УДК 512.4

Я. В. Лавренюк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),
В. И. Сущанский (Силез. техн. ун-т)

РЕШЕТКА НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ГРУППЫ ЛОКАЛЬНЫХ ИЗОМЕТРИЙ ГРАНИЦЫ СФЕРИЧЕСКИ ОДНОРОДНОГО ДЕРЕВА

The structure of the normal subgroup lattice of the locally isometry group of the boundary of spherically homogeneous tree $\mathrm{LIsom}\,\partial T$ is described. It is proved that every normal subgroup of this group contains a commutant of $\mathrm{LIsom}\,\partial T$. The quotient group of $\mathrm{LIsom}\,\partial T$ is characterized by its commutant.

Наведено опис ґратки нормальних підгруп групи локальних ізометрій границі сферично однорідного дерева $\mathrm{LIsom}\,\partial T$. Доведено, що кожен нормальний дільник цієї групи містить її комутант. Охарактеризовано фактор-групу групи $\mathrm{LIsom}\,\partial T$ за її комутантом.

1. Введение. Группы автоморфизмов и иерархоморфизмов различных типов корневых деревьев составляют большой класс групп, который играет важную роль в различных разделах современной математики: теории групп, фрактальной геометрии, теории динамических систем, теории C*-алгебр и т. п. [1]. На границах деревьев эти группы действуют изометриями или локальными изометриями. Именно поэтому исследованию строения различных групп преобразований границ бесконечных деревьев, которые близки к изометрическим, уделяется большое внимание. При этом изучаются как вопросы структурной теории, так и динамические и геометрические свойства действий на границах деревьев. В настоящей работе мы продолжаем исследования в первом из отмеченных направлений. А именно, описываем нормальное строение группы всех локальных изометрий границы сферически однородного корневого дерева. Для топологической группы автоморфизмов сферически однородного корневого дерева (т. е. группы изометрий его границы) соответствующий результат о замкнутых нормальных делителях был получен независимо в [2, 3]. В работе [4] представлен более общий результат: охарактеризовано нормальное строение специальных (так называемых больших) подгрупп группы автоморфизмов дерева, в частности самой группы автоморфизмов и ее финитарной подгруппы. В [5] охарактеризовано нормальное строение топологической группы локальных изометрий границы сферически однородного корневого дерева, т. е. описаны ее замкнутые в естественной топологии нормальные делители. В данной работе результаты [5] обобщаются на случай произвольных нормальных делителей группы локальных изометрий.

2. Предварительные сведения. Пусть (T, v_0) — локально конечное дерево с корнем v_0, $V(T)$ – множество его вершин. Расстоянием $d(u, v)$ между вершинами $u, v \in V(T)$ называется длина (число звеньев) кратчайшего пути, соединяющего u, v. Сферой радиуса n (иначе *n-уровнем*) корневого дерева (T, v_0) называется множество

$$V_n(T) = \{v \in V(T) \,|\, d(v_0, v) = n\}.$$

В частности, $V_0(T) = \{v_0\}$. Дерево T называется *сферически однородным*, если валентность каждой его вершины зависит лишь от радиуса сферы, содержащей эту вершину. Сферически однородное дерево T однозначно (с точностью до изоморфизма) характеризуется своим *сферическим индексом* — последовательностью $\Theta = \Theta(T) = (a_0, a_1, \ldots)$ натуральных чисел, в которой a_0 — валентность корня v_0, а при $n \geq 1$ число $a_n + 1$ – валентность произвольной вершины дерева T из $V_n(T)$.

Напомним, что *супернатуральным числом* называется формальное бесконечное произведение вида

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots,$$

где p_1, p_2, $\ldots$ — все простые числа в естественном порядке, а α_i, $i = 1, 2, \ldots,$ — либо целое неотрицательное число, либо символ ∞. Два супернатуральных числа $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ и $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots$ считаются равными, если $\alpha_i = \beta_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots$. На множестве супернатуральных чисел естественным образом вводится операция умножения, превращающая его в полугруппу. Супернатуральное число $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ является делителем супернатурального числа $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots$, если выполнены неравенства $\beta_i \geq \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Характеристикой дерева T назовем супернатуральное число

$$\Omega(T) = \prod_{i=0}^{\infty} a_i.$$

Каждое сферически однородное дерево сферического индекса $\Theta = (a_0, a_1, \ldots)$ изоморфно некоторому стандартному дереву T_Θ, которое определяется следующим образом. Множеством вершин $V(T_\Theta)$ является множество всевозможных последовательностей вида

$$(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}), \qquad i_k \in X_k = \{1, 2, \ldots, a_k\}, \quad n \geq 0,$$

