УДК 517.9

В. І. Скрипник (Ін-т математики НАН України, Київ)

РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КІРКВУДА – ЗАЛЬЦБУРГА ДЛЯ ҐРАТКОВОЇ КЛАСИЧНОЇ СИСТЕМИ ОДНОВИМІРНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ З ПОЗИТИВНИМИ БАГАТОЧАСТИНКОВИМИ ПОТЕНЦІАЛАМИ ВЗАЄМОДІЇ ФІНІТНОЇ ДІЇ

For a system of classical one-dimensional oscillators on the d-dimensional hypercubic lattice interacting via pair superstable and many-body positive finite-range potentials, the (lattice) Kirkwood – Salsburg equation is proposed for the first time and is solved.

Для системы классических одномерных осцилляторов на d-мерной гиперкубической решетке, взаимодействующих благодаря четному суперустойчивому и многочастичным положительным финитным потенциалам впервые предложено и решено (решеточное) уравнение Кирквуда – Зальцбурга.

Будемо розглядати в термінах великого канонічного ансамблю рівноважну (гіббсівську) систему одновимірних осциляторів, координати яких $q_x \in \mathbb{R}$ індексуються вузлами ґратки $\mathbb{Z}^d$, з допомогою послідовності кореляційних функцій (з виділеним зовнішним полем) $\rho = \{\rho(q_X), X \subset \mathbb{Z}^d\}$, де $q_X = (q_x, x \in X)$ — набір координат, що індексуються скінченним числом $\|X\|$ вузлів множини X. Вона задовольняє ґраткове рівняння Кірквуда – Зальцбурга (КЗ) резольвентного типу

$$\rho = zK\rho + z\alpha, \tag{1}$$

де z — активність (термодинамічний параметр), $\alpha(q_X) = \delta_{|X|,1} = 0$, $|X| \neq 1$, $\delta_{|X|,1} = 1$, $|X| = 1$, оператор K визначено таким чином $\{F(q_\varnothing) = 0\}$:

$$(KF)(q_X) = \sum_{Y \subseteq X^c} \int K(q_x | q_{X \setminus x}; q_Y)\big[F(q_{X \setminus x \cup Y}) - \int \nu(dq_x) F(q_{X \cup Y})\big]\nu(dq_Y),$$

$$|X| > 1.$$

Тут інтегрування проводиться по $\mathbb{R}$ та відповідно $\mathbb{R}^{|Y|}$,

$$K(q_x | q_{X \setminus x}; q_Y) = \sum_{S \subseteq Y} (-1)^{|Y \setminus S|} e^{-\beta W(q_x | q_{X \setminus x}; q_S)},$$

$$W(q_x | q_Y) = U(q_x, q_Y) - U(q_Y),$$

$$\nu(dq_Y) = \prod_{y \in Y} \nu(dq_y), \qquad \nu(dq) = e^{-\beta u(q)}\Big(\int e^{-\beta u(q)}\, dq\Big)^{-1}, \qquad X^c = \mathbb{Z}^d \setminus X,$$

β — обернена температура. При $X = x$ перший доданок $(|Y| = \varnothing)$ у квадратних дужках зникає. Досліджувана система характеризується потенціальною енергією з трансляційно-інваріантною взаємодією

$$U_c(q_\Lambda) = \sum_{x \in \Lambda} u(q_x) + U(q_\Lambda), \qquad U(q_\Lambda) = \sum_{|X|>1, X \subseteq \Lambda} \phi_X(q_X),$$

де ϕ_X є $|X|$ — частинковий потенціал взаємодії. Якщо $X = x_{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$, то $\phi_X(q_X) = \phi_{x_{(n)}}(q_{x_1}, \ldots, q_{x_n})$. Ми будемо розглядати симетричні функції, що залежать від різниць змінних $(x_1, \ldots, x_n)$. Для обчислення суми по X слід врахувати, що спочатку підсумовування проводиться по $x_1, \ldots, x_n$, а потім по n від 1 до $|X|$. Якщо домножити кореляційні функції, що відповідають цій потенціальній енергії, на $\exp\left\{\beta \sum_{x\in X} u(q_x)\right\}$, то вони будуть задовольняти рівняння (1) (виділення зовнішнього поля, див. зауваження 1).

