УДК 519.21

І. В. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗБІЖНІСТЬ ІМПУЛЬСНОГО ПРОЦЕСУ НАКОПИЧЕННЯ ЗІ СТРИБКОВИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ

We study impulsive storage process switching by a jump process. The switching process itself is an averaging process. Weak convergence of the storage process in a series scheme when a small parameter ε tends to zero is proved.

Исследован импульсный процесс накопления, который переключается с помощью скачкообразного процесса. Переключающий процесс, в свою очередь, усредняется. Доказана слабая сходимость процесса накопления в схеме серий, когда малый параметр ε стремится к нулю.

У роботі [1] розглядається збіжність процесів накопичення з перемиканнями в схемі серій, які будуються за допомогою сум умовно незалежних випадкових величин або процесів з умовно незалежними приростами на траєкторіях процесів, що перемикаються. Вивчено також деякі застосування до аналізу процесів накопичення в моделях систем обслуговування.

Більш детально, в [1] розглянуто послідовність процесів

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{\nu(nt)} \gamma_{nk}(S_{nk}; x_k),$$

де $S_{nk+1} = S_{nk} + \xi_{nk}(x_k, S_{nk})$, ξ_{nk}, γ_{nk} — незалежні сім'ї незалежних у сукупності випадкових величин, x_k — марковський процес, $\nu(t) = \min\{k : k \geq 0, t_{k+1} \geq t\}$, $t \geq 0$, — загальна кількість точок перемикання на проміжку $[0, t]$.

Таким чином, процеси $S_n(t)$ утворюють процеси накопичення з перемиканням на рекурентних процесах напівмарковського типу. Було вивчено збіжність за параметром n. Використовуючи методи робіт [2, 3], зокрема метод характеристичних функцій, доведено збіжність $S_n(t)$ до неоднорідного процесу з незалежними приростами.

Ми пропонуємо розглянути аналогічну задачу у дещо спрощеному варіанті в термінах малого параметра серій, що прямує до нуля, та застосувати для доведення збіжності метод, запропонований в роботі [4] (див. також [5]).

Дотримуючись роботи [4], позначимо через $x(t)$, $t \geq 0$, марковський процес стрибків у стандартному просторі станів $(\mathcal{E}, \mathrm{E})$. Нехай цей процес визначається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy)\, [\varphi(y) - \varphi(x)].$$

Напівмарковське ядро

$$Q(x, B, t) = P(x, B)\left(1 - e^{-q(x)t}\right), \quad x \in E, \quad B \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0,$$

визначає асоційований марковський процес відновлення (x_k, τ_k), $k \geq 0$, де x_k, $k \geq 0$, — вкладений ланцюг Маркова, що заданий стохастичним ядром

$$P(x, B) = \mathrm{P}(x_{k+1} \in B | x_k = x),$$

а τ_k, $k \geq 0$, — точковий процес моментів стрибків, який визначається функцією розподілу часу перебування $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$, $k \geq 0$,

$$\mathrm{P}(\theta_{k+1} \leq t | x_k = x) = 1 - e^{-q(x)t}.$$

В розділі 3 роботи [4] вивчається процес

$$S^\varepsilon(t) = s + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} C\left(S_k^\varepsilon; x_k\right),$$

де $s \in \mathbb{R}^{d'}$, $S_k^\varepsilon = S(\varepsilon\tau_k)$, $\nu(t) = \max\{k : \tau_k \le t\}$ — лічильний процес стрибків.

В [4] доведено, що процес $S^\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$ збігається до розв'язку рівняння

$$\frac{d}{dt}\hat{S}(t) = \hat{C}\left(\hat{S}(t)\right),$$

де

$$\hat{C}(s) = \int_E \pi(dx)\, C(s; x). \tag{1}$$

У даній роботі ми дещо узагальнюємо останню задачу та розглядаємо імпульсний процес у просторі $\mathbb{R}^d$

$$U^\varepsilon(t) = u + \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon)} \alpha_k^\varepsilon\left(S_k^\varepsilon; x_k\right), \tag{2}$$

де $\alpha_k^\varepsilon(s; x)$, $k \ge 1$, $s \in \mathbb{R}^{d'}$, $x \in E$, — сім'я випадкових величин із значеннями в $\mathbb{R}^d$.