вместе с пустой $(\varnothing)$ последовательностью, которая соответствует случаю $n = 0$. Вершины $u, v \in V(T_\Theta)$ соединяются ребром в дереве T_Θ в том и только в том случае, когда одна из них является непосредственным продолжением другой, т. е. одна из них имеет вид $(i_0, \ldots, i_{n-1}, i_n)$, а другая — $(i_0, \ldots, i_{n-1})$, $i_k \in X_k$, $0 \leq k \leq n$. Дерево T_Θ, $\Theta = (a_0, a_1, \ldots)$, называют деревом слов над алфавитом X_0, X_1, $X_2, \ldots$, $|X_k| = a_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Говорят, что вершина v дерева T *лежит под* вершиной w, если путь, соединяющий корень дерева с вершиной v, содержит также вершину w. Символом T_v, $v \in V(T)$, будем обозначать полное поддерево с корневой вершиной v. Оно состоит из всех вершин дерева T, лежащих под вершиной v, и соединяющих их ребер. *Концом* корневого дерева T называется каждый бесконечный путь без повторений, начинающийся в корне дерева. Множество всех концов — границу дерева T — будем обозначать символом ∂T.

На границе ∂T корневого дерева T естественным образом определяется структура ультраметрического пространства. А именно, фиксируем бесконечную строго убывающую последовательность $\bar\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел, сходящуюся к 0. Пусть $k(x_1, x_2)$ — длина общего начала концов x_1, $x_2 \in \partial T$. Положим

$$\rho_{\bar\lambda}(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda_{k(x_1, x_2)}, & \text{если } x_1 \neq x_2, \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Функция ρ_λ является ультраметрикой на ∂T, причем метрическое пространство $\partial T = (\partial T, \rho_\lambda)$ — компакт. Биекция $f \colon V(T) \longrightarrow V(T)$ называется *автоморфизмом* корневого дерева (T, v_0), если $v_0^f = v_0$ и f сохраняет отношение инцидентности вершин. Каждый автоморфизм корневого дерева T определяет очевидным образом изометрию метрического пространства $V(T)$ с естественной метрикой. Наоборот, каждая изометрия, фиксирующая корень дерева, является автоморфизмом (T, v_0), т. е. имеет место равенство $\mathrm{Aut}(T, v_0) = \mathrm{Isom}(T, v_0)$. Понятно также, что каждая такая изометрия дерева T индуцирует некоторую изометрию на его границе ∂T. Тем самым группа $\mathrm{Isom}(T, v_0)$ (далее просто $\mathrm{Isom}\, T$) естественным образом погружается в группу $\mathrm{Homeo}\,\partial T$ всех гомеоморфизмов границы ∂T, причем образ $\mathrm{Isom}\, T$ при этом погружении совпадает с группой изометрий $\mathrm{Isom}\,\partial T$.

В группе $\mathrm{Isom}\, T$ выделяются следующие подгруппы:

1. Стабилизатор $\mathrm{St}(n)$ n-го уровня, $n \geq 0$, который состоит из всевозможных изометрий, фиксирующих все вершины сферы V_n дерева T;

2. Жесткий стабилизатор $\mathrm{rist}(v)$ вершины $v \in V(T)$, являющийся максимальной подгруппой, изометрии которой оставляют неподвижными все вершины, лежащие в дереве T ниже v.

Группа $\mathrm{Isom}\, T_\Theta$ дерева слов T_Θ, $\Theta = (a_0, a_1, \ldots)$ при любом натуральном n раскладывается в сплетение

$$\mathrm{Isom}\, T_\Theta \simeq \mathrm{Sym}_{a_0} \wr \mathrm{Sym}_{a_1} \wr \ldots \wr \mathrm{Sym}_{a_{n-1}} \wr \mathrm{Isom}\, T_{\Theta,n}, \tag{2}$$

где $T_{\Theta,n}$ — дерево слов над последовательностью алфавитов X_n, $X_{n+1}, \ldots$, а $\mathrm{Sym}\, a_i$ — симметрическая группа над алфавитом X_i, $0 \leq i \leq n-1$ [1, 6].