Дослідження ґраткового рівняння КЗ проводиться так само, як і подібного рівняння для ґраткового газу [1] та моделі Ізінга [2]. У статті Кунца [3] ґраткові системи осциляторів з парною взаємодією досліджено у термінах канонічного ансамблю, ґраткового рекурентного співвідношення КЗ та полімерного рівняння КЗ. Було запропоновано умову простої (осциляторної) суперстійкості

$$\left|\phi_{x,y}(q_x, q_y)\right| \;\le\; J_{x-y}\sqrt{\upsilon(q_x)}\sqrt{\upsilon(q_y)}, \qquad \int e^{\zeta\upsilon(q)}\nu(dq) \;<\; \infty,$$

де $\upsilon \ge 0$, $J_x \ge 0$, $\|\sqrt{J}\|_1 = \sum_y \sqrt{J_y} < \infty$, підсумовування проводиться по $\mathbb{Z}^d$, а $\zeta > 0$ — довільне додатне число. З умови простої суперстійкості випливає умова суперстійкості

$$\left|\phi_{x,y}(q_x, q_y)\right| \;\le\; \frac{1}{2} J_{x-y}\big(\upsilon(q_x) + \upsilon(q_y)\big).$$

Ця умова означає, що у випадку взаємодії з додатними багаточастинковими потенціалами потенціальна енергія підкоряється умові загальної суперстійкості [4].

Кунц довів збіжність кластерного (полімерного) розкладу для кореляційних функцій канонічного ансамблю при малих температурах у термодинамічній границі у випадку парної взаємодії. Інші оцінки збіжності цього розкладу наведено в [5]. Такий же результат автор отримав у [6] у випадку недодатного найпростішого тернарного потенціалу взаємодії. Раніше осциляторне ґраткове рівняння КЗ не розглядалось.

У випадку недодатних потенціалів необхідно розглядати симетризоване (з допомогою умови суперстійкості) ґраткове рівняння КЗ

$$\rho \;=\; z\tilde{K}\rho \;+\; z\alpha, \tag{2}$$

де $\tilde{K}$ — симетризований осциляторний оператор КЗ. Його симетризація виконується таким чином. З умови суперстійкості випливає нерівність

$$\sum_{x,y\in X}\phi_{x,y}(q_x, q_y) \;\ge\; -J\sum_{x\in X}\upsilon(q_x), \qquad |X| \;\ge\; 2, \qquad J \;=\; \sum_y J_y \;<\; \infty.$$

Це означає, що існує непорожня множина осциляторних змінних, для якої виконується нерівність

$$W_2(q_x|q_{X\setminus x}) \;=\; \sum_{y\in X}\phi_{x,y}(q_x, q_y) \;\ge\; -J\upsilon(q_x). \tag{2$'$}$$

Нехай $\chi_x(q_X)$ — її характеристична функція. Тоді

$$\sum_{x\in X}\chi^*_x(q_X) \;=\; 1, \qquad \chi^*_x(q_X) \;=\; \left(\sum_{y\in X}\chi_y(q_X)\right)^{-1}\chi_x(q_X). \tag{3}$$

Симетризований оператор $\tilde{K}$ для $|X| \ge 2$ задається так (див. зауваження 2):

$$(\tilde{K}F)(q_X) \;=\;$$

$$=\; \sum_{x\in X}\chi^*_x(q_X)\sum_{Z\subseteq X^c}\int K(q_x|q_{X\setminus x}, q_Z)\Big[F(q_{X\setminus x\cup Z}) - \int\nu(dq_x)F(q_{X\cup Z})\Big]\nu(dq_Z).$$

