УДК 517.911.5

Т. А. Комлева (Одес. нац. политехн. ун-т),
А. В. Плотников (Одес. акад. стр-ва и архитектуры),
Н. В. Скрипник (Одес. нац. ун-т)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Some special space of convex compact sets is considered and notions of a derivative and an integral for multivalued mapping different from already known ones are introduced. The differential equation with multivalued right-hand side satisfying the Caratheodory conditions is also considered and the theorems on the existence and uniqueness of its solutions are proved. In contrast to O. Kaleva's approach, the given approach enables one to consider fuzzy differential equations as usual differential equations with multivalued solutions.

Розглянуто деякий спеціальний простір опуклих компактних множин і введено поняття похідної та інтеграла для багатозначного відображення, що відрізняються від відомих раніше. Також розглянуто диференціальне рівняння з багатозначною правою частиною, яка задовольняє вимоги Каратеодорі, і доведено теореми існування та єдиності його розв'язків. Цій підхід дає можливість розглядати нечіткі диференціальні рівняння як звичайні диференціальні рівняння з багатозначними розв'язками, що відрізняє його від підходу O. Kaleva.

Развитие теории многозначных отображений [1, 2] привело к вопросу, что понимать под производной и интегралом от многозначного отображения. В 1965 г. R. J. Aumann [3] впервые ввел понятие интеграла от многозначного отображения, которое было основано на интегрировании однозначных ветвей. Затем в 1967 г. M. Hukuhara [4] ввел понятие производной и интеграла для многозначных отображений, использовав подходы, которые существовали для однозначных отображений. В 1969 г. F. S. de Blasi [5] рассмотрел дифференциальные уравнения с производной Хукухары как обобщение обыкновенных дифференциальных уравнений, а в 1982 г. А. В. Плотников [6] — дифференциальные включения с производной Хукухары. В последующем данные уравнения рассматривались в работах [7 – 17].

В то же время с 1965 г. после работы L. A. Zadeh [18] началось развитие теории нечетких множеств, и в 1983 г. M. L. Puri, D. A. Ralescu [19] ввели понятия H-производной и интеграла для нечетких отображений, использовав при этом подход M. Hukuhara для α-срезок нечетких отображений. В 1985 г. O. Kaleva [20] рассмотрел нечеткие дифференциальные уравнения и доказал теорему существования и единственности решения задачи Коши для случая, когда правая часть удовлетворяет условию Липшица. В дальнейшем нечеткие дифференциальные уравнения рассматривались в работах [21 – 25].

В данной работе вводится некоторое специальное пространство множеств Ω и предлагаются отличные от известных определения производной и интеграла для многозначного отображения, элементами которого являются множества из Ω. Данный подход дает возможность использовать эти понятия и для случая нечетких отображений. При этом хотелось бы отметить, что в данном случае исчезают те сложности, которые возникают при использовании H-производной и интеграла из [19]. Также в фазовом пространстве Ω рассмотрено дифференциальное уравнение и доказаны теоремы существования решения, когда правая часть является измеримой по t, непрерывной по X и ограниченной суммируемой функцией, и единственности, когда правая часть дополнительно удовлетворяет условию Липшица по X.

Рассмотрим $(n+1)$-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ с нормой

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + |x_{n+1}|.$$

Обозначим через Ω пространство множеств из $\mathbb{R}^n \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ таких, что $A \in \Omega$ тогда и только тогда, когда:

1) $A \in \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n \times [0, 1])$;

2) для любого $\alpha \in [0, 1]$ существует $a \in A$ такое, что $a = (a_1, \ldots, a_n, \alpha)^T$;

3) если $(a_1, \ldots, a_n, \alpha)^T \in A$, то $(a_1, \ldots, a_n, 0)^T \in A$.

Определение 1. *Суммой $A \oplus B$ двух множеств $A, B \in \Omega$ называется множество*

$$C = A \oplus B = \{c = a \oplus b : c_i = a_i + b_i,\ i = \overline{1, n},\ c_{n+1} = \min\{a_{n+1}, b_{n+1}\}\}. \quad (1)$$

Определение 2. *Произведением $\lambda \circ A$ скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$ на множество $A \in \Omega$ называется множество*

$$C = \lambda \circ A = \{c = \lambda \circ a : c_i = \lambda a_i,\ i = \overline{1, n},\ c_{n+1} = a_{n+1}\}. \quad (2)$$

Лемма 1. *Если $A, B \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $A \oplus B$, $\lambda \circ A \in \Omega$.*

Доказательство леммы проводится аналогично [26].

Операция суммы и умножения на скаляр для любых множеств $A, B, C \in \Omega$ и любых чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $A \oplus B = B \oplus A$;

2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$;

3) $\lambda \circ (\mu \circ A) = (\lambda\mu) \circ A$;

4) $\lambda \circ (A \oplus B) = \lambda \circ A \oplus \lambda \circ B$;

5) в пространстве Ω существует нулевой элемент $\mathbf{0} = \{0\} \times [0, 1]$;

6) $0 \circ A = \mathbf{0}$;

7) $1 \circ A = A$.

