УДК 512.54

А. В. Руссєв (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО СПРЯЖЕНІСТЬ У ГРУПАХ СКІНЧЕННОСТАНОВИХ АВТОМОРФІЗМІВ КОРЕНЕВИХ ДЕРЕВ

We show that conjugacy of elements of finite order in the group of finite-state automorphisms of a rooted tree is equivalent to their conjugacy in the automorphism group of the rooted tree. We find a criterion for the conjugacy of a finite-state automorphism to the adding machine in the group of finite-state automorphisms of the 2-valent rooted tree.

Установлено, что сопряженность элементов конечного порядка в группе автоморфизмов корневого дерева с конечным числом состояний равносильна их сопряженности в группе всех автоморфизмов корневого дерева. Найден критерий сопряженности автоморфизма с конечным числом состояний со счетной машиной в группе автоморфизмов корневого дерева валентности 2 с конечным числом состояний.

1. Вступ. При дослідженні будови тих чи інших груп одним із ключових є питання про структуру їх класів спряженості. Дану роботу присвячено дослідженню спряженості у підгрупі скінченностанових автоморфізмів групи $\operatorname{Aut} T_n$ автоморфізмів однорідного кореневого дерева T_n валентності n. Опис класів спряженості в групі $\operatorname{Aut} T_n$ у термінах дій елементів цієї групи на дереві T_n наведено в роботі [1]. Властивості підгруп групи $\operatorname{Aut} T_n$, що пов'язані зі спряженістю, вивчались також в [2] (розділ 3.11) і [3]. В групі $\operatorname{Aut} T_n$ природним чином виділяється підгрупа скінченностанових автоморфізмів $F\operatorname{Aut} T_n$. Класи спряженості групи $F\operatorname{Aut} T_n$ не можна одержати як перетини класів спряженості групи $\operatorname{Aut} T_n$ з підгрупою $F\operatorname{Aut} T_n$. Відповідний приклад двох автоморфізмів, спряжених в $\operatorname{Aut} T_n$ і не спряжених в $F\operatorname{Aut} T_n$, наведено в [4]. Тому природною є задача опису класів спряженості в групі $F\operatorname{Aut} T_n$.

В даній роботі встановлено, що елементи групи $F\operatorname{Aut} T_n$, які мають скінченний порядок, є спряженими в групах $\operatorname{Aut} T_n$ і $F\operatorname{Aut} T_n$ одночасно. Для елементів нескінченного порядку аналогічне твердження, як показує згаданий вище приклад, не існує. В цьому випадку вдалося знайти зв'язок між спряженістю елементів та спряженістю станів їх перших рівнів і степенів самих елементів. У випадку бінарного дерева знайдено критерій спряженості з додавальною машиною в групі $F\operatorname{Aut} T_2$.

2. Визначення і позначення. Нехай S_n — симетрична група степеня n, $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_0$ — множина невід'ємних цілих чисел, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ — алфавіт. Розглянемо множину всіх слів над алфавітом X:

$$X^* = \bigcup_{n \geq 0} X^n, \qquad X^0 = \{\Lambda\},$$

де Λ — порожнє слово. Для слів із цієї множини визначено операцію приписування, яка перетворює X^* у моноїд.

Означення 1. *Кореневим деревом валентності n називається граф $T_n = (X^*, E, \Lambda)$, де X^* — множина вершин, $E \subset X^* \times X^*$ — множина ребер, $\Lambda \in X^*$ — корінь дерева, причому $(u, v) \in E$ тоді і лише тоді, коли існує $x \in X$ таке, що $u = vx$ або $v = ux$.*

Означення 2. *Відображення* $\varphi\colon T_n \to T_n$ *називається автоморфізмом кореневого дерева, якщо* $\varphi\colon X^* \to X^*$ *— бієкція,* $\varphi(e) = (\varphi(u), \varphi(v)) \in E \Leftrightarrow e = (u, v) \in E$, $\varphi(\Lambda) = \Lambda$.

Всі автоморфізми кореневого дерева T_n утворюють групу відносно композиції, яку позначимо $\mathrm{Aut}\, T_n$. Символом id будемо позначати одиничний елемент цієї групи.

Означення 3. *Станом автоморфізму* $\varphi \in \mathrm{Aut}\, T_n$ *у вершині* $w \in X^*$ *називається такий автоморфізм* $\varphi_w \in \mathrm{Aut}\, T_n$, *що для довільного* $u \in X^*$ *виконується рівність* $\varphi(wu) = \varphi(w)\varphi_w(u)$.

Таке означення є коректним [4].

Означення 4. *Автоморфізм називається скінченностановим, якщо множина всіх його станів є скінченною.*

Множина всіх скінченностанових автоморфізмів утворює підгрупу $F\mathrm{Aut}\, T_n$ в групі $\mathrm{Aut}\, T_n$ [4].

Визначимо відображення $\pi\colon \mathrm{Aut}\, T_n \to S_n$ за правилом $(\pi(\varphi))(x) = \varphi(x)$, $x \in X$, $\varphi \in \mathrm{Aut}\, T_n$.