При $X = x$ перший доданок ($|Y| = \varnothing$) у квадратних дужках зникає. Очевидно, що симетризоване рівняння (1) отримують після множення його X-компоненти на $\chi_x^*(q_X)$, підсумовування по x та використання (3). Операція симетризації є аналогом симетризації Руелла для системи частинок з допомогою умови стійкості. Для ґраткового рівняння КЗ симетризація використовувалась для моделі Ізінга з дискретними спінами в [3], що пов'язана з дискретизованою моделлю Хіггса – Віллена евклідової квантової теорії поля (див. зауваження 3). Природно шукати розв'язки рівнянь (1), (2) у банаховому просторі $\mathbb{E}_\xi(f)$ послідовностей вимірних функцій $F = \{F_X(q_X), X \subseteq \mathbb{Z}^d\}$ з нормою

$$\|F\|_{f,\xi} = \max_{|X|} \xi^{-|X|} \operatorname*{ess\,sup}_{q_X} \exp\left(-\sum_{x\in X} f(q_x)\right)|F_X(q_X)|.$$

Ми бачимо, що у випадку додатних потенціалів фінітної дії (на ґратці) можна покласти $f = 0$.

Якщо довести, що у цьому банаховому просторі оператори в правих частинах (1), (2) є обмеженими, то їх єдині розв'язки у ньому будуть зображені збіжними за його нормою рядами за степенями цих операторів при скінченних z.

Неважко помітити, що у випадку додатних потенціалів виконується нерівність $\left|K(q_x|q_{X\setminus x}; q_Y)\right| \le 2^{|Y|}$. Однак цієї нерівності недостатньо для доведення обмеженості оператора у правій частині (1). Припустимо тепер, що потенціали мають скінченну дію радіуса R, тобто для будь-якого $x \in X$ має місце $\phi_X(q_X) = 0$, $|x - x'| \ge R$, $x' \in X\backslash x$, $|x - x'|$ — евклідова відстань між двома вузлами. Це означає, що $W(q_x|q_{X\setminus x}; q_S) = W(q_x|q_{X\setminus x}; q_{S\setminus y})$, $|y - x| \ge R$, $y \in S$. Звідси, використовуючи наявність множника $(-1)^{|Y\setminus S|}$ у виразі для ядра, отримуємо

$$\left|K(q_x|q_{X\setminus x}; q_Y)\right| \le 2^{|Y|}\chi_{B_x(R)}(Y), \tag{4}$$

де $\chi_A(Y) = \prod_{y\in Y}\chi_A(y)$, $\chi_A(y)$ — характеристична функція множини $A \subset \mathbb{Z}^d$, а $B_x(R)$ — гіперкуля радіуса R із центром у вузлі x. Покладемо $\|f\|_1 = \int e^{f(q)}\nu(dy)$ та підставимо цю нерівність у праву частину нерівності, що задає норму оператора K:

$$\|K\|_{f,\xi} \le \left(\xi^{-1} + \|e^f\|_1\right) \operatorname*{ess\,sup}_{X,q_X} e^{-f(q_x)} \sum_{Y\subset X^c} \xi^{|Y|} \int \left|K(q_x|q_{X\setminus x}; q_Y)\right| e^{\sum_{y\in Y} f(q_y)} \nu(dq_Y).$$

Тоді, враховуючи, що $\|1\|_1 = 1$, та нехтуючи індексом f при $f = 0$ в нормі, отримуємо

$$\|K\|_\xi \le (1 + \xi^{-1})e^{2\upsilon_R\xi}, \qquad \upsilon_R = |B_0(R)|.$$

Отже, ми довели у випадку додатних потенціалів фінітної дії наступну **теорему.**

Нехай всі багаточастинкові потенціали, крім парного, є додатними та мають скінченну дію, а парний потенціал є простим суперстійким (*додатним суперстійким або додатним зі скінченною дією*). *Тоді оператор* $\tilde{K}(K)$ *є обмеженим у просторі* $\mathbb{E}_{f,\xi} f = \beta\gamma\upsilon$ *при* $\gamma \ge 3J/2$ ($\gamma \ge J/2$ *або* $f = 0$), *а єдині розв'язки рівнянь* (1), (2) *у ньому зображуються рядами з комплексним* z

$$\rho = z\sum_{n\ge 0}(zK)^n\alpha, \qquad \rho = z\sum_{n\ge 0}(z\tilde{K})^n\alpha,$$

збіжними відповідно при $|z| \le \|K\|_{f,\xi}^{-1}$, $|z| \le \left\|\tilde{K}\right\|_{f,\xi}^{-1}$.