Пространство Ω не является линейным пространством с операциями суммы множеств и умножения множества на скаляр хотя бы потому, что не у каждого элемента $A \in \Omega$ есть противоположный элемент (а лишь у множеств вида $\{a\} \times [0, 1]$). Кроме того, не всегда выполняется необходимый для линейности закон дистрибутивности

$$(\lambda + \mu) \circ A = \lambda \circ A \oplus \mu \circ A,$$

а выполняется включение

$$(\lambda + \mu) \circ A \subset \lambda \circ A \oplus \mu \circ A.$$

Введем в рассмотрение шар радиуса r с центром в $\mathbf{0}$ следующим образом: множество $S_r(\mathbf{0}) = S_r(0) \times [0, 1]$, 0 — нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^n$, $S_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le r\}$.

Поскольку $S_{r_1}(0) + S_{r_2}(0) = S_{r_1 + r_2}(0)$ и $\lambda S_r(0) = S_{|\lambda| r}(0)$, то $S_{r_1}(\mathbf{0}) \oplus S_{r_2}(\mathbf{0}) = S_{r_1 + r_2}(\mathbf{0})$ и $\lambda \circ S_r(\mathbf{0}) = S_{|\lambda| r}(\mathbf{0})$.

Как и в работе [4], введем разность множеств в пространстве Ω и рассмотрим некоторые ее свойства.

Определение 3. *Разностью $A \ominus B$ двух множеств $A, B \in \Omega$ называется множество $C \in \Omega$ такое, что $A = B \oplus C$.*

Лемма 2. *Пусть* $A, B, C, D \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда*:

1) $(A \oplus B) \ominus (C \oplus D) = (A \ominus C) \oplus (B \ominus D)$, *если разности* $A \ominus C$ *и* $B \ominus D$ *существуют*;

2) $(A \ominus B) \ominus (C \ominus D) = (A \ominus C) \ominus (B \ominus D)$, *если разности* $(A \ominus C) \ominus (B \ominus D)$ *и* $C \ominus D$ *существуют*;

3) $(A \ominus B) \ominus (C \ominus D) = (A \ominus C) \oplus (D \ominus B)$, *если разности* $A \ominus C$, $D \ominus B$ *и* $C \ominus D$ *существуют*;

4) $\lambda \circ (A \ominus B) = \lambda \circ A \ominus \lambda \circ B$.

Доказательство проводится аналогично [14].

В пространстве Ω введем метрику или расстояние между двумя множествами.

Определение 4. *Расстоянием по Хаусдорфу между множествами* $A, B \in \Omega$ *назовем*

$$h(A, B) = \min_{r \geq 0} \{A \subset B \oplus S_r(\mathbf{0}),\ B \subset A \oplus S_r(\mathbf{0})\}.$$

Выполнение аксиом метрики следует из определения и свойств суммы множеств.

Лемма 3. *Для любых* $A, B \in \Omega$ *и любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *справедливы следующие свойства расстояния по Хаусдорфу*:

1) $h(\lambda \circ A, \lambda \circ B) = |\lambda| h(A, B)$;

2) $h(A \oplus B, C \oplus D) \leq h(A, C) + h(B, D)$;

3) $h(A \oplus B, C \oplus B) = h(A, C)$;

4) $h(A, B) = h(A \ominus B, \{\mathbf{0}\})$, *если разность* $A \ominus B$ *существует*;

5) $h(A \ominus B, C \ominus D) \leq h(A, C) + h(B, D)$.

***Замечание* 1.** Очевидно, что можно построить изометрическое отображение $\gamma(\cdot)$ между пространством E^n, которое было рассмотрено в работах [19, 22 – 24], и пространством Ω.

Пусть $I = [t_0, T]$.

Определение 5. *Многозначное отображение* $F : I \to \Omega$ *называется измеримым на* I, *если для любого непустого множества* $K \in \Omega$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *множество* $\{t \in I : h(F(t), K) \leq \varepsilon\}$ *измеримо по Лебегу.*

Определение 6. *Многозначное отображение непрерывно в точке* $t' \in I$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всех* $t \in I : |t - t'| \leq \delta$ *выполняется неравенство* $h(F(t), F(t')) \leq \varepsilon$.

Определение 7. *Многозначное отображение непрерывно на промежутке* I, *если оно непрерывно в каждой точке этого промежутка.*

Определение 8. *Измеримая функция* $f : I \to \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ *называется однозначной ветвью многозначного отображения* $F : I \to \Omega$, *если для почти всех* $t \in I$ *выполняется включение* $f(t) \in F(t)$.

Лемма 4. *Если измеримая функция* $f : I \to \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ *является однозначной ветвью многозначного отображения* $F : I \to \Omega$, *то функция* $\hat{f}(\cdot) = (f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot), 0)^T$ *также является однозначной измеримой ветвью многозначного отображения* $F : I \to \Omega$.

Доказательство следует из определения измеримой ветви и свойств пространства Ω.

Определение 9. *Многозначное отображение* $X : I \to \Omega$ *называется дифференцируемым в точке* $t \in I$, *если существует множество* $DX(t) \in \Omega$ *такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \circ \big(X(t+\Delta t) \ominus X(t)\big) \quad и \quad \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \circ \big(X(t) \ominus X(t-\Delta t)\big)$$

существуют и равны $DX(t)$.

