УДК 519.21

**Г. М. Перун** (Чернів. нац. ун-т)

# ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

We prove a theorem on the well-posedness of the Cauchy problem for a linear stochastic equation of the parabolic type of higher order with time-dependent coefficients and continuous perturbations whose solutions are subjected to pulse action at fixed times.

Доказана теорема о корректности задачи Коши для линейного стохастического уравнения параболического типа высшего порядка с коэффициентами, зависящими от времени, и непрерывными возмущениями, решения которого в фиксированные моменты времени подвержены импульсному воздействию.

Системи звичайних диференціальних рівнянь, які зазнають імпульсної дії, глибоко вивчено в праці А. М. Самойленка, М. О. Перестюка [1]. Крайові задачі для рівнянь другого порядку параболічного типу з білим шумом різними методами досліджувались у працях Й. І. Гіхмана [2], І. Й. Гіхмана [3], А. Я. Дороговцева, С. Д. Івасишена, А. Г. Кукуша [4]. Властивості розв'язків квазілінійних гіперболічних рівнянь з імпульсною дією вивчали М. О. Перестюк, А. В. Ткач [5]. Результати вивчення задачі Коші для параболічних систем з імпульсною дією викладено у праці М. І. Матійчука та В. М. Лучка [6].

Нехай визначено ймовірнісний простір $(\Omega, F, \mathrm{P})$ з неспадним потоком $\sigma$-алгебр $\{F_t,\ t \geq 0,\ F_{t_1} \subset F_{t_2}$ при $t_1 < t_2\}$. Випадкова функція $u(t, x, \omega)$, яка визначена на $[t_0, T] \times E_n \times \Omega \equiv \Pi \times \Omega$, вимірна і з імовірністю 1 є розв'язком задачі Коші

$$d_t u = \left[\sum_{|k|\leq 2b} A_k(t) D_x^k u(t,x,\omega)\right] dt + \sum_{|k|\leq m} C_k(t) D_x^k u(t,x,\omega)\, dw(t,\omega), \tag{1}$$

$$x \in E_n, \quad \omega \in \Omega,$$

$$u(t,x,\omega)\big|_{t=t_0} = \varphi(x,\omega), \tag{2}$$

який при $t = \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $t_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N \leq T$, задовольняє умову стрибка [1]

$$\Delta_t u(t,x,\omega)\big|_{t=\tau_i} = u(\tau_i + 0, x, \omega) - u(\tau_i - 0, x, \omega) = B_i u(\tau_i - 0, x, \omega) \equiv B_i u. \tag{3}$$

Якщо $\tau_i$ — точка розриву першого роду, то функція $u$ є неперервною зліва. Покладемо

$$u(\tau_i, x, \omega) = u(\tau_i - 0, x, \omega) = \lim_{t \to \tau_i - 0} u(t, x, \omega).$$

Тут $A_k(t)$ і $C_k(t)$ — неперервні функції, $\varphi(x, 0)$ є обмеженою, $\varphi(x,\omega)$ не залежить від потоку $F_t$, $B_i \in \mathbb{R}$, $w(t,\omega)$ — стандартний скалярний вінерівський процес.

Застосуємо до задачі (1) – (3) інтегральне перетворення Фур'є [7]

$$\upsilon(t,\sigma,\omega) = F_x u(t,x,\omega) = \int_{E_n} e^{i\sigma x} u(t,x,\omega)\, dx, \qquad \sigma \in E_n,$$

тоді

$$d_t v(t,\sigma,\omega) = \left[\sum_{|k|\le 2b} A_k(t)(i\sigma)^k v(t,\sigma,\omega)\right]dt + \sum_{|k|\le m} C_k(t)(i\sigma)^k v(t,\sigma,\omega)\,dw(t,\omega), \quad (4)$$

$$v(t,\sigma,\omega)\big|_{t=t_0} = \tilde{\varphi}(\sigma), \qquad \sigma\in E_n, \quad (5)$$

$$\Delta_t v(t,\sigma,\omega)\big|_{t=\tau_i} = B_i v(\tau_i-0,\sigma,\omega). \quad (6)$$