Автоморфізм $\varphi \in \mathrm{Aut}\, T_n$ також будемо записувати у формі $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\pi(\varphi)$, де $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — стани автоморфізму φ у вершинах $1, 2, \ldots, n$ відповідно. Нехай $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\pi_\varphi$ і $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)\pi_\psi$ — два автоморфізми з $\mathrm{Aut}\, T_n$. Тоді для довільних $x \in X$ і $u \in X^*$ маємо

$$(\varphi\psi)(xu) = \psi(\varphi(xu)) = \psi(\pi_\varphi(x)\varphi_x(u)) =$$

$$= \pi_\psi(\pi_\varphi(x))\psi_{\pi_\varphi(x)}(\varphi_x(u)) = (\pi_\varphi\pi_\psi)(x)(\varphi_x\psi_{\pi_\varphi(x)})(u).$$

Вважаємо, що перший множник у добутку автоморфізмів або підстановок діє першим. Отже, для добутку $\varphi\psi$ маємо $\varphi\psi = (\varphi_1\psi_{\pi_\varphi(1)}, \varphi_2\psi_{\pi_\varphi(2)}, \ldots, \varphi_n\psi_{\pi_\varphi(n)})\pi_\varphi\pi_\psi$.

Нехай $f\colon X \to X$ — частково визначене відображення. Символом $\mathrm{dom}\, f$ будемо позначати підмножину X, на якій визначено f, а символом $\mathrm{im}\, f$ — множину значень f.

3. Спряженість елементів скінченного порядку в $F\mathrm{Aut}\, T_n$. Визначимо функції $l\colon S_n \times X \to \mathbb{N}$, $s\colon S_n \times X \to X$ та $d\colon S_n \times X \to \mathbb{N}_0$. Для підстановки $\pi \in S_n$ і літери $i \in X$ покладемо: $l(\pi, i)$ — довжина циклу в циклічному розкладі π, що містить i; $s(\pi, i)$ — мінімальний елемент цього циклу; $d(\pi, i)$ — мінімальне невід'ємне число таке, що $s(\pi, i) = \pi^{d(\pi, i)}(i)$.

Лема 1. *Нехай* π_u, π_v *та* π_h *— підстановки з* S_n *такі, що* $\pi_u = \pi_h^{-1}\pi_v\pi_h$. *Тоді має місце рівність* $l(\pi_v, i) = l(\pi_u, \pi_h(i))$.

Доведення. З означення маємо рівність $\pi_v^{l(\pi_v, i)}(i) = i$. Тому

$$\pi_u^{l(\pi_v, i)}(\pi_h(i)) = (\pi_h^{-1}\pi_v\pi_h)^{l(\pi_v, i)}(\pi_h(i)) =$$

$$= (\pi_h^{-1}\pi_v^{l(\pi_v, i)}\pi_h)(\pi_h(i)) = \pi_h(\pi_v^{l(\pi_v, i)}(i)) = \pi_h(i).$$

Звідси $l(\pi_u, \pi_h(i)) \le l(\pi_v, i)$. Аналогічно доводиться нерівність в інший бік.

Лему доведено.

Визначимо відображення $r\colon \mathrm{Aut}\, T_n \times X \times \mathbb{N}_0 \to \mathrm{Aut}\, T_n$ та $\hat{r}\colon \mathrm{Aut}\, T_n \times X \to \mathrm{Aut}\, T_n$. Для автоморфізму $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)\pi_u$ з $\mathrm{Aut}\, T_n$ і літери $i \in X$ покладемо

$$r(u,i,m)=\prod_{j=0}^{m-1}u_{\pi_u^j(i)},\quad m\in\mathbb{N},\quad r(u,i,0)=\mathrm{id},$$

$$\hat{r}(u,i)=r(u,i,l(\pi_u,i))=\prod_{j=0}^{l(\pi_u,i)-1}u_{\pi_u^j(i)}.$$

Легко перевірити, що $r(u,i,m)=(u^m)_i$ і $\hat{r}(u,i)=(u^{l(\pi_u,i)})_i$.

Лема 2. *Відображення* r *задовольняє рівності*

$$r(u,i,m)=u_i r(u,\pi_u(i),m-1),$$

де $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\pi_u$ *— автоморфізм з* $\mathrm{Aut}\,T_n$, $i\in X$, $m\in\mathbb{N}$.

Доведення. Випадок $m=1$ є наслідком рівностей $r(u,i,1)=u_i$ та $r(u,\pi_u(i),0)=\mathrm{id}$, які випливають з означення. У випадку $m>1$ за означенням маємо

$$r(u,i,m)=\prod_{j=0}^{m-1}u_{\pi_u^j(i)}=u_i\prod_{j=1}^{m-1}u_{\pi_u^j(i)}=u_i\prod_{j=0}^{m-2}u_{\pi_u^j(\pi_u(i))}=u_i r(u,\pi_u(i),m-1).$$

Лему доведено.