Заметим, что в данном определении предполагается, что для всех достаточно малых $\Delta t > 0$ разности $X(t) \ominus X(t-\Delta t)$, $X(t+\Delta t) \ominus X(t)$ существуют.

Если t — граничная точка промежутка I, то имеет смысл говорить лишь о дифференцируемости слева (справа) функции $X : I \to \Omega$ в точке t.

Лемма 5. *Пусть многозначные отображения* $X, Y : I \to \Omega$ *дифференцируемы в точке* $t \in I$. *Тогда*:

1) *многозначное отображение* $X \oplus Y : I \to \Omega$ *дифференцируемо в точке* t *и при этом справедливо равенство*

$$D(X \oplus Y)(t) = DX(t) \oplus DY(t);$$

2) *если в окрестности точки* t *существует разность* $X \ominus Y$, *то многозначное отображение* $X \ominus Y : I \to \Omega$ *дифференцируемо в точке* t *и при этом справедливо равенство*

$$D(X \ominus Y)(t) = DX(t) \ominus DY(t);$$

3) *для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *многозначное отображение* $\lambda \circ X : I \to \Omega$ *дифференцируемо в точке* t *и при этом справедливо равенство*

$$D(\lambda \circ X)(t) = \lambda \circ DX(t).$$

Доказательство. 1. В силу определения

$$DX(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \circ \big(X(t+\Delta t) \ominus X(t)\big) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \circ \big(X(t) \ominus X(t-\Delta t)\big),$$

$$DY(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \circ \big(Y(t+\Delta t) \ominus Y(t)\big) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \circ \big(Y(t) \ominus Y(t-\Delta t)\big).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < \Delta t \le \delta$ выполняются неравенства

$$h\left(\frac{1}{\Delta t}(X(t+\Delta t) \ominus X(t)), DX(t)\right) \le \varepsilon, \qquad h\left(\frac{1}{\Delta t}(X(t) \ominus X(t-\Delta t)), DX(t)\right) \le \varepsilon,$$

$$h\left(\frac{1}{\Delta t}(Y(t+\Delta t) \ominus Y(t)), DY(t)\right) \le \varepsilon, \qquad h\left(\frac{1}{\Delta t}(Y(t) \ominus Y(t-\Delta t)), DY(t)\right) \le \varepsilon.$$

При $0 < \Delta t \le \delta$, используя свойства разности и расстояния по Хаусдорфу, получаем

$$h\left(\frac{1}{\Delta t} \circ ((X(t+\Delta t) \oplus Y(t+\Delta t)) \ominus (X(t) \oplus Y(t))), DX(t) \oplus DY(t)\right) =$$

$$= h\left(\frac{1}{\Delta t} \circ ((X(t+\Delta t) \ominus X(t)) \oplus (Y(t+\Delta t) \ominus Y(t))), DX(t) \oplus DY(t)\right) =$$

$$= h\left(\frac{1}{\Delta t} \circ (X(t+\Delta t) \ominus X(t)) \oplus \frac{1}{\Delta t} \circ (Y(t+\Delta t) \ominus Y(t)), DX(t) \oplus DY(t)\right) \le$$

$$\le h\left(\frac{1}{\Delta t} \circ (X(t+\Delta t) \ominus X(t)), DX(t)\right) + h\left(\frac{1}{\Delta t} \circ (Y(t+\Delta t) \ominus Y(t)), DY(t)\right) \le$$

$$\le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Аналогично

$$h\left(\frac{1}{\Delta t}\circ\left(\left(X(t)\oplus Y(t)\right)\ominus\left(X(t-\Delta t)\oplus Y(t-\Delta t)\right)\right),\, DX(t)\oplus DY(t)\right)\ \le\ 2\varepsilon.$$

Таким образом, производная от многозначного отображения $(X\oplus Y)(t)$ в точке t существует и справедливо равенство

$$D(X\oplus Y)(t) = DX(t)\oplus DY(t).$$

Пункты 2 и 3 леммы доказываются аналогично.

Определение 10. *Многозначное отображение* $X: I\to\Omega$ *называется дифференцируемым на* I, *если оно дифференцируемо во всех точках* $t\in I$.

Лемма 6. *Многозначное отображение* $X: I\to\Omega$ *постоянно тогда и только тогда, когда* $DX(t)\equiv 0$.

Доказательство проводится аналогично [14].

Определение 11. *Обобщенным интегралом Ауманна от многозначного отображения* $F: I\to\Omega$ *на отрезке* I *называется множество*

$$G = \int_{t_0}^{T} F(t)\,dt = \left\{\left(g_i = \int_{t_0}^{T} f_i(t)\,dt,\ i=\overline{1,n};\ g_{n+1}\right)^T : f(\cdot)\in F(\cdot)\right\}, \tag{3}$$

где $f(\cdot) = \left(f_1(\cdot),\ldots,f_n(\cdot), f_{n+1}(\cdot)\right)^T$ *— однозначная ветвь* $F(\cdot)$,

$$g_{n+1} = \sup_{E\subset[t_0,T]}\ \inf_{[t_0,T]\setminus E}\left\{f_{n+1}(t):\ \int_{[t_0,T]\setminus E} f_i(t)\,dt = g_i,\ \ i=\overline{1,n},\ \ \operatorname{mes}E = 0\right\},$$

интеграл от $f_i(\cdot)$, $i=\overline{1,n}$, *понимается в смысле Лебега.*

Лемма 7. *Пусть* $F: I\to\Omega$ *— непрерывное многозначное отображение. Тогда* $F(\cdot)$ *интегрируемо на* I *и* $\int_{t_0}^{T} F(s)\,ds\in\Omega$.