Доведення цієї теореми у загальному випадку ґрунтується на використанні рекурентного співвідношення $\left(W_2(q_x|q_{S'}) = \sum_{y\in S'}\phi_{x,y}(q_x, q_y)\right)$

$$K(q_x|q_X; q_Y) = \sum_{S'\subseteq Y} K(q_x|q_X; q_{S'})\chi_{B_x(R)}(S')G(q_x|q_{Y\setminus S'})\chi_{B^c_x(R)}(Y\setminus S'),$$

$$G(q_x|q_S) = \sum_{S'\subseteq S}(-1)^{|S\setminus S'|}e^{-\beta W_2(q_x|q_{S'})} = \prod_{y\in S}(e^{-\beta\phi_{x,y}(q_x,q_y)} - 1),$$

яке ми доведемо в кінці статті.

Нехай парний потенціал є додатним, але не має фінітної дії. З цього рекурентного співвідношення та з (4) випливає важлива нерівність

$$\left|K(q_x|q_{X\setminus x}; q_Y)\right| \le \sum_{S'\subseteq Y} 2^{|S'|}\chi_{B_x(R)}(S')G(q_x|q_{Y\setminus S'}) = \prod_{y\in Y}\left[G(q_x|q_y) + 2\chi_{B_x(R)}(y)\right], \tag{5}$$

з якої, в свою чергу, отримуємо нерівність

$$\sum_{Y\subset X^c}\xi^{|Y|}\int\left|K(q_x|q_{X\setminus x}; q_Y)\right|e^{\beta\sum_{y\in Y}f(q_y)}\nu(dq_Y) \le$$

$$\le \prod_{y\ne x}\left(1 + \xi\left[\int\left|e^{-\beta\phi_{x,y}(q_x,q_y)} - 1\right|e^{f(q_y)}\nu(dq_y) + 2\chi_{B_x(R)}(y)\|e^f\|_1\right]\right). \tag{6}$$

З додатності, суперстійкості парного потенціалу та з нерівності $1 - e^{-a} \le a,\ a \ge 0$, випливає оцінка

$$\int\left|e^{-\beta\phi_{x,y}(q_x,q_y)} - 1\right|e^{f(q_y)}\nu(dq_y) \le \frac{\beta}{2}J_{x-y}\left[\upsilon(q_x)\|e^f\|_1 + \|\upsilon e^f\|_1\right].$$

Тоді вираз у круглих дужках у правій частині (6) не перевищує

$$e^{\xi\left[\frac{\beta}{2}J_{x-y}\upsilon(q_x)\|e^f\|_1 + \|\upsilon e^f\|_1 + 2\chi_{B_x(R)}(y)\|e^f\|_1\right]}.$$

В результаті

$$\|K\|_{f,\xi} \le \left(\xi^{-1} + \|e^f\|_1\right)\exp\left\{\left(2\|e^f\|_1\upsilon_R + \beta J\|\upsilon e^f\|_1\right)\xi\right\} < \infty, \qquad \gamma \ge \frac{J}{2},$$

тобто ми довели теорему для випадку парного додатного потенціалу.

Для доведення теореми у загальному випадку скористаємось аналогами (4) та (5). Для норми $\tilde{K}$ маємо

$$\left\|\tilde{K}\right\|_{f,\xi} \le$$

$$\le \left(\xi^{-1} + \|e^f\|_1\right)\operatorname*{ess\,sup}_{X,q_X}\sum_{x\in X}\sum_{Y\setminus X^c}\xi^{|Y|}\chi^*_x(q_X)e^{-f(q_x)}\int\left|K(q_x|q_{X\setminus x}; q_Y)\right|e^{\sum_{y\in Y}f(q_y)}\nu(dq_Y).$$

На підставі умов додатності непарних потенціалів та суперстійкості отримуємо

$$\left|K(q_x|q_{X\setminus x}; q_Y)\right| \le \sum_{S\subseteq Y}e^{-\beta W_2(q_x|q_{X\setminus x}, q_S)} = e^{-\beta W_2(q_x|q_{X\setminus x})}\sum_{S\subseteq Y}e^{-\beta W_2(q_x|q_S)} \le$$

$$\le e^{-\beta W_2(q_x|q_{X\setminus x})}e^{\frac{\beta}{2}J\upsilon(q_x)}\sum_{S\subseteq Y}e^{\frac{\beta}{2}\sum_{z\in S}J_{x-z}\upsilon(q_z)} =$$

$$= e^{-\beta W_2(q_x|q_{X\setminus x})} e^{\frac{\beta}{2}Jv(q_x)} \prod_{z\in Y}(1+e^{\frac{\beta}{2}J_{x-z}v(q_z)}).$$