Лема 3. *Нехай* $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\pi_u$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)\pi_v$ *та* $h=(h_1,h_2,\ldots,h_n)\pi_h$ *— такі автоморфізми з* $\mathrm{Aut}\,T_n$, *що* $u=h^{-1}vh$. *Тоді для довільного* $i\in X$ *має місце рівність*

$$h_i^{-1}\hat{r}(v,i)h_i=\hat{r}(u,\pi_h(i)).$$

Доведення. Зафіксуємо $i\in X$. З умови маємо рівність $u^{l(\pi_v,i)}=h^{-1}v^{l(\pi_v,i)}h$ або

$$u^{l(\pi_v,i)}=\pi_h^{-1}(h_1^{-1},h_2^{-1},\ldots,h_n^{-1})v^{l(\pi_v,i)}(h_1,h_2,\ldots,h_n)\pi_h.$$

Звідси

$$\pi_h u^{l(\pi_v,i)}=(h_1^{-1},h_2^{-1},\ldots,h_n^{-1})v^{l(\pi_v,i)}(h_1,h_2,\ldots,h_n)\pi_h. \tag{1}$$

Стан, що відповідає літері i, для автоморфізму в лівій частині рівності (1) має вигляд

$$u_{\pi_h(i)}u_{\pi_u(\pi_h(i))}u_{\pi_u^2(\pi_h(i))}\ldots u_{\pi_u^{l(\pi_v,i)-1}(\pi_h(i))}=\hat{r}(u,\pi_h(i)),$$

оскільки $l(\pi_v,i)=l(\pi_u,\pi_h(i))$ за лемою 1. Стан, що відповідає літері i, для автоморфізму в правій частині рівності (1) має вигляд

$$h_i^{-1}v_i v_{\pi_v(i)}v_{\pi_v^2(i)}\ldots v_{\pi_v^{l(\pi_v,i)-1}(i)}h_i=h_i^{-1}\hat{r}(v,i)h_i.$$

Отже, $h_i^{-1}\hat{r}(v,i)h_i=\hat{r}(u,\pi_h(i))$.

Лему доведено.

Далі в даному пункті доводиться, що скінченностанові автоморфізми з $F\mathrm{Aut}\,T_n$, які мають скінченний порядок і спряжені в групі $\mathrm{Aut}\,T_n$, також будуть спряженими в групі $F\mathrm{Aut}\,T_n$.

Розглянемо множину

$$M = \Big\{(u,v) \in F\mathrm{Aut}\,T_n \times F\mathrm{Aut}\,T_n\colon$$

$$u,\ v \text{ мають скінченний порядок і є спряженими в групі } \mathrm{Aut}\,T_n\Big\}.$$

Для кожної пари $\theta = (u,v) \in M$ зафіксуємо елемент $\Psi(\theta) \in \mathrm{Aut}\,T_n$ такий, що

$$\big(\Psi(\theta)\big)^{-1} v \Psi(\theta) = u.$$

Таким чином, визначено відображення $\Psi\colon M \to \mathrm{Aut}\,T_n$.

Схема подальшого доведення є такою: за відображенням Ψ будуємо нове відображення $\Psi_*\colon M \to \mathrm{Aut}\,T_n$ таким чином. Спочатку визначимо дію всієї сім'ї автоморфізмів $\{\Psi_*(\theta)\colon \theta \in M\}$ на словах довжини 1, потім на словах довжини 2 і т. д. Після цього покажемо, що Ψ_* має ту ж властивість, що й Ψ, тобто для будь-якого $\theta = (u,v) \in M$ $(\Psi_*(\theta))^{-1} v \Psi_*(\theta) = u$. Залишиться довести, що $\Psi_*(M) \subset \subset F\mathrm{Aut}\,T_n$, тобто для кожної пари $\theta \in M$ автоморфізм $\Psi_*(\theta)$ є скінченностановим спрягаючим елементом.

Визначимо відображення $\Phi\colon M \times X \to \mathrm{Aut}\,T_n$ та $\Psi_*\colon M \to \mathrm{Aut}\,T_n$. Нехай $\theta = (u,v) \in M$. Позначимо $h = \Psi(\theta)$, $\pi_u = \pi(u)$, $\pi_v = \pi(v)$, $\pi_h = \pi(h)$. Покладемо

$$\Phi(\theta, i) = \Psi_*(\hat r(u, \pi_h(s(\pi_v, i))), \hat r(v, s(\pi_v, i))), \quad i \in X, \tag{2}$$

$$\Psi_*(\theta) = (r(v, i, d(\pi_v, i))\Phi(\theta, i)(r(u, \pi_h(i), d(\pi_v, i)))^{-1}, \quad 1 \le i \le n)\pi_h. \tag{3}$$

Рівність (3) визначає дію сім'ї $\{\Psi_*(\theta)\colon \theta \in M\}$ на словах довжини 1. Нехай дію сім'ї $\{\Psi_*(\theta)\colon \theta \in M\}$ визначено на словах довжини k. Якщо $\theta = (u,v) \in M$, то за лемою 3 $\big(\hat r(u, \pi_h(s(\pi_v, i))), \hat r(v, s(\pi_v, i))\big) \in M$, а тому за рівністю (2) дію сім'ї $\{\Phi(\theta, i)\colon \theta \in M, i \in X\}$ визначено на словах довжини k. Тоді рівність (3) визначає дію сім'ї $\{\Psi_*(\theta)\colon \theta \in M\}$ на словах довжини $k+1$. З принципу математичної індукції випливає, що дію сім'ї $\{\Psi_*(\theta)\colon \theta \in M\}$ визначено на словах довільної довжини.

