УДК 517.5

**В. А. Кофанов** (Днепропетр. нац. ун-т)

# НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p$

The following sharp inequality for local norms of functions $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ is proved:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |x'(t)|^q\,dt \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_{r-1}(t)|^q\,dt \left(\frac{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-1}{r}q} \|x^{(r)}\|_\infty^{\frac{q}{r}}, \qquad r \in \mathbf{N},$$

where $\varphi_r$ is the perfect Euler spline, takes place on intervals $[a, b]$ of monotonicity of the function $x$ for $q \ge 1$ or for any $q > 0$ in the cases of $r = 2$ and $r = 3$.

As a corollary, well-known A. A. Ligun's inequality for functions $x \in L^r_\infty$ of the form

$$\|x^{(k)}\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}, \qquad k, r \in \mathbf{N}, \quad k < r, \quad 1 \le q < \infty,$$

is proved for $q \in [0, 1)$ in the cases of $r = 2$ and $r = 3$.

Отримано нову точну нерівність для локальних норм функцій $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |x'(t)|^q\,dt \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_{r-1}(t)|^q\,dt \left(\frac{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-1}{r}q} \|x^{(r)}\|_\infty^{\frac{q}{r}}, \qquad r \in \mathbf{N},$$

де $\varphi_r$ — ідеальний сплайн Ейлера, на проміжках $[a, b]$ монотонності $x$ для випадку $q \ge 1$, а також для довільних $q > 0$ у випадках $r = 2$ та $r = 3$.

Як наслідок, відому нерівність А. А. Лигуна для періодичних функцій $x \in L^r_\infty$

$$\|x^{(k)}\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}, \qquad k, r \in \mathbf{N}, \quad k < r, \quad 1 \le q < \infty,$$

доведено для $q \in [0, 1)$ у випадках $r = 2$ та $r = 3$.

**1. Введение.** Символом $G$ будем обозначать отрезок $[a, b]$, действительную ось $\mathbf{R}$ или окружность $\mathbf{T}$, реализованную в виде отрезка $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$ измеримых функций $x\colon G \to \mathbf{R}$ таких, что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int_G |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{t\in G} |x(t)|, & \text{если } p = \infty, \end{cases}$$

и если лебегова мера $\mu G$ множества $G$ конечна, то

$$\|x\|_{L_0(G)} := \exp\left\{(\mu G)^{-1}\int_G \ln|x(t)|\,dt\right\}.$$

Через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство функций, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Положим

$$L^r_{\infty,\infty}(G) \; := \; L^r_\infty(G) \cap L_\infty(G) \quad \text{и} \quad W^r_{\infty,\infty}(G) \; := \; \left\{ x \in L^r_{\infty,\infty}(G) \colon \left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le 1 \right\}.$$

Если $\mu G < \infty$, то, очевидно, $L^r_{\infty,\infty}(G) = L^r_\infty(G)$ и $W^r_{\infty,\infty}(G) = W^r_\infty(G)$. В случае $G = \mathbf{T}$ вместо $L^r_\infty(\mathbf{T})$, $W^r_\infty(\mathbf{T})$ и $\| x \|_{L_p(\mathbf{T})}$ будем писать $L^r_\infty$, $W^r_\infty$ и $\| x \|_p$ соответственно.

Символом $\varphi_r(t)$ обозначим $r$-й $2\pi$-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$.

А. А. Лигун [1] для функций $x \in L^r_\infty$, $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $q \in [1, +\infty)$, доказал следующее неравенство:

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \; \le \; \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} \| x \|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r}. \tag{1}$$

В данной работе доказано, что неравенство (1) сохраняет силу для произвольных $q \ge 0$ в случае функций $x \in L^r_\infty$ малой гладкости ($r = 2$ или $r = 3$). При этом предложен метод доказательства неравенства (1) для всех $q \ge 0$, основанный на неравенствах для локальных норм производных. Этот метод применялся автором ранее в других случаях. В частности, с его помощью получены наиболее общие точные неравенства типа Бернштейна для полиномов и сплайнов [2, 3]. Нам потребуется следующий частный случай неравенства для локальных норм, полученного в этих работах. Пусть $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, $r \ge 2$, а числа $a$, $b \in \mathbf{R}$ таковы, что

$$x'(a) = x'(b) = 0, \qquad |x'(t)| > 0, \qquad t \in (a, b). \tag{2}$$

Тогда для любого $q \ge 1$

$$\int_a^b |x'(t)|^q dt \; \le \; \int_0^\pi |\varphi_{r-1}(t)|^q dt \left( \frac{\| x \|_{L_\infty(\mathbf{R})}}{\| \varphi_r \|_\infty} \right)^{\frac{(r-1)q+1}{r}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{q-1}{r}}. \tag{3}$$

Неравенство (3) не выполняется для $q < 1$. В данной работе доказано (теорема 1), что для функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ при условиях (2) имеет место следующая модификация неравенства (3):

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |x'(t)|^q dt \; \le \; \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\varphi_{r-1}(t)|^q dt \left( \frac{\| x \|_{L_\infty(\mathbf{R})}}{\| \varphi_r \|_\infty} \right)^{\frac{r-1}{r} q} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{q}{r}}. \tag{4}$$

Однако данное неравенство, в отличие от неравенства (3), сохраняет силу при всех $q \ge 0$ по крайней мере для функций $x \in L^r_\infty$ малой гладкости. Из неравенства (4) непосредственно следует неравенство (1) для всех $q \ge 0$ (теорема 2).