З умови (2′) та з останньої нерівності випливає, що

$$\chi_x^*(q_X)\left|K(q_x|q_{X\setminus x}, q_Y)\right| \le \chi_x^*(q_X)e^{\frac{3\beta}{2}Jv(q_x)} \prod_{z\in Y}(1+e^{\frac{\beta}{2}J_{x-z}v(q_z)}).$$

Підставляючи цю нерівність у рекурентне співвідношення, одержуємо

$$\chi_x^*(q_X)\left|K(q_x|q_{X\setminus x}, q_Y)\right| \le$$

$$\le e^{\frac{3\beta}{2}Jv(q_x)} \sum_{S\subseteq Y}\prod_{z\in S}(1+e^{\frac{\beta}{2}J_{x-z}v(q_z)})\chi_{B_x(R)}(S)G(q_x|q_{Y\setminus S})\chi_x^*(q_X) =$$

$$= e^{\frac{3\beta}{2}Jv(q_x)} \prod_{y\in Y}\left[G(q_x|q_y)+\chi_{B_x(R)}(y)(1+e^{\frac{\beta}{2}J_{x-y}v(q_y)})\right]\chi_x^*(q_X),$$

тобто

$$\chi_x^*(q_X)\left|K(q_x|q_{X\setminus x}, q_Y)\right| \le e^{\frac{3\beta}{2}Jv(q_x)} \prod_{y\in Y}\left[G(q_x|q_y)+2\chi_{B_x(R)}(y)e^{\frac{\beta}{2}Jv(q_y)}\right]\chi_x^*(q_X).$$

При цьому ми скористались тим, що $J_{x-y}\le J.$ Остання нерівність означає, що

$$\sum_{Y\subset X^c}\xi^{|Y|}\chi_x^*(q_X)\int\left|K(q_x|q_{X\setminus x}; q_Y)e^{\beta\sum_{y\in Y}f(q_y)}\right|\nu(dq_Y) \le \chi_x^*(q_X)e^{\frac{3\beta}{2}Jv(q_x)} \times$$

$$\times \prod_{y\ne x}\left(1+\xi\left[\int\left|e^{-\beta\phi_{x,y}(q_x,q_y)}-1\right|e^{f(q_y)}\nu(dq_y)+2\chi_{B_x(R)}(y)\left\|e^{f+\frac{\beta}{2}Jv}\right\|_1\right]\right). \qquad (7)$$

Для оцінки інтеграла збіжності нескінченного добутку в правій частині цієї оцінки скористаємось умовою простої суперстійкості та нерівністю

$$(e^{ab}-1)^2 \le (e^{a^2}-1)(e^{b^2}-1), \quad a,\ b \ge 0.$$

Остання нерівність доводиться з допомогою нерівності (в [3] її використано без доведення)

$$e^{ab}-1 = (ab)^{-1}\int_0^1 e^{sab}\,ds \le (ab)^{-1}\int_0^1 e^{\frac{s}{4}(a+b)^2}\,ds,$$

перетворення Фур'є для експоненти в її правій частині та нерівності Шварца. Позначимо через I_x інтеграл у правій частині (7). Тоді $\left|e^{-\beta\phi_{x,y}(q_x,q_y)}-1\right| \le$ $\le e^{\beta\left|\phi_{x,y}(q_x,q_y)\right|}-1$ та

$$I_x \le \int\left|e^{\beta J_{x-y}v(q_y)}-1\right|^{1/2}\left|e^{\beta J_{x-y}v(q_x)}-1\right|^{1/2}e^{f(q)}\nu(dq_y) \le$$

$$\leq\ (\beta J_{x-y})^{1/2} e^{\frac{\beta}{2}J_{x-y}\,\upsilon(q_x)} \int e^{\frac{\beta}{2}J\upsilon(q)+f(q)} \sqrt{\upsilon(q)}\,\nu(dq).$$

