К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.5

В. М. Дільний (Дрогоб. пед. ун-т)

ЕКВІВАЛЕНТНЕ ОЗНАЧЕННЯ ДЕЯКИХ ВАГОВИХ ПРОСТОРІВ ГАРДІ

We present the equivalent definition for spaces of functions analytic in the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ for which

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}\, dr \right\} < +\infty .$$

Приведено эквивалентное определение пространств аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$ функций, для которых

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}\, dr \right\} < +\infty .$$

Нехай $H^p(\mathbb{C}_+)$, $1 \le p < +\infty$, — простір функцій, аналітичних у $\mathbb{C}_+ = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}$, для яких

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

У роботі [1] показано, що цей простір збігається з простором Гарді $\tilde{H}^p(\mathbb{C}_+)$ аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\|f\|_{\tilde{H}^p} = \sup_{x>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p\, dy \right\}^{1/p} < +\infty,$$

і норми $\|\cdot\|_{H^p}$ та $\|\cdot\|_{\tilde{H}^p}$ є еквівалентними. У роботі [2] розглянуто простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \ge 0$, $1 \le p < +\infty$, аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\|f\|_{H^p_\sigma} := \sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Функції з цього простору мають майже скрізь (м. с.) на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які позначаємо через $f(iy)$ і $f(iy)\, e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$, причому остання норма дорівнює [3] наступній:

$$\|f\|^{\times}_{H^p_\sigma} := \max_{\varphi\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

При дослідженні повноти деяких систем функцій у $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ [4, 5] з'являється потреба розглядати простори, що визначаються, як і класичні простори Гарді, через інтегрування по прямих, які паралельні координатним осям. Розглянемо простір $\tilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$, аналітичних у $\mathbb{C}_+$ функцій, для яких

$$\|f\|_{\tilde{H}^p_\sigma} := \max\left\{\sup_{y\in\mathbb{R}}\left\{\int_0^{+\infty}|f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|}dx\right\};\right.$$
$$\left.\sup_{x>0}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^p e^{-p\sigma|y|}dy\right\}\right\}^{1/p} < +\infty. \tag{1}$$

Величина $\|\cdot\|_{\tilde{H}^p_\sigma}$ задовольняє всі ознаки норми, зокрема нерівність трикутника у випадку $p = 1$ випливає з нерівності $\max\{a + b; c + d\} \leq \max\{a; c\} + \max\{b; d\}$, а для випадку $p > 1$ також із нерівності Мінковського. Основним результатом цієї статті є наступне твердження.

Теорема. *Простори $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та $\tilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geq 0$, $1 \leq p < +\infty$, збігаються, причому норми $\|\cdot\|_{H^p_\sigma}$ та $\|\cdot\|_{\tilde{H}^p_\sigma}$ є еквівалентними.*

Зазначимо, що теорема втрачає силу, якщо в (1) під знаком максимуму вилучити перший елемент (що видно на прикладі функції $f(z) \equiv 1$) чи другий (це маємо з прикладу $f(z) = e^{-z}\sin\sigma z$). Проте із згаданого результату роботи [1] випливає, що у випадку $\sigma = 0$ теорема залишається справедливою, якщо в (1) вилучити перший елемент під знаком максимуму. Для доведення теореми розглянемо простори $E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, $1 \leq p < \infty$, функцій, аналітичних у куті $\mathbb{C}(\alpha,\beta) = \{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, для яких

$$\|f\|_{E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]} := \sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int_0^{+\infty}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p dr\right\}^{1/p} < +\infty.$$

Ці простори вивчалися в [6, 7]. Там, зокрема, показано, що функції з цих просторів мають м. с. на $\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)$ кутові граничні значення, які теж позначатимемо через f і $f \in L^p[\partial\mathbb{C}(\alpha,\beta)]$. Цей простір є банаховим відносно вказаної норми, яка дорівнює наступній [8]:

$$\|f\|^\times_{E^p[\mathbb{C}(\alpha,\beta)]} := \sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int_0^{+\infty}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p dr\right\}^{1/p}.$$

Розглянемо також простір $\tilde{E}^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$, $1 \leq p < \infty$, функцій, аналітичних у $\mathbb{C}(0,\pi/2)$, для яких

$$\|f\|_{\tilde{E}^p} := \max\left\{\sup_{y>0}\left\{\int_0^{+\infty}|f(x+iy)|^p dx\right\};\ \sup_{x>0}\left\{\int_0^{+\infty}|f(x+iy)|^p dy\right\}\right\}^{1/p} < +\infty. \tag{2}$$

Остання величина задовольняє всі ознаки норми.