Отметим, что подгруппа $\mathrm{St}(n)$ раскладывается в прямое произведение жестких стабилизаторов вершин n-го уровня, т. е. имеет место равенство

$$\mathrm{St}(n) = \prod_{v \in V_n} \mathrm{rist}(v).$$

Поэтому если вершины n-го уровня дерева T_Θ занумерованы и $V_n(T) = \{v_0, v_1, \ldots \ldots, v_{m_n}\}$, то каждый элемент g стабилизатора $\mathrm{St}(n)$ представляется в виде кортежа $(g_1, \ldots, g_{m_n})$, где g_i — некоторый автоморфизм поддерева T_{v_i} с корнем в вершине v_i, $1 \leq i \leq m_n$. Поскольку для любых i, j, $1 \leq i, j \leq m_n$, поддеревья T_{v_i}, T_{v_j} изоморфны между собой и изоморфны определенному выше дереву $T_{\Theta,n}$, автоморфизмы g_i, $1 \leq i \leq m_n$, в дальнейшем будем отождествлять с соответствующими автоморфизмами этого дерева.

Произвольная изометрия дерева T_Θ однозначно определяется своим портретом — вершинно-помеченным деревом, изоморфным T_Θ [7]. При этом при любом $n \geq 0$ метками вершин n-го уровня служат подстановки множества X_{n+1}, которые показывают, как изометрия переставляет вершины $(n+1)$-го уровня дерева T_Θ, инцидентные одной и той же вершине n-го уровня. Пусть $g(v_k)$, $1 \leq k \leq m_n$, — метки вершины $v_k \in V_n(T_\Theta)$ для автоморфизма g, $\Pi_n g = \prod_{k=1}^{m_n} g(v_k)$. Следующее утверждение непосредственно следует из результатов [2, 4].

Теорема 1. 1. *Коммутант группы* $\mathrm{Isom}\, T_\Theta$ *состоит из всевозможных изометрий* g *таких, что для любого уровня* n *подстановка* $\Pi_n g$ *является четной.*

2. *Нормальная подгруппа группы* $\mathrm{Isom}\, T_\Theta$, *содержащаяся в* $\mathrm{St}(n)$, *но не принадлежащая* $\mathrm{St}(n+1)$, *содержит коммутант* $\mathrm{St}(n+1)'$, *который раскладывается в прямое произведение*

$$\mathrm{St}(k)' = \prod_{v \in V_k} \mathrm{rist}(v)'. \tag{3}$$

3. *Элемент* $(g_1, \ldots, g_{m_n})$ *содержится в* $\mathrm{St}(n) \cap \mathrm{Isom}\, T_\Theta{}'$ *тогда и только тогда, когда произведение* $g_1 g_2 \ldots g_{m_n}$ *содержится в* $\mathrm{Isom}\, T_{\Theta,n}{}'$.

Для каждой вершины $v \in V(T_\Theta)$ граница ∂T_v поддерева T_v естественным образом отождествляется с диском в ультраметрическом пространстве ∂T_Θ, который состоит из всех путей ∂T_Θ, проходящих через вершину v. Будем обозначать этот диск тем же символом ∂T_v. Пусть $S(\partial T_\Theta, n)$ — подгруппа группы $\mathrm{Homeo}\, \partial T_\Theta$, состоящая из тех гомеоморфизмов, которые лишь переставляют диски ∂T_v, $v \in V_n(T_\Theta)$, т. е. не изменяют координаты i_k путей $(i_0, i_1, \ldots) \in \partial T_\Theta$ при $k \geq n$. Понятно, что $S(\partial T_\Theta, n)$ изоморфна симметрической группе $\mathrm{Sym}\,(V_n(T_\Theta))$, причем $S(\partial T_\Theta, n) \leq S(\partial T_\Theta, k)$ при $n \leq k$. Подгруппу $S(\partial T_\Theta) < \mathrm{Homeo}\, \partial T$ определим как объединение возрастающей цепи подгрупп $S(\partial T_\Theta, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Выделим в ней также подгруппу $A(\partial T_\Theta)$, являющуюся объединением возрастающей цепи знакопеременных групп $A(\partial T_\Theta, n) \leq S(\partial T, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Напомним, что биекция α метрического пространства (X_1, d_1) в метрическое пространство (X_2, d_2) называется *локальной изометрией*, если для произвольной точки $x \in X_1$ существует окрестность U_x этой точки такая, что ограничение α на U_x является изометрией, т. е. для любых $x_1, x_2 \in U_x$ имеет место равенство $d(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = d(x_1, x_2)$. Локальную изометрию α назовем *однородной*, если существует $\delta > 0$ такое, что равенство $d(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = d(x_1, x_2)$ выполнено для всех точек x_1, x_2, для которых $d_1(x_1, x_2) < \delta$. В случае компактного пространства каждая его локальная изометрия на себя будет однородной. Множество всех локальных изометрий пространства (X, d) на себя образует группу относительно суперпозиции, которую будем обозначать символом $\mathrm{LIsom}(X, d)$.