При цьому ми скористались нерівностями $\left|e^a - 1\right| \leq |a|e^a$, $J_{x-y} \leq J$. Таким чином,

$$1 + \xi\left(I_x + 2\chi_{B_x(R)}(y)\left\|e^{f+\frac{\beta}{2}J\upsilon}\right\|_1\right) \leq$$

$$\leq\ e^{\frac{\beta}{2}J_{x-y}\upsilon(q_x)+\xi\left[(\beta J_{x-y})^{1/2}\left\|\sqrt{\upsilon}e^{f+\frac{\beta}{2}J\upsilon}\right\|_1+2\chi_{B_x(R)}(y)\left\|e^{f+\frac{\beta}{2}J\upsilon}\right\|_1\right]}.$$

Із рівності (3) та нерівності (7) отримуємо оцінку

$$\left\|\tilde{K}\right\|_{f,\xi}\ \leq\ \left(\xi^{-1} + \left\|e^f\right\|_1\right)\exp\left\{\left(2\left\|e^{f+\frac{\beta}{2}J\upsilon}\right\|_1 \upsilon_R + \sqrt{\beta}\left\|J\right\|_1\left\|\sqrt{\upsilon}e^{f+\frac{\beta}{2}J\upsilon}\right\|_1\right)\xi\right\}\ <\ \infty.$$

Отже, теорему доведено і в загальному випадку.

Доведемо тепер рекурентне співвідношення. Важливу роль у доведенні відіграє рівність

$$W(q_x|q_{X\setminus x}, q_S)\ =\ W(q_x|q_{X\setminus x}, q_{S\setminus S'})\ +\ W_2(q_x|q_{S'}),\quad y\notin B_x(R),\quad y\in S', \tag{8}$$

яка випливає з рівності

$$W_2(q_x|q_S)\ =\ W_2(q_x|q_{S'})\ +\ W_2(q_x|q_{S\setminus S'}).$$

Підставимо рівність

$$1\ =\ \prod_{y\in Y}\left(\chi_{B_x^c(R)}(y) + \chi_{B_x(R)}(y)\right)\ =\ \sum_{S'\subseteq Y}\chi_{B_x(R)}(S')\chi_{B_x^c(R)}(Y\setminus S')$$

у вираз для ядер K. Тоді, підсумовуючи отриманий вираз та враховуючи (8), одержуємо

$$\sum_{S\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus S|}e^{-\beta W(q_x|q_{X\setminus x},\, q_S)}\sum_{S'\subseteq Y}\chi_{B_x(R)}(S')\chi_{B_x^c(R)}(Y\setminus S')\ =$$

$$=\ \sum_{S'\subseteq Y}\ \sum_{S\subseteq Y}(-1)^{|Y\setminus S|}e^{-\beta W(q_x|q_{X\setminus x},\, q_S)}\chi_{B_x(R)}(S')\chi_{B_x^c(R)}(Y\setminus S')\ =$$

$$=\ \sum_{S'\subseteq Y}\ \sum_{S_2\subseteq Y\setminus S'}\ \sum_{S_1\subseteq S'}(-1)^{(|Y|-|S_1|-|S_2|)}\ \times$$

$$\times\ e^{-\beta\left[W(q_x|q_{X\setminus x};\, q_{S_1})+W_2(q_x|q_{X\setminus x};\, q_{S_2})\right]}\chi_{B_x(R)}(S')\chi_{B_x^c(R)}(Y\setminus S')\ =$$

$$=\ \sum_{S'\subseteq Y}\chi_{B_x(R)}(S')\chi_{B_x^c(R)}(Y\setminus S')\sum_{S_1\subseteq S'}(-1)^{(|S'|-|S_1|)}e^{-\beta W(q_x|q_{X\setminus x},q_{S_1})}\ \times$$

$$\times\ \sum_{S_2\subseteq Y\setminus S'}(-1)^{(Y-|S'|-|S_2|)}e^{-\beta W_2(q_x|q_{X\setminus x};q_{S_2})},$$

що і доводить рекурентне співвідношення.