Лема 4. *Для довільної пари $\theta = (u,v) \in M$ має місце рівність*

$$u = \big(\Psi_*(\theta)\big)^{-1} v \Psi_*(\theta).$$

Доведення проведемо індукцією за рівнем m кореневого дерева. База індукції $m = 1$ випливає з рівності підстановок, що відповідають автоморфізмам в обох частинах, оскільки $\pi(\Psi_*(\theta)) = \pi(\Psi(\theta))$. Припустимо, що твердження має місце для рівня $m = k$. Покажемо, що воно має місце і для рівня $m = k+1$. Обчислимо стан g правої частини для літери $\pi_h(i)$:

$$g = \Big(r\big(v, i, d(\pi_v, i)\big)\Phi(\theta, i)\big(r(u, \pi_h(i), d(\pi_v, i))\big)^{-1}\Big)^{-1} v_i \times$$

$$\times\, r\big(v, \pi_v(i), d(\pi_v, \pi_v(i))\big)\Phi(\theta, \pi_v(i))\Big(r\big(u, \pi_h(\pi_v(i)), d(\pi_v, \pi_v(i))\big)\Big)^{-1}.$$

Розглянемо два випадки:

1) $i = s(\pi_v, i)$. Тоді $d(\pi_v, i) = 0$ та $d(\pi_v, \pi_v(i)) = l(\pi_v, i) - 1$. Для автоморфізму g маємо (знак рівності показує, що автоморфізми однаково діють на слова довжини k)

$$g = (r(v,i,0)\Phi(\theta,i)(r(u,\pi_h(i),0))^{-1})^{-1}v_i\times$$

$$\times r(v,\pi_v(i),l(\pi_v,i)-1)\Phi(\theta,\pi_v(i))(r(u,\pi_h(\pi_v(i)),l(\pi_v,i)-1))^{-1} =$$

$$= (\Phi(\theta,i))^{-1}v_i r(v,\pi_v(i),l(\pi_v,i)-1)\Phi(\theta,\pi_v(i))(r(u,\pi_h(\pi_v(i)),l(\pi_v,i)-1))^{-1} =$$

$$= (\Phi(\theta,i))^{-1}r(v,i,l(\pi_v,i))\Phi(\theta,\pi_v(i))(r(u,\pi_u(\pi_h(i)),l(\pi_v,i)-1))^{-1} =$$

$$= (\Phi(\theta,i))^{-1}\hat{r}(v,i)\Phi(\theta,i)(r(u,\pi_u(\pi_h(i)),l(\pi_v,i)-1))^{-1} =$$

(рівність (2) в цьому випадку набирає вигляду $\Phi(\theta,i) = \Psi_*(\hat{r}(u,\pi_h(i)),\hat{r}(v,i))$, тому за припущенням індукції)

$$= \hat{r}(u,\pi_h(i))(r(u,\pi_u(\pi_h(i)),l(\pi_v,i)-1))^{-1} =$$

$$= u_{\pi_h(i)}r(u,\pi_u(\pi_h(i)),l(\pi_u,\pi_h(i))-1)(r(u,\pi_u(\pi_h(i)),l(\pi_v,i)-1))^{-1} = u_{\pi_h(i)}.$$

2) $i \neq s(\pi_v,i)$. Тоді $d(\pi_v,\pi_v(i)) = d(\pi_v,i)-1$. Шуканий автоморфізм g має вигляд

$$g = (r(v,i,d(\pi_v,i))\Phi(\theta,i)(r(u,\pi_h(i),d(\pi_v,i)))^{-1})^{-1}v_i\times$$

$$\times r(v,\pi_v(i),d(\pi_v,i)-1)\Phi(\theta,\pi_v(i))(r(u,\pi_h(\pi_v(i)),d(\pi_v,i)-1))^{-1} =$$

$$= r(u,\pi_h(i),d(\pi_v,i))(\Phi(\theta,i))^{-1}r(v,i,d(\pi_v,i))^{-1}\times$$

$$\times v_i r(v,\pi_v(i),d(\pi_v,i)-1)\Phi(\theta,\pi_v(i))(r(u,\pi_h(\pi_v(i)),d(\pi_v,i)-1))^{-1} =$$

$$= r(u,\pi_h(i),d(\pi_v,i))(\Phi(\theta,i))^{-1}r(v,i,d(\pi_v,i))^{-1}\times$$

$$\times r(v,i,d(\pi_v,i))\Phi(\theta,i)(r(u,\pi_u(\pi_h(i)),d(\pi_v,i)-1))^{-1} =$$

$$= r(u,\pi_h(i),d(\pi_v,i))(r(u,\pi_u(\pi_h(i)),d(\pi_v,i)-1))^{-1} =$$

$$= u_{\pi_h(i)}r(u,\pi_u(\pi_h(i)),d(\pi_v,i)-1)(r(u,\pi_u(\pi_h(i)),d(\pi_v,i)-1))^{-1} = u_{\pi_h(i)}.$$

З принципу математичної індукції випливає, що твердження має місце для всіх рівнів кореневого дерева.

Лему доведено.