**2. Основная лемма.** Будем говорить, что функция $\varphi \in L^1_\infty[\alpha, \beta]$ является функцией сравнения для функции $f \in L^1_\infty[a, b]$, если $\| f \|_{L_\infty[a,b]} \le \| \varphi \|_{L_\infty[\alpha,\beta]}$ и из условия $|f(\xi)| = |\varphi(\eta)|$, $\xi \in [a, b]$, $\eta \in [\alpha, \beta]$, следует неравенство $|f'(\xi)| \le$ $\le |\varphi'(\eta)|$ (если указанные производные существуют).

Пусть $\gamma \in (0, 1)$, а функция $\varphi \in L^1_\infty[0, 1]$ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ почти всюду на $(0, 1)$ и

$$\gamma \varphi(1) \le \int_0^1 \varphi(t) dt. \tag{5}$$

Через $K_\gamma(\varphi)$ обозначим класс функций $f \in L^1_\infty[0,1]$, для которых функция $\varphi$ является функцией сравнения, и $f(0) = 0$, $f'(t) \geq 0$ почти всюду на $(0, 1)$.

**Лемма 1.** *Пусть $q$, $\gamma \in (0, 1)$, а функция $\varphi$ удовлетворяет описанным выше условиям. Тогда для любой функции $f \in K_\gamma(\varphi)$ выполняется неравенство*

$$\frac{\int_0^1 f^q(t)\,dt}{\left[\int_0^1 f(t)\,dt\right]^{\gamma q}} \leq \frac{\int_0^1 \varphi^q(t)\,dt}{\left[\int_0^1 \varphi(t)\,dt\right]^{\gamma q}}. \tag{6}$$

***Доказательство.*** Для произвольной функции $f \in K_\gamma(\varphi)$, $f \neq 0$, положим

$$F(f) := \frac{\int_0^1 f^q(t)\,dt}{\left[\int_0^1 f(t)\,dt\right]^{\gamma q}}.$$

Очевидно, что

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \|\varphi\|_{L_\infty[0,1]} |t_1 - t_2|, \qquad t_1, t_2 \in [0, 1], \quad \text{для} \quad f \in K_\gamma(\varphi).$$

Кроме того, $\|f\|_{L_\infty[0,1]} \leq \varphi(1)$. Поэтому класс $K_\gamma(\varphi)$ компактен и, следовательно, функционал $F(f)$ достигает на нем своей верхней грани. Покажем, что только функция $\varphi$ является экстремальной в задаче

$$F(f) \to \sup, \qquad f \in K_\gamma(\varphi). \tag{7}$$

Зафиксируем $f \in K_\gamma(\varphi)$, $f \neq \varphi$, и докажем, что $f$ не может быть экстремальной в задаче (7). Поскольку $\varphi$ является функцией сравнения для $f$, то $f(t) \leq \varphi(t)$, $t \in [0, 1]$. Положим

$$a = a(f) := \sup\{t \in [0,1] \colon f(t) = \varphi(t)\}.$$

Так как $f \neq \varphi$, то $a \in [0, 1)$. Ясно, что $f(a) = \varphi(a)$. Пусть, далее,

$$b = b(f) := \sup\{t \in [a,1] \colon f(t) = \varphi(a)\}.$$

Возможны два случая: 1) $b \in [a, 1)$ и 2) $b = 1$.

Пусть сначала $b \in [a, 1)$. Тогда для любого $\varepsilon \in [0, 1-b)$ существует единственное (в силу строгой монотонности $\varphi$) число $\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\varphi(a + \delta(\varepsilon)) = f(b + \varepsilon). \tag{8}$$

Тем самым на $[0, 1-b)$ определена функция $\delta(\varepsilon)$, непрерывная и неубывающая, так как $f$ и $\varphi$ непрерывны и не убывают на $[0, 1]$. При этом в силу определения $b$ существует $\varepsilon_0$ такое, что

$$\mu\{\varepsilon \in (0, \varepsilon_1] \colon f'(b + \varepsilon) > 0\} > 0 \qquad \forall\, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0.$$

А так как $f'(b+\varepsilon) = \delta'(\varepsilon)\varphi'(a + \delta(\varepsilon))$ и $\varphi$ строго возрастает, то и

$$\mu\{\varepsilon \in (0, \varepsilon_1] \colon \delta'(\varepsilon) > 0\} > 0 \qquad \forall\, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0. \tag{9}$$

Отметим также, что $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ на $(0, \varepsilon_0]$. Это следует из того, что $\varphi$ является функцией сравнения для $f$. При этом в силу определения $a(f)$, если $b(f) = a(f)$, то $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$ в $(0, \varepsilon_0]$. Таким образом, если $\Delta := b - a$, то

$$\Delta + \varepsilon - \delta(\varepsilon) > 0, \qquad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{10}$$

Для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ определим функцию

$$f_\varepsilon(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{при} \quad t \in [0,\, a + \delta(\varepsilon)], \\ \varphi(a+\delta(\varepsilon)) & \text{при} \quad t \in [a + \delta(\varepsilon),\, b + \varepsilon], \\ f(t) & \text{при} \quad t \in [b+\varepsilon,\, 1]. \end{cases}$$