Основною метою роботи є доведення слабкої збіжності процесу (2).

Зауваження. На відміну від роботи [1], де вивчається збіжність за параметром $n \to \infty$, ми вводимо нормування часу малим параметром $\varepsilon \to 0$. Крім того, відмінність від роботи [1] полягає в деяких обмеженнях на випадкові величини, які входять в означення процесу (2). Зокрема, далі введемо умови на α_k^ε.

Нехай виконуються наступні умови:

C_1. Припустимо, що $x(t)$, $t \ge 0$, — рівномірно ергодичний процес зі стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \mathcal{E}$. Таким чином, вкладений ланцюг Маркова x_k, $k \ge 0$, також є рівномірно ергодичним та має стаціонарний розподіл $\rho(B)$, $B \in \mathcal{E}$, і виконуються співвідношення

$$\pi(dx)\, q(x) = q\rho(dx), \qquad q := \int_E \pi(dx)\, q(x).$$

C_2. Сім'я випадкових величин $\alpha_k^\varepsilon(s; x)$, $k \ge 1$, $s \in \mathbb{R}^{d'}$, $x \in E$, розглядається в схемі серій з малим параметром $\varepsilon > 0$ та визначається функцією розподілу

$$\Phi^\varepsilon(s, x; z) = \mathbb{P}\left\{\alpha_k^\varepsilon(s; x) < z\right\}, \quad s \in \mathbb{R}^{d'}, \quad z \in \mathbb{R}^d, \quad x \in E.$$

C_3. Сім'я випадкових величин $\alpha_k^\varepsilon(s; x)$, $k \ge 1$, $s \in \mathbb{R}^{d'}$, $x \in E$, є рівномірно квадратично інтегровною:

$$\sup_{\varepsilon > 0} \sup_{x \in E} \int_{\|z\| > c} z^2 \Phi^\varepsilon(s, x; dz) \to 0, \quad c \to \infty.$$

Нехай виконуються умови пуассонівської апроксимації:

PA_1. Апроксимація середніх:

$$a_\varepsilon(s; x) = \mathrm{E}\alpha_k^\varepsilon(s; x) = \int_{\mathbb{R}^d} z\Phi^\varepsilon(s, x; dz) = \varepsilon\left[a(s; x) + \theta_a^\varepsilon(s; x)\right]$$

та

$$c_\varepsilon(s;x) = \int_{\mathbb{R}^d} zz^* \Phi^\varepsilon(s,x;dz) = \varepsilon\left[c(s;x) + \theta_c^\varepsilon(s;x)\right].$$

PA_2. Пуассонівська апроксимація ядра інтенсивності

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(z)\Phi^\varepsilon(s,x;dz) = \varepsilon\left[\Phi_g(s,x) + \theta_g^\varepsilon(s;x)\right]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbb{R}^d)$ та ядро $\Phi_g(s,x)$ обмежене для всіх $g \in C_3(\mathbb{R}^d)$, тобто

$$\sup_{x\in E}\left|\Phi_g(s,x)\right| \le \Phi_g < \infty.$$

Члени, якими можна знехтувати $(\theta_a^\varepsilon, \theta_c^\varepsilon, \theta_g^\varepsilon)$, задовольняють умови

$$\sup_{x\in E}\left|\theta_\cdot^\varepsilon(s;x)\right| \to 0, \quad \varepsilon\to 0.$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *За умов* $C_1 - C_3$, PA_1, PA_2 *має місце слабка збіжність пари*

$$\left(U^\varepsilon(t), S^\varepsilon(t)\right) \Rightarrow \left(\hat{U}(t), \hat{S}(t)\right), \quad \varepsilon\to 0.$$