Лема 5. *Має місце включення*

$$\Psi_*(M) \subset F\mathrm{Aut}\,T_n.$$

Доведення. Нехай $M_k = \{\theta \in M \mid$ порядок елементів з пари θ дорівнює $k\}$. Доведемо індукцією по k, що $\Psi_*(M_k) \subset F\mathrm{Aut}\,T_n$. База індукції $k=1$, $M_1 = \big\{(\mathrm{id},\mathrm{id})\big\}$. Для $a = \Psi_*\big((\mathrm{id},\mathrm{id})\big)$ з рівностей (2) та (3) одержуємо $a = (a,a,\ldots,a)\pi(\Psi(\mathrm{id},\mathrm{id}))$. Тому a є скінченностановим.

Нехай $\Psi_*(M_k) \subset F\mathrm{Aut}\,T_n$ для всіх $k < m$. Покажемо, що $\Psi_*(M_m) \subset F\mathrm{Aut}\,T_n$. Якщо M_m є порожньою, то вкладення має місце. Нехай $\theta = (u, v) \in M_m$. Потрібно показати, що множина всіх станів $\Psi_*(\theta)$ є скінченною. Позначимо множину всіх станів u_w автоморфізму u таких, що $u(w) = w$, через Q_u. Аналогічно визначаємо для автоморфізму v множину Q_v. Ці множини є скінченними. Розглянемо множину $Q_1 = \Psi_*((Q_u \times Q_v) \cap M) \subset \mathrm{Aut}\,T_n$, всі елементи якої будемо називати *автоморфізмами першого типу*. Вона також є скінченною.

Нехай $\Psi_*((\tilde{u}, \tilde{v})) \in Q_1$ — довільний автоморфізм першого типу, де $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_n)\pi(\tilde{u})$ та $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_n)\pi(\tilde{v})$ — стани автоморфізмів u та v відповідно. Якщо $l(\pi(\tilde{v}), i) = 1$, то стан $\Psi_*((\tilde{u}, \tilde{v}))$, що відповідає літері i, дорівнює $\Phi((\tilde{u}, \tilde{v}), i) = \Psi_*((\tilde{u}_{\pi_h(i)}, \tilde{v}_i)) \in Q_1$, оскільки $d(\pi(\tilde{v}), i) = 0$, тобто є автоморфізмом першого типу. Якщо $l(\pi(\tilde{v}), i) \neq 1$, то порядок елементів, до яких застосовується Ψ_* у рівності (2), менше m принаймні в $l(\pi(\tilde{v}), i)$ разів. Дійсно, вони є станами $l(\pi(\tilde{v}), i)$-го степеня автоморфізмів $\tilde{u}$ та $\tilde{v}$ відповідно та $l(\pi(\tilde{v}), i)$ є дільником порядків $\tilde{u}$ та $\tilde{v}$, оскільки $\pi(\tilde{u})$ та $\pi(\tilde{v})$ містять цикл довжини $l(\pi(\tilde{v}), i)$. За припущенням індукції $\Phi((\tilde{u}, \tilde{v}), i) \in F\mathrm{Aut}\,T_n$. Тому стан $\Psi_*((\tilde{u}, \tilde{v}))$, що відповідає літері i, також є скінченностановим, бо є добутком $\Phi((\tilde{u}, \tilde{v}), i)$ та станів або обернених до станів деяких степенів $\tilde{u}$ та $\tilde{v}$. Такі стани будемо називати *автоморфізмами другого типу*.

Всі автоморфізми другого типу можна проіндексувати підмножиною множини $Q_u \times Q_v \times X$, де елемент $Q_u \times Q_v$ визначає пару $(\tilde{u}, \tilde{v})$, а елемент X — літеру, якій відповідає стан. Отже, їх скінченна кількість. Позначимо множину автоморфізмів другого типу через Q_2.

Розглянемо множину Q_3, що складається зі всіх станів усіх автоморфізмів з Q_2. Вона є скінченною, бо Q_2 складається зі скінченної кількості скінченностанових автоморфізмів. Таким чином, приходимо до висновку, що всі стани $\Psi_*(\theta)$ належать скінченній множині $Q_1 \cup Q_3$, тобто $\Psi_*(\theta)$ є скінченностановим.

З принципу математичної індукції випливає, що $\Psi_*(M_k) \subset F\mathrm{Aut}\,T_n$ для довільного k, тобто $\Psi_*(M) \subset F\mathrm{Aut}\,T_n$.

Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай g_1 і g_2 — два скінченностанові автоморфізми скінченного порядку, що спряжені в групі $\mathrm{Aut}\,T_n$. Тоді g_1 і g_2 спряжені в групі $F\mathrm{Aut}\,T_n$.*

Доведення. Розглянемо пару $\theta = (g_1, g_2)$. За умовою $\theta \in M$. Тому визначений автоморфізм $\psi = \Psi_*(\theta)$. За лемою 5 він є скінченностановим, а за лемою 4 має місце рівність $g_1 = \psi^{-1} g_2 \psi$. Отже, g_1 і g_2 є спряженими в $F\mathrm{Aut}\,T_n$.

4. Спряженість елементів $F\mathrm{Aut}\,T_n$ у загальному випадку. Нехай u і v — деякі автоморфізми з $F\mathrm{Aut}\,T_n$, $\pi_u = \pi(u)$, $\pi_v = \pi(v)$. Будемо говорити, що для автоморфізмів u і v існує *частковий генератор спряження* ζ, якщо існує таке частково визначене ін'єктивне відображення $\zeta\colon X \to X$, що на $\mathrm{im}\,\zeta$ виконується рівність $\pi_u = \zeta^{-1}\pi_v\zeta$, $\mathrm{dom}\,\zeta$ інваріантна при дії π_v та для кожної літери $i \in \mathrm{dom}\,\zeta$ автоморфізми $\hat{r}(v, s(\pi_v, i))$ і $\hat{r}(u, \zeta(s(\pi_v, i)))$ є спряженими в $F\mathrm{Aut}\,T_n$.