Доказательство проводится аналогично [20, 27].

Лемма 8. *Пусть многозначные отображения* $F, R: I\to\Omega$ *интегрируемы,* $\lambda\in\mathbb{R}$ *— скаляр. Тогда многозначные отображения* $F\oplus R$, $\lambda\circ F: I\to\Omega$ *интегрируемы и*

1) $\displaystyle\int_{t_0}^{T}(F\oplus R)(t)\,dt = \int_{t_0}^{T}F(t)\,dt\oplus\int_{t_0}^{T}R(t)\,dt;$

2) $\displaystyle\int_{t_0}^{T}(\lambda\circ F)(t)\,dt = \lambda\circ\int_{t_0}^{T}F(t)\,dt;$

3) $\displaystyle\int_{t_0}^{t}F(s)\,ds\oplus\int_{t}^{T}F(s)\,ds = \int_{t_0}^{T}F(s)\,ds,\quad t\in(t_0,T).$

Доказательство. Утверждения леммы следуют из свойств интеграла Лебега, леммы 1 и свойств супремума, инфимума и минимума:

1) для любых селекторов $f(\cdot)\in F(\cdot)$, $r(\cdot)\in R(\cdot)$ и любого измеримого подмножества

$$\int_J\left(f_i(t)+r_i(t)\right)dt = \int_J f_i(t)\,dt + \int_J r_i(t)\,dt,\qquad \int_J \lambda f_i(t)\,dt = \lambda\int_J f_i(t)\,dt,$$

$$\int_{J_1} f_i(t)\,dt + \int_{J_2} f_i(t)\,dt = \int_J f_i(t)\,dt,\quad J_1\cup J_2 = J,\quad J_1\cap J_2 = \varnothing,\quad i=\overline{1,n};$$

2) для любых селекторов $f(\cdot) \in F(\cdot)$, $r(\cdot) \in R(\cdot)$

$$\min \left\{ \sup_{E \subset I} \inf_{I \setminus E} \left\{ f_{n+1}(t) : \int_{I \setminus E} f_i(t)\,dt = g_i', \ \ i = \overline{1, n}, \ \ \operatorname{mes} E = 0 \right\}, \right.$$

$$\left. \sup_{E \subset I} \inf_{I \setminus E} \left\{ r_{n+1}(t) : \int_{I \setminus E} r_i(t)\,dt = g_i'', \ \ i = \overline{1, n}, \ \ \operatorname{mes} E = 0 \right\} \right\} =$$

$$= \sup_{E \subset I} \inf_{I \setminus E} \left\{ \min\{f_{n+1}(t), r_{n+1}(t)\} : \int_{I \setminus E} (f_i(t) + r_i(t))\,dt = g_i = \right.$$

$$\left. = g_i' + g_i'', \ \ i = \overline{1, n}, \ \ \operatorname{mes} E = 0 \right\};$$

3) для любого селектора $f(\cdot) \in F(\cdot)$ и любого скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\sup_{E \subset I} \inf_{I \setminus E} \left\{ f_{n+1}(t) : \lambda \int_{I \setminus E} f_i(t)\,dt = g_i, \ \ i = \overline{1, n}, \ \ \operatorname{mes} E = 0 \right\} =$$

$$= \sup_{E \subset I} \inf_{I \setminus E} \left\{ g_{n+1}(t) = f_{n+1}(t) : \int_{I \setminus E} \lambda f_i(t)\,dt = g_i, \ \ i = \overline{1, n}, \ \ \operatorname{mes} E = 0 \right\}.$$

Лемма 9. *Пусть многозначные отображения $F, G : I \to \Omega$ интегрируемы. Тогда*:

1) *скалярная функция $h(F(t), G(t))$ интегрируема*;

2) $h\left(\int_{t_0}^{t} F(s)\,ds, \int_{t_0}^{t} G(s)\,ds \right) \leq \int_{t_0}^{t} h(F(s), G(s))\,ds$.

Доказательство проводится аналогично [20, 27].

Лемма 10. *Пусть многозначное отображение $F : I \to \Omega$ непрерывно. Тогда для каждого $t \in (t_0, T)$ многозначное отображение $G(t) = \int_{t_0}^{t} F(s)\,ds$ непрерывно дифференцируемо и $DG(t) = F(t)$ всюду на I.*

Доказательство. Возьмем произвольное $t \in (t_0, T)$. Поскольку $F(\cdot)$ непрерывно в точке t, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $|\Delta t| \leq \delta$ таких, что $t + \Delta t \in (t_0, T)$, выполняется неравенство $h(F(t + \Delta t), F(t)) < \varepsilon$. Тогда для всех Δt таких, что $0 < \Delta t < \delta$ и $t + \Delta t < T$, справедливо

$$h\left(\frac{1}{\Delta t} \circ (G(t + \Delta t) \ominus G(t)), F(t) \right) = \frac{1}{\Delta t} h\big(G(t + \Delta t) \ominus G(t), \Delta t \circ F(t)\big) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} h\left(\int_{t_0}^{t+\Delta t} F(s)\,ds \ominus \int_{t_0}^{t} F(s)\,ds, \Delta t F(t) \right) = \frac{1}{\Delta t} h\left(\int_{t}^{t+\Delta t} F(s)\,ds, \Delta t F(t) \right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} h\left(\int_{t}^{t+\Delta t} F(s)\,ds, \int_{t}^{t+\Delta t} F(t)\,ds \right) \leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} h\big(F(s), F(t)\big)\,ds < \varepsilon.$$