Ясно, что $f_\varepsilon \in K_\gamma(\varphi)$. Покажем, что

$$F(f_{\varepsilon_0}) > F(f). \tag{11}$$

Отсюда будет следовать, что $f$ не является экстремальной функцией в задаче (7). Положим $F(\varepsilon) := F(f_\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Ясно, что $F(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} F(\varepsilon)$. Для доказательства (11) достаточно убедиться в том, что

$$\mu\{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \colon F'(\varepsilon) > 0\} > 0. \tag{12}$$

В силу определения $F(\varepsilon)$ и $f_\varepsilon$ имеем

$$F(\varepsilon) = \frac{\int_0^{a+\delta(\varepsilon)} \varphi^q(t)\,dt + \varphi^q(a+\delta(\varepsilon))[\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)] + \int_{b+\varepsilon}^1 f^q(t)\,dt}{\left[\int_0^{a+\delta(\varepsilon)} \varphi(t)\,dt + \varphi(a+\delta(\varepsilon))[\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)] + \int_{b+\varepsilon}^1 f(t)\,dt\right]^{\gamma q}}.$$

Положим для краткости

$$I_q(\varepsilon) := \int\limits_0^{a+\delta(\varepsilon)} \varphi^q(t)\,dt + \varphi^q(a+\delta(\varepsilon))[\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)] + \int\limits_{b+\varepsilon}^1 f^q(t)\,dt.$$

Тогда $\ln F(\varepsilon) = \ln I_q(\varepsilon) - \gamma q \ln I_1(\varepsilon)$. Заметим, что вследствие (8)

$$\begin{aligned} I_q'(\varepsilon) &= \varphi^q(a+\delta(\varepsilon))\delta'(\varepsilon) + q\varphi^{q-1}(a+\delta(\varepsilon))\varphi'(a+\delta(\varepsilon))\delta'(\varepsilon)[\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)] + \\ &\quad + \varphi^q(a+\delta(\varepsilon))[1-\delta'(\varepsilon)] - \varphi^q(a+\delta(\varepsilon)) = \\ &= q\varphi^{q-1}(a+\delta(\varepsilon))\varphi'(a+\delta(\varepsilon))\delta'(\varepsilon)[\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{F'(\varepsilon)}{F(\varepsilon)} = \frac{I_q'(\varepsilon)}{I_q(\varepsilon)} - \gamma q \frac{I_1'(\varepsilon)}{I_1(\varepsilon)} = q\varphi'(a+\delta(\varepsilon))\delta'(\varepsilon)[\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)]R(\varepsilon), \tag{13}$$

где

$$R(\varepsilon) = \frac{\varphi^{q-1}(a+\delta(\varepsilon))}{I_q(\varepsilon)} - \frac{\gamma}{I_1(\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R(\varepsilon)\,\varphi(a+\delta(\varepsilon)) &= \left[\frac{I_q(\varepsilon)}{\varphi^q(a+\delta(\varepsilon))}\right]^{-1} - \gamma\left[\frac{I_1(\varepsilon)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))}\right]^{-1} = \\ = \left[\int\limits_0^{a+\delta(\varepsilon)} \left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))}\right)^q dt + [\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)] + \int\limits_{b+\varepsilon}^1 \left(\frac{f(t)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))}\right)^q dt\right]^{-1} &- \\ - \gamma\left[\int\limits_0^{a+\delta(\varepsilon)} \frac{\varphi(t)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))}\,dt + [\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)] + \int\limits_{b+\varepsilon}^1 \frac{f(t)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))}\,dt\right]^{-1}&. \end{aligned}$$

Положим

$$C := \frac{I_q(\varepsilon)}{\varphi^q(a+\delta(\varepsilon))}\,\frac{I_1(\varepsilon)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))}.$$

(Заметим, что $C > 0$.) Тогда

$$CR(\varepsilon)\,\varphi(a+\delta(\varepsilon)) = (1-\gamma)[\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)] + $$
$$+ \int_0^{a+\delta(\varepsilon)}\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))} - \gamma\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))}\right)^q\right]dt + $$
$$+ \int_{b+\varepsilon}^{1}\left[\frac{f(t)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))} - \gamma\left(\frac{f(t)}{\varphi(a+\delta(\varepsilon))}\right)^q\right]dt. \qquad (14)$$

Поскольку $\gamma < 1$, вследствие (10) $(1-\gamma)[\Delta+\varepsilon-\delta(\varepsilon)] > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Пусть сначала $a = 0$. Заметим, что $\dfrac{\varphi(t)}{\varphi(\delta(\varepsilon))} < 1$ для $t \in (0, \delta(\varepsilon))$. Ясно также, что $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому

$$\int_0^{\delta(\varepsilon)}\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi(\delta(\varepsilon))} - \gamma\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(\delta(\varepsilon))}\right)^q\right]dt \to 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

С другой стороны, $\dfrac{f(t)}{f(\delta(\varepsilon))} \geq 1$ для $t \in (b+\varepsilon, 1)$, а $\varphi(\delta(\varepsilon)) \to \varphi(0) = 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому

$$\int_{b+\varepsilon}^{1}\left[\frac{f(t)}{\varphi(\delta(\varepsilon))} - \gamma\left(\frac{f(t)}{\varphi(\delta(\varepsilon))}\right)^q\right]dt \geq (1-\gamma)\int_{b+\varepsilon}^{1}\left(\frac{f(t)}{\varphi(\delta(\varepsilon))}\right)^q dt \to \infty, \qquad \varepsilon \to 0.$$

На основании изложенного выше при учете (14) можно заключить, что $R(\varepsilon) > 0$ в некоторой окрестности $(0, \varepsilon')$ (уменьшая (если нужно) $\varepsilon_0$, можно считать, что $\varepsilon_0 < \varepsilon'$). Из этого факта, соотношений (13), (9), (10) и строгой монотонности $\varphi$ следует (12) в случае $a = 0$.