Рівняння (4) є лінійним однорідним стохастичним рівнянням. Задача (4), (5) має єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності неперервний розв'язок [8] при $t\neq\tau_i$, $i=1,2,\ldots,N$, який визначається формулою

$$v(t,\sigma,\omega) = \tilde{\varphi}(\sigma)\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left[\sum_{|k|\le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k - \frac{1}{2}\left(\sum_{|k|\le m} C_k(s)(i\sigma)^k\right)^2\right]ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t}\sum_{|k|\le m} C_k(s)(i\sigma)^k\,dw(s,\omega)\right\}. \quad (7)$$

Формула (7) містить нормальний фундаментальний розв'язок (НФР) задачі Коші для відповідного (1) детермінованого рівняння

$$Q(t,\tau,\sigma) = \exp\left\{\int_{\tau}^{t}\sum_{|k|\le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k\,ds\right\}.$$

НФР задачі (4), (5) для стохастичного рівняння з імовірністю 1 є функція

$$Q_1(t,\tau,\sigma,\omega) = \exp\left\{\int_{\tau}^{t}\left[\sum_{|k|\le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k - \frac{1}{2}\left(\sum_{|k|\le m} C_k(s)(i\sigma)^k\right)^2(s)\right]ds + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{t}\sum_{|k|\le m} C_k(s)(i\sigma)^k\,dw(s)\right\} \equiv Q(t,\tau,\sigma)\exp\left\{\int_{\tau}^{t}\sum_{|k|\le m} C_k(s)(i\sigma)^k\,dw(s) - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau}^{t}\frac{1}{2}\left(\sum_{|k|\le m} C_k(s)(i\sigma)^k\right)^2 ds\right\}, \qquad Q_1(\tau,\tau,\sigma,\omega) = 1. \quad (8)$$

Ненульовий розв'язок задачі (4) – (6) назвемо матрицантом $V(t,t_0,\sigma,\omega)$, якщо $V(t_0,t_0,\sigma,\omega) = 1$ з імовірністю 1. Матрицант задачі з імпульсною дією [1] має вигляд

$$V(t,t_0,\sigma,\omega) = Q_1(t,t_{j+m},\sigma,\omega)(1+B_{j+m})\prod_{\nu=m}^{1} Q_1(t_{j+\nu},t_{j+\nu-1},\sigma,\omega)\times$$

$$\times (1+B_{j+\nu-1})Q_1(\tau_j,t_0,\sigma,\omega), \quad (9)$$

$$t_0 \le \tau_{j+1} < \tau_{j+m} < t \le \tau_{j+m+1} < T.$$

Тепер розв'язок задачі зобразимо в образах Фур'є:

$$v(t,\sigma,\omega) = V(t,t_0,\sigma,\omega)\tilde{\varphi}(\sigma,\omega). \quad (10)$$

Нехай $G(t, \tau, x, \omega)$ — функція Гріна, яка є оберненим перетворенням Фур'є матриканта

$$G(t, \tau, x, \omega) = F_\sigma^{-1} V(t, \tau, \sigma, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E_n} e^{-i\sigma x} V(t, \tau, \sigma, \omega) d\sigma, \tag{11}$$

$$\Delta_t G(t, t_0, x, \omega)\big|_{t=\tau_i} = B_i G(\tau_i, t_0, x, \omega), \quad t_0 < \ldots < \tau_i < \ldots < \tau_{i+m} < t < T. \tag{12}$$

За допомогою функції Гріна запишемо розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді

$$u(t, x, \omega) = \int_{E_n} G(t, t_0, x, \xi, \omega) \varphi(\xi, \omega) d\xi. \tag{13}$$