Лема 6. *Нехай для u і v існує частковий генератор спряження π_h та $\mathrm{dom}\,\pi_h = X$. Тоді u і v є спряженими в $F\mathrm{Aut}\,T_n$.*

Доведення. За умовою існують такі автоморфізми $h_i \in F\mathrm{Aut}\,T_n$, $i \in X$, що для кожної літери $i \in X$ виконується рівність

$$\hat{r}\big(u, \pi_h(s(\pi_v, i))\big) = h_i^{-1}\hat{r}(v, s(\pi_v, i))h_i. \tag{4}$$

Для пари $\theta = (u, v)$ автоморфізм $\Psi_*(\theta)$ визначаємо за рівністю (3), але покладаємо $\Phi(\theta, i) = h_i$. Подальше доведення повторює доведення кроку індукції в лемі 4, але замість припущення індукції використовуємо рівність (4).

Теорема 2. *Нехай підстановки π_u і π_v з S_n є спряженими в S_n, для u і v існує частковий генератор спряження ζ та для кожного $k \in L_\zeta = \{l(\pi_v, i) \colon i \notin \operatorname{dom}\zeta\}$ автоморфізми u^k і v^k спряжені в $F\mathrm{Aut}\, T_n$. Тоді u і v є спряженими в $F\mathrm{Aut}\, T_n$.*

Доведення. Нехай k — найменший елемент L_ζ. За умовою існує автоморфізм $\varphi_k \in F\mathrm{Aut}\, T_n$ такий, що $u^k = \varphi_k^{-1} v^k \varphi_k$. Позначимо $\pi_k = \pi(\varphi_k)$. Нехай $Y_v = \big\{i \colon k$ ділиться на $l(\pi_v, i)\big\}$, $Y_u = \big\{i \colon k$ ділиться на $l(\pi_u, i)\big\}$. Очевидно, що $\pi_k(Y_v) \subset Y_u$ і для кожної літери $i \in Y_v$ автоморфізми $r(v, i, k)$ і $r(u, \pi_k(i), k)$ є спряженими в $F\mathrm{Aut}\, T_n$. Розглянемо відображення $\zeta^{-1}\pi_k : \zeta(Y_v) \to Y_u \cap \pi_k(\operatorname{dom}\zeta)$. Воно є бієктивним і його інваріантна множина є підмножиною $Y_u \cap \pi_k(\operatorname{dom}\zeta)$.

Побудуємо відображення $\hat{\pi} \colon \operatorname{dom}\zeta \cup Y_v \to \operatorname{im}\zeta \cup Y_u$. Покладемо $\hat{\pi}|_{\operatorname{dom}\zeta} = \zeta$. Для літери з множини $Y_v \setminus \operatorname{dom}\zeta$ застосуємо π_k; далі, поки одержаний на попередньому кроці образ належить в $\zeta(Y_v)$, застосовуємо $\zeta^{-1}\pi_k$; результат і буде образом при дії $\hat{\pi}$. Кількість кроків буде скінченною, оскільки ми починаємо застосовувати бієктивне відображення $\zeta^{-1}\pi_k$ з літери, що належить множині $Y_u \setminus \pi_k(\operatorname{dom}\zeta)$, тобто не належить інваріантній множині відображення. Остання літера належить множині $Y_u \setminus \zeta(Y_v) = Y_u \setminus \operatorname{im}\zeta$. Відображення $\hat{\pi}$ є бієкцією та зберігає довжини циклів.

Довизначимо ζ на елементах $Y_v \setminus \operatorname{dom}\zeta$. Для літери $i \in Y_v \setminus \operatorname{dom}\zeta$ покладемо $\zeta(s(\pi_v, i)) = \hat{\pi}(s(\pi_v, i))$. На решті елементів визначимо ζ так, щоб виконувалась умова $\pi_u = \zeta^{-1}\pi_v\zeta$ на $\operatorname{im}\zeta \cup Y_u$. Це можна зробити, оскільки ми довизначили ζ на кожному циклі довжини k рівно в одній точці. Відображення π_k зберігає спряженість добутків довжини k. Таку ж властивість має $\zeta^{-1}\pi_k$. Отже, для кожної літери $i \in \operatorname{dom}\zeta \cup Y_v$ автоморфізми $\hat{r}(v, s(\pi_v, i))$ і $\hat{r}(u, \zeta(s(\pi_v, i)))$ є спряженими в $F\mathrm{Aut}\, T_n$. Довизначене відображення ζ знову є частковим генератором спряження.

Міркуючи аналогічно, можна продовжити початкове відображення на всю множину X. Тоді за лемою 6 матиме місце твердження теореми.