Пусть теперь $a > 0$. Покажем, что $R(0) > 0$. Ясно, что $\delta(0) = 0$. Поэтому в силу (14)

$$CR(0)\,\varphi(a) = (1-\gamma)(b-a) + z(1) - \gamma z(q),$$

где

$$z(q) := \int_0^a \left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(a)}\right)^q dt + \int_b^1 \left(\frac{f(t)}{\varphi(a)}\right)^q dt.$$

Заметим, что $z''(q) > 0$, т. е. функция $z(q)$ выпуклая на $[0, 1]$. Поэтому для доказательства неравенства $R(0) > 0$ достаточно установить, что

$$\gamma \max\{z(0), z(1)\} < z(1) + (1-\gamma)(b-a).$$

Для этого, в свою очередь, достаточно доказать неравенство

$$\gamma z(0) < z(1) + (1-\gamma)(b-a),$$

которое эквивалентно следующему:

$$\gamma(1-b+a) < (1-\gamma)(b-a) + \int_0^a \frac{\varphi(t)}{\varphi(a)}dt + \int_b^1 \frac{f(t)}{\varphi(a)}dt,$$

или

$$\int_0^a \varphi(t)\,dt + \int_b^1 f(t)\,dt + (b-a-\gamma)\varphi(a) > 0.$$

Поскольку

$$\int_b^1 f(t)\,dt \geq f(b)(1-b) = \varphi(a)(1-b),$$

для доказательства неравенства $R(0) > 0$ достаточно показать, что

$$\xi_b(a) := \int_0^a \varphi(t)\,dt + (1-a-\gamma)\varphi(a) > 0.$$

Заметим, что

$$\xi_b'(a) = \varphi(a) - \varphi(a) + (1-a-\gamma)\varphi'(a) = (1-a-\gamma)\varphi'(a).$$

Поэтому $\xi_b(a) \geq \min\{\xi_b(0), \xi_b(b)\}$, $a \in [0, b]$. Но $\xi_b(0) = 0$, $\xi_b(b) = \int_0^b \varphi(t)\,dt + (1-b-\gamma)\varphi(b) := \eta(b)$. Покажем, что $\eta(b) > 0$, $b \in (0, 1)$. Ясно, что $\eta'(b) = (1-b-\gamma)\varphi'(b)$. Поэтому $\eta(b) > \min\{\eta(0), \eta(1)\}$. Но $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt - \gamma\varphi(1) \geq 0$ вследствие (5). Следовательно, $\xi_b(b) = \eta(b) > 0$, $b \in (0, 1)$. Тогда и $\xi_b(a) > 0$ для $a \in (0, b]$. Итак, $R(0) > 0$. В силу непрерывности $R(\varepsilon)$ отсюда следует, что при любом фиксированном $a \in (0, 1)$ $R(\varepsilon) > 0$ в некоторой окрестности $(0, \varepsilon(a))$ (уменьшая (если нужно) $\varepsilon_0$, можно считать, что $\varepsilon_0 < \varepsilon(a)$). Из этого факта с учетом (13), (9), (10) и строгой монотонности $\varphi$ следует выполнение (12) в случае $b \in [a, 1)$.

Осталось рассмотреть случай $b = 1$. В этом случае $f(t) = \varphi(t)$ для $t \in [0, a]$ и $f(t) = \varphi(a)$ для $t \in [a, 1]$. Положим $\Delta := 1 - a$ и для $\varepsilon \in (0, \Delta)$ определим функцию

$$f_\varepsilon(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{при } t \in [0, a+\varepsilon], \\ \varphi(a+\varepsilon) & \text{при } t \in [a+\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_\varepsilon \in K_\gamma(\varphi)$. Пусть, как и раньше, $F(\varepsilon) := F(f_\varepsilon)$. Покажем, что и в рассматриваемом случае выполнено соотношение (12) с некоторым $\varepsilon_0$. Как и в случае $b < 1$, доказывается аналог равенства (13):

$$\frac{F'(\varepsilon)}{F(\varepsilon)} = q\varphi'(a+\varepsilon)[\Delta - \varepsilon]R(\varepsilon),$$

где

$$R(\varepsilon) = \frac{\varphi^{q-1}(a+\varepsilon)}{I_q(\varepsilon)} - \frac{\gamma}{I_1(\varepsilon)}, \qquad I_q(\varepsilon) := \int_0^{a+\varepsilon} \varphi^q(t)\,dt + \varphi^q(a+\varepsilon)[\Delta - \varepsilon].$$