***Зауваження* 1.** Кореляційні функції великого канонічного ансамблю в компактній області $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ визначаються таким чином:

$$\rho^{\Lambda}(q_X)\ =\ \chi_{\Lambda}(X)\Xi_{\Lambda}^{-1}\sum_{Y\subseteq\Lambda\setminus X}z^{|Y\cup X|}\int dq_Y e^{-\beta U_c(q_{X\cup Y})},$$

де Ξ_Λ — велика статистична сума, вираз для якої збігається з чисельником при $X = \varnothing$, $\chi_\Lambda(X)$ — характеристична функція множини X; інтегрування проводиться за мірою Лебега та $\mathbb{R}^{|Y|}$. Рівняння (1) отримано в термодинамічній границі $\Lambda \to \mathbb{Z}^d$. У цій границі і чисельник, і знаменник розбігаються для трансляційно-інваріантної U_c.

***Зауваження* 2.** Існує клас парних потенціалів, які можна перетворити у додатні, змінюючи при цьому потенціал зовнішнього поля. До них, зокрема, належать феромагнітний потенціал

$$\phi_{x,y}(q_x, q_y) \;=\; -\sum_s J_{x-y,s}\sqrt{v_s(q_x)v_s(q_y)}, \qquad v_s,\; J_{x-y,s} \;\geq\; 0,$$

де підсумовування по s проводиться за скінченною множиною цілих чисел. Дійсно,

$$-2\sqrt{v_s(q_x)v_s(q_y)} \;=\; \left[-v_s(q_x) - v_s(q_y) + \left(\sqrt{v_s(q_x)} - \sqrt{v_s(q_y)}\right)^2\right].$$

Додатний потенціал

$$\phi_{x,y}(q_x, q_y) \;=\; \sum_s J_{x-y,s}\left(\sqrt{v_s(q_x)} - \sqrt{v_s(q_y)}\right)^2, \qquad v_s,\; J_{x-y,s} \;\geq\; 0,$$

задовольняє умову суперстійкості, в якій $J_x = 4^{-1}\max\limits_s J_{x,s}$, $v = \sum_s v_s$. Заміна в рівнянні КЗ старого парного потенціалу на новий приводить до зміни міри ν, тобто заміни потенціалу зовнішнього поля $u(q)$ на $u - \sum_{x,s} J_{x,s}v_s(q)$.

***Зауваження* 3.** Побудова розв'язків рівняння КЗ для осциляторів та необмежених спінів саме через необхідність симетризації значно відрізняється від побудови його розв'язків для обмежених неперервних чи скінченних спінів та ґраткового газу, які є відомими [1]. Тому ніякі методи побудови розв'язків рівняння КЗ для обмежених спінів та ґраткового газу (цьому присвячено багато статей) не можна використати для систем осциляторів та необмежених спінів. Отриманий у цій статті результат можна легко узагальнити на випадок необмежених дискретних спінів із багаточастинковою взаємодією такого ж типу, як і для осциляторів. Запропонований метод оцінки норми оператора КЗ у випадку багаточастинкової взаємодії осциляторів є новим і базується на новому рекурентному співвідношенні для його ядер. Подібне рекурентне співвідношення раніше не використовувалось.

1. *Рюэль Д.* Статистическая механика. Строгие результаты. – М.: Мир, 1971. – 367 с.
2. *Israel R., Nappi C.* Quark confinement in the two dimensional lattice Higgs – Villain model // Communs Math. Phys. – 1978/1979. – **64**, № 2. – P. 177 – 189.
3. *Kunz H.* Analyticity and clustering properties of unbounded spin systems // Ibid. – 1978. – **59**, № 1. – P. 53 – 69.
4. *Ruelle D.* Probability estimates for continuous spin systems // Ibid. – 1976. – **50**. – P. 189 – 194.
5. *Park Y. M., Yoo H. J.* Uniqueness and clustering properties of Gibbs states for classical and quantum unbounded spin systems // J. Stat. Phys. – 1995. – **80**, № 1/2. – P. 223 – 271.
6. *Скрипник В. І.* Про полімерні розклади для рівноважних систем осциляторів з тернарною взаємодією // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11.

Одержано 24.10.07,
після доопрацювання — 09.11.07