Обґрунтуємо формулу (13). Позначимо $C^*(s, \sigma) = \operatorname{Re} \sum_{|k| \le m} C_k(s)(i\sigma)^k$, $C^{**}(s, \sigma) = \operatorname{Im} \sum_{|k| \le m} C_k(s)(i\sigma)^k$, тоді

$$Q_1(t, t_0, \sigma, \omega) = \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \left( \sum_{|k| \le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k - \frac{1}{2}\left( C^*(s, \sigma) + \frac{1}{2} C^{**}(s, \sigma) \right)^2 \right) ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t} C^*(s, \sigma) dw + i \int_{t_0}^{t} C^{**}(s, \sigma) dw(s) - \int_{t_0}^{t} C^*(s, \sigma) C^{**}(s, \sigma) ds \right\}.$$

Використовуючи поняття модуля комплекснозначної функції, маємо

$$|Q_1(t, t_0, \sigma, \omega)| = \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \left( \operatorname{Re} \sum_{|k| \le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k - \frac{1}{2}\left( C^*(s, \sigma)^2 - (C^{**}(s, \sigma))^2 \right) \right) ds + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t} C^*(s, \sigma) dw(s, \omega) \right\}. \tag{14}$$

Скористаємося властивістю інтеграла Вінера – Іто для сумовних з квадратом функцій [9]

$$\mathrm{M}\left( \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} f(s, \omega) dw(s, \omega) \right\} \right) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} f^2(s, \omega) ds \right\},$$

де M — операція математичного сподівання.

Застосувавши операцію математичного сподівання до обох частин рівності (14), отримаємо

$$\mathrm{M}\{|Q_1(t, t_0, \sigma, \omega)|\} = \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \left( \operatorname{Re} \sum_{|k| \le 2b} A_k(s)(i\sigma)^k + \frac{1}{2}\left( C^{**}(s, \sigma) \right)^2 \right) ds \right\}. \tag{15}$$

Припустимо, що відповідне детерміноване до (1) рівняння є рівномірно параболічним, тобто

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=2b} A_k(s)(i\sigma)^k\right) \leq -\delta_0|\sigma|^{2b}, \qquad \delta_0 > 0, \tag{16}$$

і, очевидно,

$$\left(C^{**}(s,\sigma)\right)^2 \leq c_0|\sigma|^{2m}. \tag{17}$$

З останніх умов одержуємо умову параболічності стохастичного рівняння (1), яка забезпечує існування перетворення Фур'є матриціанта $F_\sigma^{-1}V(t,\tau,\sigma,\omega)$:

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{|k|\leq 2b} A_k(s)(i\sigma)^k\right) + \frac{1}{2}\left(C^{**}(s,\sigma)\right)^2 \leq -\delta_1|\sigma|^{2b}, \quad \delta_1 < \delta_0, \quad m \leq b. \tag{18}$$

Завдяки рівності (15) та умові (18) можемо оцінити матрицант

$$\mathrm{M}\{|V(t,t_0,\sigma,\omega)|\} \leq c\exp\left\{-\delta_1(t-\tau_{j+m})|\sigma|^{2b}\right\}\left|1+B_{j+m}\right| \times$$

$$\times \prod_{\nu=m}^{1}\exp\left\{-\delta_1(\tau_{j+\nu}-\tau_{j+\nu-1})|\sigma|^{2b}\right\}\left|1+B_{j+\nu-1}\right|\exp\left\{-\delta_1(\tau_j-t_0)|\sigma|^{2b}\right\} \leq$$

$$\leq c\prod_{\nu=0}^{m}\left|1+B_{j+\nu}\right|\exp\left\{-\delta_1|\sigma|^{2b}(t-t_0)\right\}, \qquad \tau_j > t_0, \quad t > t_{j+m}, \quad \sigma\in E_n. \tag{19}$$

Застосовуючи до $\mathrm{M}\{|V(t,t_0,\sigma,\omega)|\}$ лему 1.1 [7], приходимо до висновку, що $F_\sigma^{-1}\mathrm{M}\{|V(t,t_0,\sigma,\omega)|\}$ існує.