Аналогично, для всех Δt таких, что $0 < \Delta t < \delta$ и $t_0 < t - \Delta t$,

$$h\left(\frac{1}{\Delta t} \circ (G(t) \ominus G(t - \Delta t)), F(t) \right) < \varepsilon.$$

Следовательно, лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть многозначное отображение* $X: I \to \Omega$ *непрерывно дифференцируемо, тогда многозначное отображение* $DX: I \to \Omega$ *обобщенно интегрируемо и*

$$X(t) = X(t_0) \oplus \int_{t_0}^{t} DX(s)\,ds.$$

Доказательство. Согласно лемме 7, многозначное отображение $DX(t)$ интегрируемо на I. Введем в рассмотрение многозначное отображение $\Phi(t) = X(t_0) \oplus \int_{t_0}^{t} DX(s)\,ds$. В силу леммы 10 $\Phi(t)$ дифференцируемо на I как сумма постоянного множества и интеграла с переменным верхним пределом от непрерывного многозначного отображения, причем $D\Phi(t) = DX(t)$. Таким образом, при достаточно малых Δt разности $\Phi(t+\Delta t) \ominus \Phi(t)$, $\Phi(t) \ominus \Phi(t-\Delta t)$, $X(t+\Delta t) \ominus X(t)$, $X(t) \ominus X(t-\Delta t)$ существуют и справедливы равенства

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} h\left(\frac{1}{\Delta t}(\Phi(t+\Delta t) \ominus \Phi(t)), DX(t)\right) =$$
$$= \lim_{\Delta t \downarrow 0} h\left(\frac{1}{\Delta t}(\Phi(t) \ominus \Phi(t-\Delta t)), DX(t)\right) = 0,$$
$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} h\left(\frac{1}{\Delta t}(X(t+\Delta t) \ominus X(t)), DX(t)\right) =$$
$$= \lim_{\Delta t \downarrow 0} h\left(\frac{1}{\Delta t}(X(t) \ominus X(t-\Delta t)), DX(t)\right) = 0.$$

Тогда в силу свойств расстояния по Хаусдорфу

$$h(\Phi(t+\Delta t), X(t+\Delta t)) =$$
$$= h((\Phi(t+\Delta t) \ominus \Phi(t)) \oplus \Phi(t), (X(t+\Delta t) \ominus X(t)) \oplus X(t)) \le$$
$$\le h(\Phi(t+\Delta t) \ominus \Phi(t), X(t+\Delta t) \ominus X(t)) + h(\Phi(t), X(t));$$
$$h(\Phi(t), X(t)) =$$
$$= h(\Phi(t+\Delta t) \ominus (\Phi(t+\Delta t) \ominus \Phi(t)), X(t+\Delta t) \ominus (X(t+\Delta t) \ominus X(t))) \le$$
$$\le h(\Phi(t+\Delta t), X(t+\Delta t)) + h(\Phi(t+\Delta t) \ominus \Phi(t), X(t+\Delta t) \ominus X(t)).$$

Следовательно,

$$\left| h(\Phi(t+\Delta t), X(t+\Delta t)) - h(\Phi(t), X(t)) \right| \le$$
$$\le h(\Phi(t+\Delta t) \ominus \Phi(t), X(t+\Delta t) \ominus X(t)).$$

Аналогично

$$\left| h(\Phi(t-\Delta t), X(t-\Delta t)) - h(\Phi(t), X(t)) \right| \le$$
$$\le h(\Phi(t) \ominus \Phi(t-\Delta t), X(t) \ominus X(t-\Delta t)).$$

Тогда, используя неравенство треугольника, при $\Delta t \downarrow 0$ получаем

$$\frac{1}{\Delta t}\left| h(\Phi(t+\Delta t), X(t+\Delta t)) - h(\Phi(t), X(t)) \right| \le$$
$$\le \frac{1}{\Delta t} h(\Phi(t+\Delta t) \ominus \Phi(t), X(t+\Delta t) \ominus X(t)) \le$$
$$\le h\left(\frac{1}{\Delta t}(\Phi(t+\Delta t) \ominus \Phi(t)), DX(t)\right) + h\left(\frac{1}{\Delta t}(X(t+\Delta t) \ominus X(t)), DX(t)\right) \to 0.$$

Аналогично

$$\frac{1}{\Delta t}\left| h(\Phi(t-\Delta t), X(t-\Delta t)) - h(\Phi(t), X(t)) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\Delta t} h(\Phi(t) \ominus \Phi(t-\Delta t), X(t) \ominus X(t-\Delta t)) \le$$

$$\le h\left(\frac{1}{\Delta t}(\Phi(t) \ominus \Phi(t-\Delta t)), DX(t)\right) + h\left(\frac{1}{\Delta t}(X(t) \ominus X(t-\Delta t)), DX(t)\right) \to 0.$$

Таким образом, производная скалярной функции $t \to h(\Phi(t), X(t))$ равна нулю для любого $t \in I$, т. е. $h(\Phi(t), X(t))$ постоянна. Поскольку она равна 0 при $t = t_0$, она тождественно равна нулю, а значит, $\Phi(t) \equiv X(t)$ при $t \in I$.