Граничний процес $\left(\hat{U}(t), \hat{S}(t)\right)$, $t\ge 0$, *визначається генератором*

$$\hat{A}(s)\varphi(u,s) = \hat{a}(s)\varphi_u'(u,s) + \hat{C}(s)\varphi_s'(u,s) + \int_{\mathbb{R}^d}[\varphi(u+z,s) - \varphi(u,s)]\,\hat{\Phi}(s;dz), \tag{3}$$

де усереднений детермінований зсув визначається як

$$\hat{a}(s) = \int_E \pi(dx)\,a(s;x), \tag{4}$$

а усереднене ядро інтенсивності — як

$$\hat{\Phi}(s;dz) = \int_E \pi(dx)\,\Phi(s,x;dz). \tag{5}$$

Тут ядро $\Phi(s,x;\,dz)$ *визначається з рівності*

$$\Phi_g(s;x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(z)\,\Phi(s,x;dz), \quad g(z)\in C_3(\mathbb{R}^d).$$

Доведення. Для доведення слабкої збіжності використаємо результати, отримані в розділі 3 роботи [4].

Нехай $C_0^2\left(\mathbb{R}^d \times E\right)$ — простір дійснозначних двічі неперервно диференційовних функцій по першому аргументу, визначених на $\mathbb{R}^d\times E$ і таких, що дорівнюють нулю на нескінченності, а $C\left(\mathbb{R}^d\times E\right)$ — простір дійснозначних неперервно обмежених функцій, визначених на $\mathbb{R}^d\times E$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2 [4] (теорема 6.3). *Нехай сім'я марковських процесів* $\xi^\varepsilon(t)$, $t\ge 0$, $\varepsilon > 0$, *задовольняє наступні умови*:

CD_1. *Існує сім'я тест-функцій* $\varphi^\varepsilon(u,x)$ *у просторі* $C_0^2\left(\mathbb{R}^d\times E\right)$ *таких,* *що*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi^{\varepsilon}(u, x) = \varphi(u),$$

рівномірно на u, x.

CD_2. *Має місце збіжність*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{L}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(u, x) = \mathrm{L}\varphi(u)$$

рівномірно на u, x. *Сім'я функцій* $\mathrm{L}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, *є рівномірно обмеженою, а* $\mathrm{L}\varphi(u)$ *і* $\mathrm{L}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}$ *належать до* $C\big(\mathbb{R}^d \times E\big)$.

CD_3. *Квадратичні характеристики мартингалів, що відповідають марковському процесу* $\xi^{\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, *мають вигляд* $\left\langle \mu^{\varepsilon} \right\rangle_t = \int_0^t \zeta^{\varepsilon}(s)\,ds$, *де випадкові функції* ζ^{ε}, $\varepsilon > 0$, *задовольняють умову*

$$\sup_{0\le s\le T} \mathrm{E}\left|\zeta^{\varepsilon}(s)\right| \le c < +\infty.$$

CD_4. *Початкові значення збігаються та*

$$\sup_{\varepsilon>0} \mathrm{E}\left|\zeta^{\varepsilon}(0)\right| \le C < +\infty.$$

Тоді має місце слабка збіжність

$$\xi^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \xi(t), \quad \varepsilon \to 0.$$

Розглянемо трикомпонентний марковський процес

$$U^{\varepsilon}(t), \quad S^{\varepsilon}(t), \quad x(t/\varepsilon), \quad t \geq 0,$$

де третя перемикаюча компонента визначається на стандартному просторі $(\mathcal{E}, \mathrm{E})$ за допомогою генератора

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_E P(x, dy)\,[\varphi(y) - \varphi(x)].$$