Утверждение 1. *Пусть* (X, ρ) — *бесконечное компактное ультраметрическое пространство и группа локальных изометрий пространства* (X, ρ) *действует на* X *транзитивно. Тогда существуют сферически однородное дерево* T_Θ *и сходящаяся к нулю числовая строго убывающая последовательность* $\bar{\lambda}_\Theta$ *такие, что* (X, ρ) *локально изометрично пространству концов* ∂T_Θ *с метрикой, определяемой последовательностью* $\bar{\lambda}_\Theta$.

Доказательство см. в [8]. Нам понадобится следующий критерий изоморфности групп локальных изометрий.

Теорема 2 [9]. *Пусть* T_1, T_2 — *сферически однородные деревья, компоненты сферических индексов которых отличны от единицы. Группы* $\mathrm{LIsom}\, \partial T_1$ *и* $\mathrm{LIsom}\, \partial T_1$ *являются изоморфными тогда и только тогда, когда существуют сходящиеся к нулю последовательности положительных чисел* $\bar{\lambda}_1$ *и* $\bar{\lambda}_1$ *такие, что метрические пространства* $(\partial T_1, \rho_{\bar{\lambda}_1})$ *и* $(\partial T_2, \rho_{\bar{\lambda}_2})$, *где метрики* $\rho_{\bar{\lambda}_1}$ *и* $\rho_{\bar{\lambda}_2}$ *определяются равенством* (1), *являются локально изометрическими. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие* $i, j \in \mathbb{N}$, *что для каждого* $s \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\big|V_{i+s}(T_1)\big| = \big|V_{j+s}(T_2)\big|.$$

Относительно строения группы локальных изометрий сферически однородного корневого дерева отметим следующие факты.

Теорема 3 [10, 8]. 1. *Для любой допустимой последовательности* Θ *группа* $\mathrm{LIsom}\, \partial T_\Theta$ *раскладывается в произведение своих подгрупп* $\mathrm{Isom}\, \partial T_\Theta$ *и* $S(\partial T_\Theta)$:

$$\mathrm{LIsom}\, \partial T_\Theta = \mathrm{Isom}\, \partial T_\Theta S(\partial T_\Theta). \tag{4}$$

2. *Если группа* $\mathrm{LIsom}(\partial T, \bar{\lambda})$ *действует транзитивно на* ∂T, *то она является совершенной, т. е. имеет тривиальный центр и все ее автоморфизмы — внутренние. В частности, каждая нормальная подгруппа этой группы является характеристической в ней.*

3. Основные результаты. Следующее утверждение описывает коммутант группы локальных изометрий $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$.

Теорема 4. *Для произвольной допустимой последовательности* Θ *коммутант* $(\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta)'$ *группы локальных изометрий* $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ *корневого дерева* T_Θ *определяется равенством*

$$(\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta)' = (\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta)' A(\partial T_\Theta).$$

Доказательство. Если супернатуральное число 2^∞ является делителем супернатурального числа $\Omega(T_\Theta)$, $\Theta = (a_0, a_1, \ldots)$, то $A(\partial T_\Theta) = S(\partial T_\Theta)'$ и $S(\partial T_\Theta)' = S(\partial T_\Theta)$. В противном случае (см. [11]) $[S(\partial T_\Theta) : A(\partial T_\Theta)] = 2$ и $S(\partial T_\Theta)' = A(\partial T_\Theta)$. В силу равенства (4) коммутант группы $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ содержит произведение $(\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta)' S(\partial T_\Theta)'$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедиться, что коммутатор любых двух элементов из $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ содержится в произведении $(\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta)' S(\partial T_\Theta)'$. Пусть g, h — локальные изометрии ∂T_Θ, тогда они сохраняют расстояние между любыми парами точек, расстояние между которыми не превышает $(n+1)^{-1}$ при некотором n. Рассмотрим сферически однородное дерево $T_{\Theta'}$, где $\Theta' = \{a_0 a_1 \ldots a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Согласно теореме 2 группы $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ и $\mathrm{LIsom}\,\partial T_{\Theta'}$ изоморфны, причем при изоморфизме, который индуцируется естественным гомеоморфизмом $\partial T_\Theta \longrightarrow \partial T_{\Theta'}$, образы элементов g и h будут изометриями. Поэтому образ коммутатора $[g, h]$ при этом изоморфизме содержится в $(\mathrm{Isom}\,\partial T_{\Theta'})'$. А это и означает, что коммутатор содержится в $(\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta)' S(\partial T_\Theta)'$.