Нехай для u і v існує частковий генератор спряження ζ. Розглянемо множину $X_{v,1} = \big\{i \colon l(\pi_v, i) = 1\big\}$. Якщо $\operatorname{dom}\zeta \not\supset X_{v,1}$, то $L_\zeta \ni 1$, тобто умова теореми містить припущення, що u і v є спряженими в $F\mathrm{Aut}\, T_n$. Отже, для одержання нової інформації має виконуватись включення $\operatorname{dom}\zeta \supset X_{v,1}$. Умови існування часткового генератора спряження ζ з $\operatorname{dom}\zeta = X_{v,1}$ дає наступна лема.

Лема 7. *Нехай $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)\pi_u$ і $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)\pi_v$, $\zeta \colon X_{v,1} \to$ $\to X_{u,1}$ $\big(X_{u,1} = \big\{i \colon l(\pi_u, i) = 1\big\}\big)$ — бієктивне відображення та v_i і $u_{\zeta(i)}$ є спряженими для $i \in X_{v,1}$, Тоді ζ є частковим генератором спряження.*

Доведення. Відображення π_u і π_v є тотожними на множинах $X_{u,1}$ і $X_{v,1}$ відповідно. Тому при дії π_v множина $\operatorname{dom}\zeta = X_{v,1}$ є інваріантною та $\pi_u = \zeta^{-1}\pi_v\zeta$ на $\operatorname{im}\zeta$. Для довільної літери $i \in \operatorname{dom}\zeta$ маємо $s(\pi_v, i) = i$, $l(\pi_v, i) = 1$ та $l(\pi_u, \zeta(i)) = 1$, тому $\hat{r}(v, s(\pi_v, i)) = v_i$ і $\hat{r}(u, \zeta(s(\pi_v, i))) = u_{\zeta(i)}$. Оскільки v_i і $u_{\zeta(i)}$ є спряженими за умовою для всіх $i \in \operatorname{dom}\zeta$, відображення ζ є частковим генератором спряження.

Лему доведено.

Теорема 3. *Нехай підстановки π_u і π_v з S_n — цикли довжини n та u^n і v^n є спряженими в $F\mathrm{Aut}\, T_n$. Тоді u і v спряжені в $F\mathrm{Aut}\, T_n$.*

Доведення. Підстановки π_u і π_v є спряженими в S_n. Розглянемо частковий генератор спряження ζ з $\operatorname{dom}\zeta = \varnothing$. Для нього $L_\zeta = \{n\}$. За умовою теореми 2 автоморфізми u і v є спряженими в $F\mathrm{Aut}\,T_n$.

5. Спряженість з додавальною машиною в $\boldsymbol{F}\mathbf{Aut}\,\boldsymbol{T_2}$. В цьому пункті вважаємо, що $X = \{1, 2\}$. Нехай $u \in F\mathrm{Aut}\,T_2$ — автоморфізм, спряжений з додавальною машиною, тобто з $f = (1, f)\sigma$ в $\mathrm{Aut}\,T_2$. Як показано в [4], це буде тоді й тільки тоді, коли u — шарово транзитивний автоморфізм, тобто транзитивно діє на кожній із множин X^n, $n \in \mathbb{N}$. Для спрощення запису введемо позначення $\Upsilon(u) = \Psi_*(u, f)$, тобто Υ є відображенням із множини автоморфізмів $F\mathrm{Aut}\,T_2$, спряжених з f в $\mathrm{Aut}\,T_2$, в множину $\mathrm{Aut}\,T_2$. Також вважаємо, що для кожної пари $\theta = (\varphi, f)$ підстановка $\pi(\Psi(\theta)) = e$ (це можна зробити заміною $\Psi(\theta)$ на $f\Psi(\theta)$). Тоді для Υ одержуємо

$$\Upsilon(u) = (\Upsilon(u_1u_2), f\Upsilon(u_1u_2)u_2^{-1}) = (\Upsilon(u_1u_2), \Upsilon(u_1u_2)u_1), \tag{5}$$

оскільки $f\Upsilon(u_1u_2) = \Upsilon(u_1u_2)u_1u_2$ за лемою 4.

Розглянемо відображення $p\colon X^* \to X^*$ та $m\colon X^* \to \mathbb{N}_0$. Для слова $w \in X^*$ слово $p(w)$ складається лише з одиниць і має ту саму довжину, а $m(w) = \sum_{i=1}^{|w|} 2^{i-1}(w_i - 1)$, де w_i — i-та літера w.

Лема 8. *Для довільного слова $w \in X^*$ має місце рівність*

$$\Upsilon(u)|_w = \Upsilon\left(\prod_{k=0}^{2^{|w|}-1} u|_{u^k(p(w))}\right) \prod_{k=0}^{m(w)-1} u|_{u^k(p(w))}. \tag{6}$$

Доведення проведемо індукцією за довжиною слова w. База індукції $|w| = 0$. Тоді $w = \Lambda$, $p(w) = \Lambda$ та $m(w) = 0$. Рівність (6) набирає вигляду $\Upsilon(u)|_\Lambda = \Upsilon(u|_\Lambda)$, яка, очевидно, виконується.