Отсюда следует аналог равенства (14):

$$CR(\varepsilon)\varphi(a+\varepsilon) = (1-\gamma)[\Delta - \varepsilon] + \int_0^{a+\varepsilon} \left[ \frac{\varphi(t)}{\varphi(a+\varepsilon)} - \gamma \left( \frac{\varphi(t)}{\varphi(a+\varepsilon)} \right)^q \right] dt, \qquad C > 0.$$

Из этого равенства, как и в случае $b < 1$, следует, что $R(\varepsilon) > 0$ в некоторой окрестности $(0, \varepsilon')$. Поэтому, как и в случае $b < 1$, выполнено (12). Следовательно, функция $f$, для которой $a = a(f) < 1$, не может быть экстремальной в задаче (7). Таким образом, для экстремальной функции $f$ необходимо $a(f) = 1$. Это означает, в силу определения $a(f)$, что $f = \varphi$.

Лемма доказана.

**3. Неравенства для производных сужения функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ на отрезки их монотонности.**

Нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

**Лемма 2.** *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $q, \lambda > 0$, $\alpha$ — *нуль сплайна* $\varphi_{\lambda,r}$. *Тогда функция*

$$f(y) := \frac{1}{y}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+y}\left|\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^q dt$$

*строго возрастает на* $[0, \pi/2\lambda]$.

***Доказательство.*** Имеем

$$\ln f(y) = \ln\int\limits_{\alpha}^{\alpha+y}\left|\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^q dt - \ln y.$$

Следовательно,

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{\left|\varphi_{\lambda,r}(\alpha+y)\right|^q}{\int_{\alpha}^{\alpha+y}\left|\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^q dt} - \frac{1}{y}.$$

Поскольку $\left|\varphi_{\lambda,r}(t)\right|$ строго возрастает на $[\alpha, \alpha+\pi/2\lambda]$, то

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+y}\left|\varphi_{\lambda,r}(t)\right|^q dt < y\left|\varphi_{\lambda,r}(\alpha+y)\right|^q.$$

Поэтому $f'(y) > 0$ для $y \in (0, \pi/2\lambda)$, что и завершает доказательство леммы.

**Лемма 3.** *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$, $x \in W^r_\infty[a,b]$, $x'(a+) = x'(b-) = 0$, $|x'(t)| > 0$ *для* $t \in (a,b)$. *Тогда при любом* $q > 0$ *отношение*

$$\frac{(b-a)^{-1}\int_a^b |x'(t)|^q dt}{\left|\int_a^b x'(t)\,dt\right|^{\frac{r-1}{r}q}}$$

*не зависит от длины отрезка* $[a,b]$.

***Доказательство.*** Для $x \in W^r_\infty[a,b]$ рассмотрим функцию $y(t) := \gamma^{-r} \times x(\gamma t + a)$, где $\gamma = b - a$. Ясно, что $\left\|y^{(r)}\right\|_{L_\infty[0,1]} = \left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty[a,b]}$. Поэтому $y$ принадлежит $W^r_\infty[0,1]$. При этом $y'(0+) = y'(1-) = 0$, $|y'(t)| > 0$ для $t \in (0,1)$. Кроме того,

$$\int\limits_0^1 |y'(t)|^q dt = \int\limits_0^1\left|\gamma^{-(r-1)}x'(\gamma t+a)\right|^q dt = \gamma^{-(r-1)q}\int\limits_a^b |x'(s)|^q \frac{ds}{\gamma} =$$

$$= \gamma^{-(r-1)q-1}\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b |x'(s)|^q ds.$$

В частности,

$$\int_0^1 |y'(t)|dt = \gamma^{-r}\left|\int_a^b x'(s)ds\right|.$$

Поэтому

$$\frac{(b-a)^{-1}\int_a^b |x'(t)|^q dt}{\left|\int_a^b x'(t)dt\right|^{\frac{r-1}{r}q}} = \frac{\int_0^1 |y'(t)|^q dt}{\left|\int_0^1 y'(t)dt\right|^{\frac{r-1}{r}q}}.$$

Лемма доказана.

Для $f \in L_1[a,b]$ символом $r(f,t)$, $t \in [0, b-a]$, обозначим убывающую перестановку функции $f$ (см., например, [4]).

Через $\overline{\varphi_{\omega,r-1}}$ обозначим сужение сплайна $\varphi_{\omega,r-1}$ на $[\alpha, \alpha+\pi/\omega]$, где $\alpha$ — нуль $\varphi_{\omega,r-1}$.

**Лемма 4.** *Пусть* $r = 2$ *или* $r = 3$, $\omega = \pi$. *Тогда функция* $\varphi(t) := r(\overline{\varphi_{\omega,r-1}}, 1-t)$, *определенная на* $[0,1]$, *удовлетворяет условиям леммы* 1, *т. е.* $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ *почти всюду на* $(0,1)$, *и выполнено неравенство* (5) *с* $\gamma = \dfrac{r-1}{r}$.

