналогічно, приходимо до рівняння

$$\Delta_{b_{2,1}} \Delta_{b_{3,1}} \ldots \Delta_{b_{n,1}} \Delta_{l_{1,1}} \Delta_{l_{2,1}} \ldots \Delta_{l_{n,1}} \psi_1\left(f + C_1^* g\right) = 0, \quad f, g \in V, \tag{22}$$

де k_i — довільний елемент V, $b_{i,1} = \left(C_i^* - C_1^*\right) k_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

З того, що k_i, h_i — довільні елементи V, $C_i^* \pm C_j^* \in \operatorname{Aut}(X^*)$ для усіх $i \neq j$, а $l_{i,j} = \left(C_i^* + C_j^*\right) h_i$, $b_{i,1} = \left(C_i^* - C_1^*\right) k_i$, отримуємо, що в деякому околі нуля W

$$\Delta_h^{2n-1} \psi_1(f) = 0, \quad f, h \in W. \tag{23}$$

Отже, в околі нуля W $\hat{\mu}_1(f) = e^{-P(f)}$, де $P(f)$ — многочлен. З зауваження 2 випливає, що μ_1 — гауссові розподіли. Аналогічно отримуємо, що всі μ_j — гауссові розподіли.

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 5.** Теореми Скитовича – Дармуа та Хейде аналогічним чином можна довести і в сепарабельному просторі Фреше.

1. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. – М.: Наука, 1972. – 656 с.
2. *Рухин А. Л.* Об одной теореме С. Н. Бернштейна // Мат. заметки. – 1969. – **6**, № 3. – С. 307 – 310.
3. *Feldman G. M.* A characterization of the Gaussian distribution on Abelian groups // Probab. Theory and Relat. Fields. – 2003. – **126**. – P. 91 – 102.
4. *Feldman G. M.* On a characterization theorem for locally compact Abelian groups // Ibid. – 2005. – **133**. – P. 345 – 357.
5. *Feldman G. M.* Arithmetic of probability distributions and characterization problems on Abelian groups // AMS Transl. Math. Monogr. – Providence, RI, 1993.
6. *Feldman G. M., Graczyk P.* On the Skitovich – Darmois theorem on compact Abelian groups // J. Theor. Probab. – 2000. – **13**, № 3. – P. 859 – 869.
7. *Graczyk P., Loeb J.-J.* A Bernstein property of measures on groups and symmetric spaces // Probab. and Math. Statistics. – 2000. – **20**, № 1. – P. 141 – 149.
8. *Kannan D., Kannappan Pl.* On a characterization of Gaussian measures in Hilbert spaces // Bull. Pol. Acad. Sci. – 1985. – **33**, № 1 – 2. – P. 77 – 83.
9. *Krakowiak W.* The theorem of Darmois – Skitovič for Banach valued random variables // Ann. Inst. H. Poincaré B. – 1975. – **11**, № 4. – P. 397 – 404.
10. *Laha R. G.* A characterization of Gaussian law in Hilbert space // Aequat. math. – 1991. – **41**. – P. 85 – 93.
11. *Neuenschwander D., Roynette B., Schott R.* Characterization of Gauss measures on nilpotent Lie groups and symmetric spaces // C. r. Acad. sci. Ser. I. – 1997. – **324**. – P. 87 – 92.
12. *Spielman J. L.* A characterization of the Gaussian distribution in a Hilbert space // Pacif. J. Math. – 1977. – **68**, № 2. – P. 497 – 505.
13. *Ghurye S. G., Olkin I.* A characterization of the multivariate normal distribution // Ann. Math. Statist. – 1962. – **33**. – P. 533 – 541.
14. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
15. *Ramachandran B.* Advanced theory of characteristic functions. – Calcutta: Statist. Publ. Soc., 1967.
16. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложение случайных величин и векторов. – М.: Наука, 1972. – 480 с.
17. *Grenander U.* Probabilities on algebraic structures. – New York; London: John Wiley and Sons Inc., 1963.
18. *Дороговцев А. А.* Одна характеризация гауссовского распределения в банаховом пространстве // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1985. – № 33. – С. 20 – 25.
19. *Фельдман Г. М.* К теореме Скитовича – Дармуа на абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. – 1992. – **37**, № 4. – С. 695 – 708.

Одержано 12.03.07,
після доопрацювання — 29.02.08