Цей процес характеризується мартингалом

$$\mu_t^{\varepsilon} = \varphi\big(U^{\varepsilon}(t), S^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon)\big) - \int_0^t \mathrm{L}^{\varepsilon}\varphi\big(U^{\varepsilon}(\tau), S^{\varepsilon}(\tau), x(\tau/\varepsilon)\big)d\tau, \tag{6}$$

де генератор L^{ε} має вигляд [4] (розділ 3)

$$\mathrm{L}^{\varepsilon}\varphi(u, s, x) = \left[\varepsilon^{-1}Q + \mathbb{A}^{\varepsilon}(s, x) + \mathbb{C}^{\varepsilon}(s, x)\right]\varphi(u, s, x). \tag{7}$$

Тут

$$\mathbb{A}^{\varepsilon}(s, x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1}[\varphi(u + \varepsilon a(s; x)) - \varphi(u)],$$

$$\mathbb{A}(s, x)\varphi(u) = a(s; x)\varphi'(u),$$

$$\mathbb{C}^{\varepsilon}(s, x)\varphi(s) = \varepsilon^{-1}[\varphi(s + \varepsilon C(s; x)) - \varphi(s)],$$

$$\mathbb{C}(s, x)\varphi(s) = C(s; x)\varphi'(s).$$

Розв'язок задачі сингулярного збурення для L^{ε} на тест-функціях $\varphi^{\varepsilon}(u, s, x) = \varphi(u, s) + \varepsilon\varphi_1(u, s, x)$ наведено в [4] (лема 7.3). Згідно з цією лемою, граничний двокомпонентний процес $\left(\hat{U}(t),\ \hat{S}(t)\right)$ визначається генератором

$$\mathbb{L}\varphi(u, s) = \hat{a}(s)\,\varphi'_u(u, s) + \hat{C}(s)\,\varphi'_s(u, s) + \int_{\mathbb{R}^d} [\varphi(u+z, s) - \varphi(u, s)]\,\hat{\Phi}(s; dz), \tag{8}$$

де $\hat{C}(s)$, $\hat{a}(s)$ і $\hat{\Phi}(s; dz)$ визначено в (1), (4) і (5) відповідно.

Тепер можемо застосувати теорему 2.

З (7) та (8) очевидно, що розв'язок задачі сингулярного збурення задовольняє умови CD_1, CD_2.

Умова CD_3 вимагає, щоб квадратична характеристика мартингала, що відповідає трикомпонентному марковському процесу, була відносно компактною. Аналогічні умови для стохастичних систем з марковським перемиканням вивчаються в розділі 6.4.1 роботи [4]. Там доведено (див., зокрема, наслідок 6.1), що процеси, визначені мартингалами типу (6), є відносно компактними.

Оскільки $U^{\varepsilon}(0) = \hat{U}(0)$, $S^{\varepsilon}(0) = \hat{S}(0)$, $x^{\varepsilon}(0) = x(0)$, умова CD_4, очевидно, виконується. Таким чином, всі умови теореми 2 виконуються, тобто має місце слабка збіжність $\left(U^{\varepsilon}(t),\ S^{\varepsilon}(t)\right) \Rightarrow \left(\hat{U}(t),\ \hat{S}(t)\right)$.

Граничний марковський процес $\left(\hat{U}(t),\ \hat{S}(t)\right)$, $t \geq 0$, згідно з результатами [4], визначається генератором (3).

Теорему 1 доведено.

1. *Анісімов В. В.* Збіжність процесів накопичення з перемиканнями // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2000. – № 63. – С. 3 – 12.
2. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. – New York: J. Wiley and Sons, 1968. – 368 p.
3. *Григелионис Б. И.* Об относительной компактности множеств вероятностных мер в $D_{(0,\infty)}(X)$ // Лит. мат. сб. – 1973. – **13**, № 4. – С. 83 – 96.
4. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – World Sci. Publ., 2005. – 330 p.
5. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Diffusion approximation with equilibrium of evolutionary systems switched by semi-Markov processes // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 9. – С. 1253 – 1260.

Одержано 29.01.08