***Доказательство.*** Выполнение условий $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) > 0$ на $(0,1)$ очевидно. Для доказательства (5) заметим, что

$$\varphi(1) = \left\|\varphi_{\omega,r-1}\right\|_\infty = \omega^{-(r-1)}\|\varphi_{r-1}\|_\infty,$$

а

$$\int_0^1 \varphi(t)dt = \int_0^1 r(\overline{\varphi_{\omega,r-1}}, t)dt = \int_\alpha^{\alpha+\pi/\omega}\left|\varphi_{\omega,r-1}(t)\right|dt =$$

$$= 2^{-1}\omega^{-r}\|\varphi_{r-1}\|_1 = 2^{-1}\omega^{-r}\bigvee_0^{2\pi}\varphi_r = 2\omega^{-r}\|\varphi_r\|_\infty = 2\omega^{-r}K_r,$$

где $K_r := \|\varphi_r\|_\infty$ — константа Фавара. Теперь неравенство (5) принимает вид $\dfrac{r-1}{r}K_{r-1} \le \dfrac{2}{\pi}K_r$, и его справедливость легко следует из известных равенств $K_1 = \pi/2$, $K_2 = \pi^2/8$, $K_3 = \pi^3/24$.

**Лемма 5.** *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $r \ge 2$, $x \in W^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$. *Пусть, далее, число* $\lambda > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = \left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_\infty, \tag{15}$$

*а числа* $a$, $b \in \mathbf{R}$ *таковы, что* $x'(a) = x'(b) = 0$, $|x'(t)| > 0$ *для* $t \in (a,b)$. *Тогда для любого* $q \ge 1$, *а в случае,* $r = 2$ *или* $r = 3$ *и для любого* $q > 0$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |x'(t)|^q dt \le \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/\lambda}\left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt. \tag{16}$$

***Доказательство.*** Зафиксируем $x \in W^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ и промежуток $[a,b]$, на котором $x$ удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим три случая: 1) $b-a \le \pi/\lambda$, $q > 0$; 2) $b-a > \pi/\lambda$, $q \ge 1$; 3) $b-a > \pi/\lambda$, $q \in (0,1)$.

Пусть сначала $b-a \le \pi/\lambda$, $q > 0$. Заметим, что из условия (15) и теоремы сравнения Колмогорова [5] следует неравенство

$$\|x'\|_{L_\infty(\mathbf{R})} \le \left\|\varphi_{\lambda,r-1}\right\|_\infty. \tag{17}$$

Пусть $\alpha$ — нуль сплайна $\varphi_{\lambda,r-1}$. Переходя, если нужно, к сдвигу функции $x$, можем считать, что $[a,b] \subset [\alpha, \alpha+\pi/\lambda]$. Тогда из неравенства (17) и условий $x'(a) = x'(b) = 0$ в силу теоремы сравнения Колмогорова следует, что $|x'(t)| \le \left|\varphi'_{\lambda,r-1}(t)\right|$, $t \in [a,b]$. Поэтому для любого $q > 0$

$$\int_a^b |x'(t)|^q dt \le \int_\alpha^{\alpha+\pi/\lambda} \left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt. \tag{18}$$

Выберем $c \in (a,b)$ так, что

$$\int_a^c |x'(t)|^q dt = \int_c^b |x'(t)|^q dt. \tag{19}$$

Вследствие (18) и (19) существует $y \in (0, \pi/2\lambda]$ такое, что

$$\int_a^c |x'(t)|^q dt = \int_\alpha^{\alpha+y} \left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt, \quad \int_c^b |x'(t)|^q dt = \int_{\alpha+\pi/\lambda-y}^{\alpha+\pi/\lambda} \left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt. \tag{20}$$

Отсюда с помощью теоремы сравнения Колмогорова выводим неравенства $c-a \ge y$ и $b-c \ge y$. Ясно, что интегралы в правых частях (20) равны. Поэтому

$$\int_a^c |x'(t)|^q dt \le \frac{c-a}{y}\int_\alpha^{\alpha+y} \left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt, \quad \int_c^b |x'(t)|^q dt \le \frac{b-c}{y}\int_\alpha^{\alpha+y} \left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt.$$

Применяя также лемму 2, получаем

$$\int_a^b |x'(t)|^q dt = \int_a^c |x'(t)|^q dt + \int_c^b |x'(t)|^q dt \le \frac{c-a}{y}\int_\alpha^{\alpha+y} \left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt +$$

$$+ \frac{b-c}{y}\int_\alpha^{\alpha+y} \left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt \le (b-a)\frac{2\lambda}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+\pi/2\lambda} \left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt,$$

что равносильно (16).

Пусть теперь $b-a > \pi/\lambda$, $q \ge 1$. Поскольку $x \in W^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, применяя неравенство (3) и учитывая условие (15), получаем

$$\int_a^b |x'(t)|^q dt \le \int_0^\pi |\varphi_{r-1}(t)|^q dt \left(\frac{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{(r-1)q+1}{r}} =$$

$$= \int_0^\pi |\varphi_{r-1}(t)|^q dt \left(\lambda^{-r}\right)^{\frac{(r-1)q+1}{r}} = \int_0^{\pi/\lambda} \left|\varphi_{\lambda,r-1}(t)\right|^q dt \tag{21}$$

(справедливость последнего равенства легко проверяется заменой переменных в последнем интеграле). Из (21) непосредственно следует (16) в силу условия $b-$ $-a > \pi/\lambda$.