**Теорема** (про коректність). *Нехай коефіцієнти рівняння* (1) *є визначеними і неперервними на* $[t_0, T]$, *виконується умова параболічності* (18) *і* $m \leq b$; *випадкова функція* $\varphi(x,\omega)$ *не залежить від* $F_t$, $\varphi(x,0)$ — *неперервна обмежена функція,* $B_i\in\mathbb{R}$, $t=\tau_i$, $i=1,2,\ldots,N$, $t_0<\tau_i$. *Тоді функція Гріна задачі* (1) – (3) *визначається як обернене перетворення Фур'є матриціанта за формулою* (11), *для похідних якої справджується нерівність*

$$\left|D_x^k G(t,\tau,x)\right| \leq c_k\prod_{\nu=0}^{m}\left|1+B_{j+m}\right|(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}}\exp\left\{-c\frac{|x|^{\frac{2b}{2b-1}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\right\}. \tag{20}$$

*Розв'язок задачі визначається формулою* (13) *і для нього справджується оцінка*

$$\sup_{E_n}\left|\mathrm{M}\left\{D_x^k u(t,x,\omega)\right\}\right| \leq t^{-\frac{|k|}{2b}}\mathrm{M}\{|\varphi|\}, \qquad |k| \leq 2b. \tag{21}$$

***Зауваження* 1.** Якщо функція $\sum_{|k|\leq m} C_k(s)(i\sigma)^k$ є дійснозначним многочленом, то його степінь може бути довільним.

***Зауваження* 2.** За допомогою функції Гріна $G(t,\tau,x,\omega)$ задачі з імпульсною дією (1) – (3) можна записати розв'язок задачі для неоднорідного рівняння вигляду

$$d_t u(t,x,\omega) = \left[\sum_{|k|\leq 2b} A_k(t)D_x^k u(t,x,\omega) + f(t,x)\right]dt +$$

$$+\left[\sum_{|k|\le b} C_k(t)\,D_x^k u(t,x,\omega) + g(t,x)\right] dw(t,\omega). \qquad (22)$$

Розв'язок задачі (22), (2), (3) має вигляд

$$u(t,x,\omega) = \int_{E_n} G(t,0,x-\xi,\omega)\,\varphi(\xi,\omega)\,d\xi + \int_0^t \int_{E_n} G(t,s,x-\xi,\omega) \times$$

$$\times\left[f(s,\xi) - \sum_{|k|\le b} C_s(s)\,D_\xi^k g(s,\xi)\right] dx\,ds + \int_0^t \int_{E_n} G(t,s,x-\xi,\omega)\,g(s,\xi)\,dw(t,\omega)$$

за умови, що $f \in C_x^{\alpha}(\Pi)$ та $\sum_{|k|\le b} C_k(t)\,D_x^k g \in C_x^{\alpha}(\Pi)$, $0 < \alpha < 1$. Похідні до порядку $2b$ допускають оцінку

$$\sup_{\Pi}\left|\mathrm{M}\left\{D_x^k u(t,x,\omega)\right\}\right| \le t^{-\frac{k}{2b}}\left(\mathrm{M}\{|\varphi|\} + |f|_\alpha + \left|\sum_{m\le b} C_m(t)\,D_x g\right|_\alpha\right).$$


1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 258 с.
2. *Гихман И. И.* Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 5. – С. 483 – 489.
3. *Гихман Ил. И.* О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа // Там же. – 1980. – **32**, № 3. – С. 367 – 372.
4. *Дороговцев А. Я., Ивасишен С. Д., Кукуш А. Г.* Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Там же. – 1985. – **37**, № 1. – С. 13 – 20.
5. *Перестюк Н. А., Ткач А. В.* Периодические решения слабонелинейных систем в частных производных с импульсным воздействием // Там же. – 1997. – **43**, № 4. – С. 601 – 605.
6. *Матійчук М. І., Лучко В. М.* Задача Коші для параболічних систем з імпульсною дією // Там же. – 2006. – **58**, № 11. – С. 325 – 335.
7. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.
8. *Свердан М. Л., Царков Є. Ф., Ясинський В. К.* Стохастичні динамічні системи з скінченною післядією. – Чернівці: Зелена Буковина, 2000. – 556 с.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 567 с.


Одержано 10.01.07