Теорема 4 доказана.

Лемма 1. *Неединичный нормальный делитель группы* $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ *содержит* $A(\partial T_\Theta)$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ — неединичный элемент, действующий как изометрия на точки, расстояние между которыми меньше $(n+1)^{-1}$. Пусть также $h \in \mathrm{St}(n+1)$. Тогда $h^{-1}gh$ содержится в группе изометрий дерева T. Поэтому произвольная нормальная подгруппа группы $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ имеет нетривиальное пересечение с $\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta$. Согласно теореме 1, каждая нормальная подгруппа группы $\mathrm{Isom}\,T$ содержит $(\mathrm{St}(k))'$ для некоторого k. Очевидно, что коммутант стабилизатора уровня содержит нетривиальные финитарные автоморфизмы. Поэтому любая нормальная подгруппа группы $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ содержит $A(\partial T_\Theta)$.

Лемма доказана.

Основным утверждением, дающим характеризацию нормального строения группы локальных изометрий корневого дерева, является следующая теорема.

Теорема 5. *Каждая неединичная нормальная подгруппа группы* $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ *содержит коммутант.*

Доказательство. Пусть N — неединичная нормальная подгруппа $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$.

Согласно п. 2 теоремы 1, каждая нормальная подгруппа содержит коммутант стабилизатора некоторого уровня, который имеет вид (3).

По тем же соображениям, что и в доказательстве теоремы 4, можно считать, что N содержит коммутант первого уровня и $l = |V_1| \geq 5$. Подгруппа N, согласно лемме 1, содержит также $A(\partial T_\Theta)$. Поэтому достаточно доказать, что N содержит $\mathrm{St}(1) \cap (\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta)'$.

Пусть $g = (g_1, \ldots, g_l) \in \mathrm{St}(1) \cap (\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta)'$. Выберем элемент $\sigma \in \mathrm{Isom}\,T_\Theta$, который индуцируется перестановкой вершин первого уровня, а именно, циклом $(1, 2, \ldots, l)$, если l — нечетное, и $(1, 2, \ldots, l-1)$, если l — четное. В последнем случае также выберем элемент π, задающийся циклом $(l-2, l-1, l)$.

Пусть l — нечетное. Рассмотрим элемент из $\mathrm{St}(1)$:

$$h = \Big(e, g_1^{-1}, (g_1 g_2)^{-1}, \ldots, (g_1 \ldots g_{l-1})^{-1}\Big).$$

Тогда

$$[\sigma, h] = \left(g_1, \ldots, g_{l-1}, g_l (g_1 \ldots g_l)^{-1}\right).$$

Поскольку же $\sigma \in A(\partial T_\Theta)$, то $[\sigma, h]$ содержится в N.

Пусть теперь l — четное. Рассмотрим следующие элементы из $\mathrm{St}(1)$:

$$h = \left(e, g_1^{-1}, (g_1 g_2)^{-1}, \ldots, (g_1 \ldots g_{l-2})^{-1}, e\right),$$

$$s = \left(e, e, \ldots, e, e, (g_1 \ldots g_{l-1})^{-1}\right).$$

Поскольку элементы σ и π содержатся в N, то

$$[\sigma, h] = \left(g_1, \ldots, g_{l-1}, g_{l-1} (g_1 \ldots g_{l-1})^{-1}, e\right),$$

$$[\pi, s] = \left(e, \ldots, e, g_1 \ldots g_{l-1}, g_l (g_1 \ldots g_l)^{-1}\right)$$

также содержатся в N. Отсюда

$$[\sigma, h][\pi, s] = \left(g_1, \ldots, g_{l-1}, g_l (g_1 \ldots g_l)^{-1}\right) \in N.$$

По теореме 1 элемент $(e, \ldots, e, g_1 \ldots g_l)$ содержится в коммутанте первого уровня. Следовательно, для любого l элемент g содержится в N.

Таким образом, N содержит $(\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta)'$.

Теорема 5 доказана.

Из теоремы непосредственно получаем такое следствие.