Рассмотрим, наконец, случай $b-a > \pi/\lambda$, $q \in (0,1)$. Заметим, что утверждение леммы равносильно неравенству

$$\frac{(b-a)^{-1}\int_a^b |x'(t)|^q\,dt}{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{\frac{r-1}{r}q}} \le \frac{(\omega/\pi)\int_0^{\pi/\omega}\left|\varphi_{\omega,r-1}(t)\right|^q dt}{\left\|\varphi_{\omega,r}\right\|_\infty^{\frac{r-1}{r}q}},$$

причем правая часть не зависит от $\omega$. Докажем в рассматриваемом случае более сильное неравенство

$$\frac{(b-a)^{-1}\int_a^b |x'(t)|^q\,dt}{\left|\int_a^b x'(t)\,dt\right|^{\frac{r-1}{r}q}} \le \frac{(\omega/\pi)\int_0^{\pi/\omega}\left|\varphi_{\omega,r-1}(t)\right|^q dt}{\left|\int_\beta^{\beta+\pi/\omega}\varphi_{\omega,r-1}(t)\,dt\right|^{\frac{r-1}{r}q}}, \tag{22}$$

где $\beta$ — нуль сплайна $\varphi_{\omega,r-1}$. Левая часть этого неравенства не зависит от длины отрезка $[a,b]$ в силу леммы 3. Поэтому можно считать, что $[a,b] = [0,1]$ (если это не так, достаточно перейти к функции $\gamma^{-r}x(\gamma t+a)$, $\gamma = b-a$). Кроме того, если $\bar{x}$ — сужение $x$ на $[a,b]$, то $\|r(\bar{x}',\cdot)\|_{L_q[0,b-a]} = \|\bar{x}'\|_{L_q[a,b]}$, $q>0$, и (22) можно представить в виде

$$\frac{\int_0^1 r^q(\bar{x}',t)\,dt}{\left|\int_0^1 r(\bar{x}',t)\,dt\right|^{\frac{r-1}{r}q}} \le \frac{(\omega/\pi)\int_0^{\pi/\omega} r^q(\overline{\varphi_{\omega,r-1}},t)\,dt}{\left|\int_0^{\pi/\omega} r(\overline{\varphi_{\omega,r-1}},t)\,dt\right|^{\frac{r-1}{r}q}},$$

где $\overline{\varphi_{\omega,r-1}}$ — сужение сплайна $\varphi_{\omega,r-1}$ на $[\beta,\beta+\pi/\omega]$.

В силу неравенства (17) и теоремы сравнения Колмогорова сплайн $\overline{\varphi_{\lambda,r-1}}$ является функцией сравнения для $\bar{x}'$. Тогда согласно теореме о производной перестановки [4] (предложение 1.3.2) функция $r(\overline{\varphi_{\lambda,r-1}},t)$, определенная на $[0,\pi/\lambda]$, является функцией сравнения для перестановки $r(\bar{x}',t)$, определенной на $[0,1]$. Вследствие предположения $b-a=1>\pi/\lambda$. Положим $\omega=\pi$. Тогда $\omega<\lambda$, и, следовательно, функция $r(\overline{\varphi_{\omega,r-1}},t)$ тем более будет функцией сравнения для $r(\bar{x}',t)$. Переходя к возрастающим перестановкам $\varphi(t) := r(\overline{\varphi_{\omega,r-1}},1-t)$ и $f(t) := r(\bar{x}',1-t)$, получаем функции $\varphi$, $f\in L_1[0,1]$, удовлетворяющие условиям леммы 1 с $\gamma = \frac{r-1}{r}$ (если принять во внимание лемму 4). В силу леммы 1 имеет место неравенство (6), которое в данном случае равносильно доказываемому неравенству (22).

Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Пусть $r\in\mathbf{N}$, $r\ge 2$, $x\in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, а числа $a$, $b\in\mathbf{R}$ удовлетворяют условиям $x'(a)=x'(b)=0$, $|x'(t)|>0$ для $t\in(a,b)$. Тогда для любого $q\ge 1$, а в случае $r=2$ или $r=3$ и для любого $q>0$ имеет место неравенство*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |x'(t)|^q\,dt \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_{r-1}(t)|^q\,dt\left(\frac{\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-1}{r}q}\left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{\frac{q}{r}}. \tag{23}$$

***Доказательство.*** Зафиксируем $x\in L^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$ и числа $a$, $b\in\mathbf{R}$, удовлетворяющие условиям теоремы. Поскольку неравенство (23) однородно, можно считать, что

$$\left\| x^{(r)} \right\|_{L_\infty(\mathbf{R})} = 1. \tag{24}$$

Тогда $x \in W^r_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$. Выберем число $\lambda > 0$ так, что

$$\| x \|_{L_\infty(\mathbf{R})} = \left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_\infty. \tag{25}$$

Тогда в силу леммы 5

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b | x'(t) |^q \, dt \le \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\pi/\lambda} \left| \varphi_{\lambda,r-1}(t) \right|^q dt. \tag{26}$$

Теперь из (25) и (26) выводим

$$\frac{(b-a)^{-1} \int_a^b | x'(t) |^q \, dt}{\| x \|_{L_\infty(\mathbf{R})}^{\frac{r-1}{r}q}} \le \frac{(\lambda/\pi) \int_0^{\pi/\lambda} \left| \varphi_{\lambda,r-1}(t) \right|^q dt}{\left\| \varphi_{\lambda,r} \right\|_\infty^{\frac{r-1}{r}q}} = \frac{(1/\pi) \int_0^{\pi} | \varphi_{r-1}(t) |^q \, dt}{\| \varphi_r \|_\infty^{\frac{r-1}{r}q}}.$$

Из последнего неравенства с учетом (24) следует (23).