Лемма доказана.

***Замечание* 2.** В случае, когда многозначное отображение $F: I \to \Omega$ в каждый момент времени $t \in I$ имеет вид $F(t) = \hat{F}(t) \times [0, 1]$:

1) многозначное отображение $F: I \to \Omega$ дифференцируемо на I тогда и только тогда, когда $\hat{F}: I \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ дифференцируемо по Хукухаре [4] на I и справедливо тождество $DF(t) = D_h\hat{F}(t) \times [0, 1]$;

2) многозначное отображение $F: I \to \Omega$ интегрируемо на I тогда и только тогда, когда $\hat{F}: I \to \operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ интегрируемо по Ауманну [3] на I и справедливо тождество $\int_{t_0}^{T} F(t)dt = (\mathcal{A})\int_{t_0}^{T}\hat{F}(t)dt \times [0, 1]$, где $D_h\hat{F}(t)$ — производная Хукухары [4], $(\mathcal{A})\int_{t_0}^{T}\hat{F}(t)dt$ — интеграл Ауманна [3].

***Замечание* 3.** Можно показать, учитывая замечание 1, что:

1) многозначное отображение $F: I \to E^n$ дифференцируемо на I в смысле [19, 20] тогда и только тогда, когда $\gamma(F(\cdot)): I \to \Omega$ дифференцируемо на I и справедливо тождество $D\gamma(F(t)) \equiv \gamma(D_{\mathcal{PR}}F(t))$;

2) если многозначное отображение $F: I \to E^n$ интегрируемо на I в смысле [19, 20], то $\gamma(F(\cdot)): I \to \Omega$ интегрируемо на I и справедливо тождество $\int_{t_0}^{T}\gamma(F(t))dt = \gamma\left((\mathcal{PR})\int_{t_0}^{T}F(t)dt\right)$, где $D_{\mathcal{PR}}F(t)$, $(\mathcal{PR})\int_{t_0}^{T}F(t)dt$ — производная и интеграл, определенные в [19, 20].

Определение 12. *Многозначное отображение $F: I \to \Omega$ называется абсолютно непрерывным на промежутке I, если существуют множество $X_0 \in \Omega$ и обобщенно интегрируемое измеримое многозначное отображение $f: I \to \Omega$ такие, что*

$$F(t) = X_0 \oplus \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

***Замечание* 4.** Как и в [14], можно доказать, что если многозначное отображение $F: I \to \Omega$ измеримо и существует суммируемая функция $k(t)$ такая, что для почти всех $t \in I$ выполняется неравенство $h(F(t), \{\mathbf{0}\}) \le k(t)$, то многозначное отображение $G(t) = \int_{t_0}^{t} F(s)ds$ абсолютно непрерывно на I и $DG(t) = F(t)$ почти всюду на I.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$DX = F(t, X), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{4}$$

где $F: I\times\Omega\to\Omega$ — многозначное отображение.

Определение 13. *Многозначное отображение* $X: J\to\Omega$, $J\subset I$, *называется решением дифференциального уравнения* (4), *если оно абсолютно непрерывно на* J *и удовлетворяет этому уравнению при почти всех* $t\in J$.

Наряду с дифференциальным уравнением (4) рассмотрим интегральное уравнение

$$X(t) = X(t_0)\oplus\int_{t_0}^{t}F(s, X(s))ds. \tag{5}$$

Определение 14. *Многозначное отображение* $X: J\to\Omega$, $J\subset I$, *называется решением интегрального уравнения* (5), *если оно непрерывно на* J *и удовлетворяет этому уравнению при всех* $t\in J$.

Тогда в силу лемм 10, 11 и замечания 4 уравнения (4) и (5) являются эквивалентными, т. е. решение уравнения (4) является решением (5) и наоборот.

Теорема 1. *Пусть в области* $Q=\{(t,X): t_0\le t\le t_0+a,\ h(X,X_0)\le b\}$ *многозначное отображение* $F(t,X)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

а) $F(t,X)$ *измеримо по* t *для любого фиксированного* X;

б) $F(t,X)$ *непрерывно по* X *для любого фиксированного* t;

в) $h(F(t,X),\{\mathbf{0}\})\le m(t)$, *где* $m(t)$ *суммируема на* $[t_0, t_0+a]$.