Нехай рівність (6) виконується для слова w. Обчислимо

$$\Upsilon(u)|_{wx} =$$

(за припущенням індукції)

$$= \left(\Upsilon\left(\prod_{k=0}^{2^{|w|}-1} u|_{u^k(p(w))}\right) \prod_{k=0}^{m(w)-1} u|_{u^k(p(w))}\right)\Bigg|_x =$$

$\left(\text{оскільки } \Upsilon\left(\prod_{k=0}^{2^{|w|}-1} u|_{u^k(p(w))}\right) \text{ не змінює першу літеру}\right)$

$$= \Upsilon\left(\prod_{k=0}^{2^{|w|}-1} u|_{u^k(p(w))}\right)\Bigg|_x \left(\prod_{k=0}^{m(w)-1} u|_{u^k(p(w))}\right)\Bigg|_x =$$

(за рівністю (5))

$$= \Upsilon\left(\left(\prod_{k=0}^{2^{|w|}-1} u|_{u^k(p(w))}\right)\Bigg|_1 \left(\prod_{k=0}^{2^{|w|}-1} u|_{u^k(p(w))}\right)\Bigg|_2\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{k=0}^{2^{|w|}(x-1)-1} u|_{u^k(p(w))}\right)\Bigg|_1 \left(\prod_{k=0}^{m(w)-1} u|_{u^k(p(w))}\right)\Bigg|_x =$$

$$= \Upsilon\left(\prod_{k=0}^{2^{|w|}-1} u|_{u^k(p(w)1)} \cdot \prod_{k=0}^{2^{|w|}-1} u|_{u^k(p(w)2)}\right) \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{2^{|w|}(x-1)-1} u|_{u^k(p(w)1)} \cdot \prod_{k=0}^{m(w)-1} u|_{u^k(p(w)x)} =$$

(оскільки автоморфізм $u^{2^{|w|}}$ не змінює перші $|w|$ літер і $u^{2^{|w|}}|_{p(w)}$ спряжений до f, то має місце рівність $u^{2^{|w|}}(p(w)1) = p(w)2$)

$$= \Upsilon\left(\prod_{k=0}^{2\cdot 2^{|w|}-1} u|_{u^k(p(w)1)}\right) \prod_{k=0}^{m(wx)-1} u|_{u^k(p(w)1)} =$$

$$= \Upsilon\left(\prod_{k=0}^{2^{|wx|}-1} u|_{u^k(p(wx))}\right) \prod_{k=0}^{m(wx)-1} u|_{u^k(p(wx))}.$$

Отже, рівність (6) має місце для слова wx. А тому і для довільного слова $w \in X^*$.

Лему доведено.

Розглянемо множину

$$S(u) = \left\{\prod_{k=0}^{m(w)-1} u|_{u^k(p(w))} : w \in X^*\right\} \bigcup \left\{\prod_{k=0}^{2^n-1} u|_{u^k(p(w))} : w \in X^*\right\}.$$

Елементами цієї множини є добутки станів автоморфізму u. Але такий добуток є насправді станом відповідного степеня u, оскільки кожний наступний множник є станом u у вершині, яка є образом слова $p(w)$ під дією попередніх множників. Тому

$$S(u) = \left\{u^k|_{v_n} : n \geq 0,\ \ 0 \leq k \leq 2^n\right\},$$

де слово v_n довжини n складене лише з одиниць.

Теорема 4. *Нехай u та f є спряженими в $\operatorname{Aut} T_2$. Автоморфізми u та f спряжені в $F\operatorname{Aut} T_2$ тоді і лише тоді, коли множина $S(u)$ є скінченною.*

Доведення. Якщо множина $S(u)$ є скінченною і $\left|S(u)\right| = N$, то за формулою (6)

$$\left|\left\{\Upsilon(u)|_w : w \in X^*\right\}\right| \leq NN.$$

Отже, u та f є спряженими в $F\operatorname{Aut} T_2$.

Нехай $u = h^{-1}fh$, де $h \in F\mathrm{Aut}\,T_2$. Тоді $u^k = h^{-1}f^kh$ та

$$S(u) = \left\{(h^{-1}f^kh)|_{v_n} \colon n \geq 0,\ 0 \leq k \leq 2^n\right\} =$$

$$= \left\{h^{-1}|_{v_n} f^k|_{h^{-1}(v_n)} h|_{f^k(h^{-1}(v_n))} \colon n \geq 0,\ 0 \leq k \leq 2^n\right\} =$$

(оскільки f діє транзитивно на словах фіксованої довжини n і $0 \leq k \leq 2^n$, стан не більш ніж одного множника f^k дорівнює f, а решта дорівнюють тотожному автоморфізму)

$$= \left\{h^{-1}|_{v_n} f^l h|_{f^k(h^{-1}(v_n))} \colon n \geq 0,\ \ 0 \leq k \leq 2^n,\ \ l \in \{0,1\}\right\}.$$

Якщо кількість станів h дорівнює N, то $|S(u)| \leq 2N^2$.

1. *Gawron P. W., Nekrashevych V. V., Sushchansky V. I.* Conjugation in tree automorphism groups // Int. J. Algebra Comput. – 2001. – **11,** № 5. – P. 529 – 547.
2. *Nekrashevych V. V.* Self-similar groups // Math. Surv. and Monogr. – 2005. – **117**. – 231 p.
3. *Brunner A. M., Sidki S.* On the automorphism group of the one-rooted binary tree // J. Algebra. – 1997. – **195.** – P. 465 – 486.
4. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2000. – **231.** – С. 134 – 214.

Одержано 10.01.07,
після доопрацювання — 13.09.07