Теорема доказана.

**4. Неравенства для периодических функций.**

**Теорема 2.** *Пусть* $r = 2$, $k = 1$ *или* $r = 3$, $k = 1, 2$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty$ *и любого* $q \in [0, 1)$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} \| x \|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r}. \tag{27}$$

*Неравенство* (27) *точное и обращается в равенство для функций вида* $x(t) = a\varphi_r(nt+b)$, $a$, $b \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

***Доказательство.*** Поскольку для любой функции $f \in L_1$ имеет место равенство $\| f \|_0 = \lim_{q \to 0} (2\pi)^{-1/q} \| f \|_q$ (см., например, [6, с. 188]), достаточно доказать (27) для $q > 0$.

Зафуксируем $x \in L^r_\infty$ и пусть $c$ — произвольный нуль производной $x^{(k)}$. Рассмотрим совокупность всех отрезков $[a_j, b_j] \subset [c, c+2\pi]$ таких, что

$$x^{(k)}(a_j) = x^{(k)}(b_j) = 0, \qquad \left| x^{(k)}(t) \right| > 0, \qquad t \in (a_j, b_j).$$

Ясно, что

$$\sum_j (b_j - a_j) \le 2\pi, \qquad \left\| x^{(k)} \right\|_q^q = \sum_j \int_{a_j}^{b_j} \left| x^{(k)}(t) \right|^q dt. \tag{28}$$

Оценим интегралы $\int_{a_j}^{b_j} \left| x^{(k)}(t) \right|^q dt$ в (28) с помощью неравенства (23), примененного к функции $x^{(k-1)} \in L^{r-k+1}_\infty$. При этом для краткости положим

$$S := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} | \varphi_{r-k}(t) |^q \, dt \left( \frac{\left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty}{\| \varphi_{r-k+1} \|_\infty} \right)^{\frac{r-k}{r-k+1}q} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{q}{r-k+1}}$$

и заметим, что

$$2 \int_0^{\pi} | \varphi_{r-k}(t) |^q \, dt = \| \varphi_{r-k} \|_q^q.$$

Тогда из (28) выводим оценку

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q^q \leq \sum_j (b_j - a_j) S \leq 2\pi S = \| \varphi_{r-k} \|_q^q \left[ \frac{\left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty}{\| \varphi_{r-k+1} \|_\infty} \right]^{\frac{r-k}{r-k+1}q} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{q}{r-k+1}}, \quad (29)$$

которая в случае $k = 1$ эквивалентна доказываемому неравенству (27). Если же $k = 2$, то, оценивая норму $\left\| x^{(k-1)} \right\|_\infty$ в (29) с помощью неравенства Колмогорова [5], получаем

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q^q \leq \| \varphi_{r-k} \|_q^q \left[ \left( \frac{\| x \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty} \right)^{\frac{r-k+1}{r}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{k-1}{r}} \right]^{\frac{r-k}{r-k+1}q} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{q}{r-k+1}} =$$

$$= \| \varphi_{r-k} \|_q^q \left( \frac{\| x \|_\infty}{\| \varphi_r \|_\infty} \right)^{\frac{r-k}{r}q} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{k}{r}q}.$$

Неравенство (27) доказано. Его точность очевидна.

Теорема доказана.

***Замечание.*** Приведенное доказательство теоремы 2 сохраняет силу для функций $x \in L_\infty^r$ произвольной гладкости в случае $q \geq 1$ и является новым доказательством неравенства (1) А. А. Лигуна.

Через $S_{n,r}$, $n, r \in \mathbf{N}$, обозначим множество $2\pi$-периодических сплайнов $s$ порядка $r$ дефекта 1 с узлами в точках $i\pi / n$, $i \in \mathbf{Z}$.

**Теорема 3.** *Пусть* $n \in \mathbf{N}$; $r = 2$, $k = 1$ *или* $r = 3$, $k = 1, 2$. *Для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *и любого* $q \in [0, 1)$ *имеет место неравенство*

$$\left\| s^{(k)} \right\|_q \leq n^k \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_\infty} \| s \|_\infty. \quad (30)$$

*Неравенство* (30) *точное и обращается в равенство для функций вида* $s(t) = a\varphi_{n,r}(t)$, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$.

Неравенство (30) в случае $q \geq 1$ доказано ранее для всех $r, k \in \mathbf{N}$, $k \leq r$ В. М. Тихомировым [7] $(q = \infty)$ и А. А. Лигуном [8] $(q \in [1, \infty))$.

Теорема 3 выводится из теоремы 2 точно так же, как и в случае $q \geq 1$ (см., например, [9], теорема 8.2.1).


1. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Anal. Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
2. *Kofanov V. A.* Sharp inequalities of Bernstein and Kolmohorov type // East J. Approxim. – 2005. – **11**, № 2. – P. 131 – 145.
3. *Кофанов В. А.* О точных неравенствах типа Бернштейна для сплайнов // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1357 – 1367.
4. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
5. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
6. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
7. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
8. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 913 – 926.
9. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.


Получено 05.02.07