Тогда на отрезке $[t_0, t_0+d]$, *где* $d>0$, *существует решение задачи* (4) *такое, что*

$$d\le a,\qquad \varphi(t_0+d)\le b,\qquad \varphi(t)=\int_{t_0}^{t}m(s)ds.$$

Доказательство. Для любого целого $k\ge 1$ возьмем $h=d/k$. Последовательно на отрезках

$$t_0+ih\le t\le t_0+(i+1)h,\qquad i=0,1,\ldots,k-1,$$

построим приближенное решение, положив $X^k(t)=X_0$ при $t\le t_0$,

$$X^k(t) = X_0\oplus\int_{t_0}^{t}F(s, X^k(s-h))ds \quad\text{при}\quad t_0<t\le t_0+d. \tag{6}$$

Покажем, что при каждом $k\ge1$ многозначное отображение $X^k(t)$ определено, непрерывно и удовлетворяет неравенству

$$h(X^k(t),X_0)\le b \quad\text{при}\quad t_0\le t\le t_0+d. \tag{7}$$

Для доказательства воспользуемся методом полной математической индукции. Пусть $t\in[t_0, t_0+h]$, тогда в силу (6)

$$X^k(t) = X_0\oplus\int_{t_0}^{t}F(s, X_0)ds.$$

Поскольку многозначное отображение $F(t,X_0)$ измеримо на $[t_0, t_0+h]$, в силу замечания 4 $X^k(t)$ определено и непрерывно. Кроме того, имеем

$$h(X^k(t),X_0)\le\int_{t_0}^{t}h(F(s,X_0),\{\mathbf{0}\})ds\le\int_{t_0}^{t}m(s)ds\le\varphi(t_0+d)\le b.$$

Предположим, что многозначное отображение $X^k(t)$ удовлетворяет перечисленным условиям на отрезке $[t_0, t_0+ih]$. Рассмотрим $t\in[t_0, t_0+(i+1)h]$.

Тогда многозначное отображение $F(t, X^k(t-h))$ измеримо, следовательно, $X^k(t)$ определено и непрерывно. Кроме того, имеем

$$h(X^k(t), X_0) \le \int_{t_0}^{t} h(F(s, X^k(s-h)), \{\mathbf{0}\})ds \le \int_{t_0}^{t} m(s)ds \le \varphi(t_0+d) \le b.$$

Таким образом, утверждение справедливо.

Из (7) следует, что последовательность многозначных отображений $\{X^k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена:

$$h(X_0, \{\mathbf{0}\}) - b \le h(X^k(t), \{\mathbf{0}\}) \le h(X_0, \{\mathbf{0}\}) + b.$$

Покажем, что многозначные отображения $X^k(t)$ равностепенно непрерывны. Для любых $\alpha, \beta \in [t_0, T]$, $\alpha \le \beta$, и любого натурального k выполняется неравенство

$$h(X^k(\beta), X^k(\alpha)) = h\left(X_0 \oplus \int_{t_0}^{\beta} F(s, X^k(s-h))ds,\ X_0 \oplus \int_{t_0}^{\alpha} F(s, X^k(s-h))ds \right) =$$

$$= h\left(\int_{\alpha}^{\beta} F(s, X^k(s-h))ds,\ \{\mathbf{0}\} \right) \le \int_{\alpha}^{\beta} h(F(s, X^k(s-h)), \{\mathbf{0}\})ds \le$$

$$\le \int_{\alpha}^{\beta} m(s)ds \le \varphi(\beta) - \varphi(\alpha). \tag{8}$$

Функция $\varphi(t)$ является абсолютно непрерывной на $[t_0, t_0+d]$ как интеграл с переменным верхним пределом от суммируемой функции. Следовательно, $\varphi(t)$ равномерно непрерывна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\alpha, \beta \in [t_0, t_0+d] : 0 \le \beta - \alpha < \delta$ выполняется неравенство $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) < \varepsilon$. Тогда в силу (8) $h(X^k(\beta), X^k(\alpha)) < \varepsilon$ при $0 \le \beta - \alpha < \delta$, т. е. последовательность $\{X^k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна.

По теореме Асколи [28] из последовательности $\{X^k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ выберем равномерно сходящуюся подпоследовательность. Ее пределом является непрерывное многозначное отображение, которое обозначим $X(t)$. Поскольку

$$h(X^k(s-h), X(s)) \le h(X^k(s-h), X^k(s)) + h(X^k(s), X(s)),$$

а первое слагаемое правой части в силу равностепенной непрерывности многозначных отображений $\{X^k(t)\}$ меньше ε при $h = d/k < \delta(\varepsilon)$, по выбранной подпоследовательности $\{X^k(s-h)\}$ стремится к $X(s)$. В силу условий 2 и 3 теоремы в (6) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Получаем, что предельное многозначное отображение $X(t)$ удовлетворяет уравнению (5) при $X(t_0) = X_0$, т. е. является решением задачи (4).

Теорема 2. *Пусть в области* $Q = \{(t, X) : t_0 \le t \le t_0 + a,\ h(X, X_0) \le b\}$ *многозначное отображение* $F(t, X)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1 *и, кроме того, существует постоянная* $L > 0$ *такая, что для любых точек* (t, X), $(t, Y) \in Q$ *выполняется неравенство*

$$h(F(t, X), F(t, Y)) \le L h(X, Y). \tag{9}$$

Тогда уравнение (4) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть уравнение (4) имеет по крайней мере два решения $X(t)$ и $Y(t)$ таких, что $\theta = \max_{t\in[t_0, t_0+h]} h\big(X(t), Y(t)\big) > 0$, где $[t_0, t_0 + h]$, $0 < h \le a$ — общий промежуток существования решений $X(t)$ и $Y(t)$.