Следствие. *Каждая собственная фактор-групa группы* $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ *абелева.*

Далее символом $\prod$ будем обозначать прямое, а символом $\overline{\prod}$ — декартово произведение некоторого семейства групп. Если семейство групп конечно, то эти конструкции совпадают.

Следующая теорема описывает строение фактор-группы $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ по ее коммутанту.

Теорема 6. *Решетка нормальных делителей группы* $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$ *изоморфна решетке подгрупп прямого произведения континуального количества циклических групп порядка* 2.

Доказательство. Согласно теореме 2, можно считать, что в сферическом индексе Θ первое число больше чем 3. Зафиксируем конец $(v_0, v_1, \ldots)$ дерева T_Θ. Пусть $g_{i+1} \in \mathrm{Isom}\,T_{v_i}$, $i \geq 0$, только переставляет между собой два поддерева T_{u_i} и T_{w_i} первого уровня в T_{s_i}, где s_i такое, что T_{s_i} — поддерево первого уровня в T_{v_i} и

$s_i \neq v_{i+1}$. Пусть также g_0 только переставляет между собой два поддерева первого уровня, которые отличны от T_{s_0} и T_{v_1}. Заметим, что так выбранные элементы $g_0, g_1, g_2, \ldots$ попарно коммутируют и каждый из них имеет порядок 2.

Рассмотрим подгруппы $G_i = \langle g_i \rangle$ группы $\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta$. Поскольку $G_i < \mathrm{St}(i)$, бесконечное произведение $G = G_1 G_2 \ldots$ есть подгруппой $\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta$. Легко заметить, что G есть декартовым произведением циклических групп порядка 2, т. е.

$$G = \overline{\prod}_{i\geq 0} G_i \simeq \overline{\prod}_{i\geq 0} C_2.$$

Учитывая строение коммутанта группы $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta$, получаем разложение в произведение

$$\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta = G(\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta)'.$$

Отсюда по теореме о гомоморфизме

$$\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta/(\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta)' \simeq G/G \cap (\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta)'.$$

Далее, поскольку пересечение $(\mathrm{Isom}\,\partial T_\Theta)'$ и G тривиально, то

$$G \cap (\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta)' = G \cap A(\partial T_\Theta).$$

Поскольку группа $A(\partial T_\Theta)$ счетная, фактор-группа $\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta/(\mathrm{LIsom}\,\partial T_\Theta)'$ имеет мощность континуум. Согласно же первой теореме Прюфера (см., например, [12]) эта фактор-группа является прямым произведением циклических групп порядка 2. Отсюда и следует утверждение теоремы.

1. *Nekrashevych V.* Self-similar groups // AMS: Math. Surv. and Monogr. – 2005. – **117**. – 231 p.
2. *Сущанский В. И.* Нормальное строение групп изометрий полуконечных бэровских метрик. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 289 с.
3. *Bass H., Otero-Espinar M. V., Rockmore D., Tresser C.* Cyclic renormalization and automorphism groups of rooted trees // Lect. Notes Math. – 1995. – **1621**. – xxi + 163 p.
4. *Muntyan Y., Sushchansky V. I.* Normal structure of the big group of a spherical homogeneous rooted tree. – 2006. – (Preprint / TAMU).
5. *Лавренюк Я. В., Сущанский В. И.* Нормальное строение группы локальных изометрий границы сферически-однородного дерева // Доп. НАН України. – 2007. – № 3. – С. 20 – 24.
6. *Безущак О. Е., Сущанский В. И.* l-Сплетения и изометрии обобщенных бэровских метрик // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7/8. – С. 1031 – 1038.
7. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2000. – **231**. – С. 134 – 214.
8. *Lavrenyuk Ya.* On automorphisms of local isometry groups of compact ultrametric spaces // Int. J. Algebra and Comput. – 2005. – **15**. – № 5-6. – С. 1013 – 1024.
9. *Lavrenyuk Ya.* Classification of the local isometry groups of rooted tree boundaries // Algebra and Discrete Math. – 2007. – № 1.
10. *Lavrenyuk Ya. V., Sushchansky V. I.* Automorphisms of homogeneous symmetric groups and hierarchomorphisms of rooted trees // Ibid. – 2003. – № 4. – P. 33 – 49.
11. *Kroshko N. V., Sushchansky V. I.* Direct limits of symmetric and altering groups with strictly diagonal embeddings // Arch. Math. – 1998. – **71**. – S. 173 – 182.
12. *Курош А. Г.* Теория групп. – Изд. третье, доп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Получено 09.08.07