Лема 1. *Якщо $f \in \tilde{E}^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$, $1 \leq p < \infty$, то $f \in E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$ і $\|f\|_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} \leq c_1\|f\|_{\tilde{E}^p}$, де стала c_1 не залежить від f.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $p = 1$. З умови (2) випливає, що функція f належить [9] простору Смірнова E^1 у кожному квадраті $\square_a = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < a, 0 < \operatorname{Im} z < a\}$, $0 < a < +\infty$. Тому [9, с. 205] вона має м. с. на $\partial\square_a$ кутові граничні значення, які теж позначаємо через f, і

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\square_a}\frac{f(t)}{t-z}dz = \begin{cases} f(z), & z\in\square_a, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<\arg z<2\pi. \end{cases} \tag{3}$$

Зафіксуємо довільне $z\in\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Оскільки

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_k}\frac{f(t)}{t-z}dt\right| \le \frac{1}{2\pi d_a}\int\limits_{l_k}|f(t)||dt| \to 0, \quad a\to+\infty, \quad k=1,2,$$

де $l_1=\{a+iy:\ 0<y<a\}$, $l_2=\{x+ia:\ 0<x<a\}$, а d_a — відстань від точки z до відповідної сторони $\partial\square_a$, то, переходячи в (3) до границі при $a\to+\infty$, маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathbb{C}(0;\frac{\pi}{2})}\frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), & z\in\mathbb{C}\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & z\notin\overline{\mathbb{C}}\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Тому, позначаючи ліву частину останньої рівності через $\psi(z)$, для $z=x+iy\in\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ одержуємо

$$f(z) = \psi(z)+\psi(-z)-\psi(\bar z)-\psi(-\bar z) = -\frac{4}{\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)}\frac{xyt\,f(t)}{\left(t^2-x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2}dt,$$

звідки знаходимо

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{vr^2\sin2\varphi\,f(iv)\,dv}{\left(v^2+r^2\cos2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi}-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{ur^2\sin2\varphi\,f(u)\,du}{\left(u^2-r^2\cos2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi},$$

$$z = re^{i\varphi}\in\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Інтегруючи $|f(z)|$ по $r\in(0;+\infty)$ і використовуючи теорему Фубіні, отримуємо

$$\int\limits_0^{+\infty}\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|dr \le \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{vr^2\sin2\varphi\,|f(iv)|\,dr}{\left(v^2+r^2\cos2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi}dv +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}|f(u)|\int\limits_0^{+\infty}\frac{ur^2\sin2\varphi\,dr}{\left(u^2-r^2\cos2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi}du.$$

Враховуючи, що

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{vr^2\sin2\varphi\,dr}{\left(v^2+r^2\cos2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi} = \frac{\pi}{2}\sin\varphi,$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{ur^2\sin2\varphi\,dr}{\left(u^2-r^2\cos2\varphi\right)^2+r^4\sin^2 2\varphi} = \frac{\pi}{2}\cos\varphi,$$

маємо

$$\|f\|_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} \le \max_{\varphi\in(0;\pi/2)}\{\sin\varphi+\cos\varphi\}\|f\|_{\tilde{E}^p} = \sqrt{2}\,\|f\|_{\tilde{E}^p}.$$

Нехай тепер $1<p<+\infty$. Оскільки за умовою (2) функція f належить простору Смірнова $E^p \subset E^1$ у кожному квадраті $\Box_a$, то залишається правильною рівність (3). З того, що за нерівністю Гьольдера

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_k}\frac{f(t)}{t-z}dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{l_k}|f(t)|^p|dt|\right)^{1/p}\left(\int\limits_{l_k}\left|\frac{1}{t-z}\right|^q|dt|\right)^{1/q} \le$$

$$\le \frac{a^{1/q}}{2\pi d_a}\left(\int\limits_{l_k}|f(t)|^p|dt|\right)^{1/p} \to 0$$

при $a\to+\infty$, де $k=1,2$, а $1/p+1/q=1$, випливає справедливість рівності (4). Але [10]

$$\varphi_1(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt \in E^p[\mathbb{C}(0;\pi)],$$

$$\varphi_2(z) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(it)}{it-z}dt \in E^p\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

тому $f=\varphi_1-\varphi_2 \in E^p\left[\mathbb{C}\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\right]$. Оскільки з результатів [8] маємо $\|f\|_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} \le \|f\|^{\times}_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]}$ і за лемою Фату $\|f\|^{\times}_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} \le 2\|f\|_{\tilde{E}^p}$, то лему доведено.

Зазначимо, що з доведення леми 1 випливають оцінки $c_1 \le \sqrt{2}$ при $p=1$ і $c_1 \le 2$ при $1<p<+\infty$.

Лема 2. *Якщо* $f\in E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$, $1\le p<\infty$, *то* $f\in \tilde{E}^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]$ *і* $\|f\|_{\tilde{E}^p} \le c_2\|f\|_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]}$, *де стала* c_2 *не залежить від* f.