В силу эквивалентности уравнений (4) и (5)

$$X(t) \equiv X_0 \oplus \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\,ds, \qquad Y(t) \equiv X_0 \oplus \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s))\,ds,$$

откуда, используя условие (9) и свойства расстояния по Хаусдорфу, имеем

$$h\big(X(t), Y(t)\big) \le h\left(X_0 \oplus \int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\,ds,\ X_0 \oplus \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s))\,ds \right) =$$

$$= h\left(\int_{t_0}^{t} F(s, X(s))\,ds,\ \int_{t_0}^{t} F(s, Y(s))\,ds \right) \le \int_{t_0}^{t} h\big(F(s, X(s)), F(s, Y(s))\big)\,ds \le$$

$$\le L \int_{t_0}^{t} h\big(X(s), Y(s)\big)\,ds.$$

Таким образом, получаем последовательность оценок

$$h\big(X(t), Y(t)\big) \le L \int_{t_0}^{t} \theta\,ds = L\theta(t - t_0) \le L\theta h,$$

$$h\big(X(t), Y(t)\big) \le L \int_{t_0}^{t} L\theta(s - t_0)\,ds = L^2\theta\,\frac{(t - t_0)^2}{2!} \le L^2\theta\,\frac{h^2}{2!}, \ldots .$$

Используя метод полной математической индукции, нетрудно показать, что для любого натурального n на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ имеет место неравенство

$$h\big(X(t), Y(t)\big) \le L^m\theta\,\frac{h^m}{m!}.$$

Тогда

$$\theta = \max_{t\in[t_0, t_0+h]} h\big(X(t), Y(t)\big) \le L^m\theta\,\frac{h^m}{m!},$$

откуда в силу положительности θ следует, что

$$1 \le \frac{(Lh)^m}{m!} \tag{10}$$

для любого натурального n.

По признаку Даламбера ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{(Lh)^m}{m!}$ сходится и поэтому в силу необходимого условия $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{(Lh)^m}{m!} = 0$. Это означает, что для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\dfrac{(Lh)^m}{m!} < \dfrac{1}{2}$. Тогда в силу (10) имеем $1 < \dfrac{1}{2}$.

Полученное противоречие возникло в результате неверного предположения, следовательно, уравнение (4) имеет единственное решение.

Теорема доказана.

1. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Многозначные отображения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1982. – **19**. – С. 127 – 130.

2. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1986. – 104 с.
3. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – **12**, № 1. – P. 1 – 12.
4. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205 – 223.
5. *de Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. – 1969. – **2**, № 4-5. – P. 491 – 501.
6. *Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления. – Одесса, 1987. – 35 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 2036-82.
7. *Плотников А. В.* Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 121 – 125.
8. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 354 с.
9. *Плотникова Н. В.* Аппроксимация пучка решений линейных дифференциальных включений // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 3. – С. 386 – 400.
10. *Плотникова Н. В.* Линейные дифференциальные уравнения с многозначными траекториями // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Прикл. математика, информатика, процессы управления. – 2006. – № 1. – С. 57 – 63.
11. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
12. *de Blasi F. S.* Banach – Saks – Mazur and Kakutani – Ky Fan theorems in spaces of multifunctions and applications to set differential inclusions // Centro Vito Volterra, Univ. Degli Studi Di Roma „Tor Vergata". – 2006. – № 603. – P. 1 – 16.
13. *de Blasi F. S., Lakshmikantham V., Gnana Bhaskar T.* An existence theorem for set differential inclusions in a semilinear metric space // Ibid. – № 602. – P. 1 – 11.
14. *Brandao Lopes Pinto A. J., de Blasi F. S., Iervolino F.* Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Boll. Unione mat. ital. – 1970. – № 4. – P. 534 – 538.
15. *Dabrowska R., Janiak T.* Stability of functional-differential equations with compact convex valued solutions // Discuss. Math. – 1993. – № 13. – P. 87 – 92.
16. *Kisielewicz M.* Description of a class of differential equations with set-valued solutions // Lincei-Rend. Sci. fis. mat. e nat. – 1975. – **58**. – P. 158 – 162.
17. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. Math. – 1976. – **9**, № 3. – P. 397 – 408.
18. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets // Inf. Control. – 1965. – № 8. – P. 338 – 353.
19. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1983. – № 91. – P. 552 – 558.
20. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – **24**, № 3. – P. 301 – 317.
21. *Grana Bhaskar T., Lakshmikantham V., Devi Vasundhara.* Revisiting fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. – 2004. – № 58. – P. 351 – 358.
22. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. – 1990. – **35**. – P. 389 – 396.
23. *Lakshmikantham V., Leela S., Vatsala A. S.* Interconnection between set and fuzzy differential equations // Nonlinear Anal. – 2003. – № 54. – P. 351 – 360.
24. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. – 1987. – № 24. – P. 319 – 330.
25. *Song S. J., Wu C. X.* Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations // Ibid. – 2000. – № 110. – P. 55 – 67.
26. *Благодатских В. И.* Введение в оптимальное управление. – М.: Высш. шк., 2001. – 239 с.
27. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений. – М.: Изд-во МФТИ, 1982. – 127 с.
28. *Келли Дж. Л.* Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 432 с.

Получено 19.02.07