Доведення проведемо подібно до доведення аналогічних тверджень у [1, 11]. Покажемо, що

$$\sup_{x>0}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(x+iy)|^p\,dy\right\}^{1/p} < c_3\|f\|_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]}, \tag{5}$$

де c_3 не залежить від f. При відображенні $w=z^2$ півпряма $\{z\colon \operatorname{Re}z=x, y>0\}$, $x>0$, перейде у гілку параболи $l_x=\{w=u+iv : u=x^2-v^2/4x^2, v>0\}$. При цьому

$$\int\limits_0^{+\infty}|f(x+iy)|^p\,dy = \int\limits_{l_x}|f(\sqrt{w})|^p\frac{|dw|}{2\sqrt{|w|}} = \frac{1}{2}\int\limits_{l_x}|f_1(w)|^p|dw|,$$

де $f_1(w)=f\left(w^{1/2}\right)/w^{1/2p}$. Довжина частини l_x, яка лежить у кожному квадраті $\Delta(u_0,h)=\{w=u+iv : u_0<u<u_0+h, 0<v<h\}$, $h>0$ $u_0\in\mathbb{R}$, не перевищує $2h$. Тому міра

$$\mu_x(D) = \int\limits_{l_x\cap D}|dw|,$$

де D — довільний компакт із $\mathbb{C}^+ := \{w: \operatorname{Im} w > 0\}$, є мірою Карлесона в $\mathbb{C}^+$, тобто $\mu_x(\Delta(u_0, h)) \le c_4 h$, де c_4 не залежить від u_0, h та x. Тоді [12, с. 70; 1, с. 78] для кожної функції $f \in E^p\left[\mathbb{C}^+\right]$ (тобто функції з класу Гарді у $\mathbb{C}^+$) маємо

$$\int\limits_{\mathbb{C}^+} |f_1|^p \, d\mu_x \le c_5 \| f_1 \|^p_{E^p[\mathbb{C}^+]} = c_5 \| f \|_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]} < +\infty,$$

що й доводить рівність (5). Нерівність

$$\sup_{y>0} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dx \right\}^{1/p} < c_6 \| f \|_{E^p[\mathbb{C}(0,\pi/2)]}$$

доводиться аналогічно, а позначивши $c_2 = \max\{c_3, c_6\}$, отримаємо твердження леми.

Доведення теореми. Якщо $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, то $f(z)\, e^{i\sigma z} \in E^p\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Тому за лемою 2 $f(z)\, e^{i\sigma z} \in \tilde{E}^p\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Також $f(z)\, e^{-i\sigma z} \in E^p\left[\mathbb{C}\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)\right]$. Тому, застосовуючи лему 2 до функції $f(-iz)\, e^{-\sigma z} \in E^p\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$, маємо $f(-iz)\, e^{-\sigma z} \in \tilde{E}^p\left[\mathbb{C}\left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Тоді, враховуючи аналітичність функції f у $\mathbb{C}_+$, одержуємо $f \in \tilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і $\| f \|_{\tilde{H}^p_\sigma} \le c_7 \| f \|_{H^p_\sigma}$, де c_7 не залежить від f.

Нехай тепер $f \in \tilde{H}^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Застосовуючи до функції $f(z)\, e^{i\sigma z}$ та $f(-iz)\, e^{-\sigma z}$ аналогічним чином лему 1, отримуємо твердження теореми.

1. *Седлецкий А. М.* Эквивалентное определение пространств в H^p в полуплоскости и некоторые приложения // Мат. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 75 – 82.
2. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 484 – 500.
3. *Винницький Б. В.* Про розв'язки однорідного рівняння згортки в одному класі функцій, аналітичних в півсмузі // Мат. студ. – 1997. – **7**, № 1. – С. 41 – 52.
4. *Винницький Б. В., Дільний В. М.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Там же. – 2001. – **16**, № 1. – С. 61 – 70.
5. *Винницкий Б. В., Дильный В. Н.* Об обобщении теоремы Берлинга – Лакса // Мат. заметки. – 2006. – **79**, № 3. – С. 362 – 368.
6. *Григорян Ш. Ф.* О базисности неполных систем рациональных функций в угловой области // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1978. – **12**, № 5-6. – С. 460 – 487.
7. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1996. – 672 с.
8. *Martirosian V.* On a theorem of Djrbashian of the Phragmen – Lindeloff type // Math. Nachr. – 1989. – **144**. – S. 21 – 27.
9. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 336 с.
10. *Джрбашян М. М.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1978. – **42**, № 6. – С. 1322 – 1384.
11. *Винницький Б. В.* Про нулі деяких класів функцій, аналітичних в півплощині // Мат. студ. – 1996. – **6**. – С. 67 – 72.
12. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 470 с.

Одержано 02.10.06